Exercícios Geometria Riemanniana.
LISTA 0. Variedades diferenciáveis. Métricas Riemannianas

1. Sejam p, q números inteiros positivos com $p \geq 2$ e seja
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \equiv \mathbb{R}^{p+q} : \ |x|^2 - |y|^2 = 1\}.$$
   (a) Provar que M é uma subvariedade de dimensão $p + q - 1$ de $\mathbb{R}^{p+q}$.
   (b) Provar que M é difeomorfa a variedade produto $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{R}^q$.

2. Provar que as esferas $\mathbb{S}^n_p(r)$ e $\mathbb{S}^n_q(s)$ de centros $p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raios r, s são difeomorfas.

3. Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x| = 1\}$ a esfera de dimensão n com centro na origem e raio 1. Se $a \in \mathbb{S}^n$, representamos por H_a o hiperplano vetorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a a, ou seja:
$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, a\rangle = 0\}.$$
Prove que $E_a : U_a = \mathbb{S}^n - \{a\} \to H_a$ dada por
$$E_a(x) = \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 - \langle x, a\rangle},$$
é um difeomorfismo chamado de projeção estereográfica. Por tanto para cada $a \in \mathbb{S}^n$,$\{(U_a, E_a), (U_{-a}, E_{-a})\}$ constitui um atlas da estrutura diferenciável de $\mathbb{S}^n$.

4. No semiespaço superior $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : \ \ y > 0\}$ consideramos a métrica hiperbólica $g = y^{-2}\langle ., .\rangle$. Demonstrar que toda transformação de Möbius que conserva tal semiespaço, $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $ad-bc > 0$, é uma isometria de $(\mathbb{R}^2_+, g)$ em si mesmo. Concluir que dados $p, q \in \mathbb{R}^2_+$, existe uma isometria de $(\mathbb{R}^2_+, g)$ em si mesmo que leva p em q.

5. Dada uma base B de $\mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathbb{T}_B$ ao toro n-dimensional obtido como quociente de $\mathbb{R}^n$ pelo grupo $\mathbb{Z}_{v_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{v_n}$, e seja g_0 sua métrica plana canônica. Doutro lado, dado $r > 0$ considere a circunferência $\mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^2$ centrada na origem e de radio r, com métrica canônica g induzida pelo produto escalar usual de $\mathbb{R}^2$. Provar que para quaisquer $r_1, ..., r_n > 0$, existe uma base B de $\mathbb{R}^n$ tal que o toro $(\mathbb{T}_B, g_0)$ é isométrico a $(\mathbb{S}^1(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^1(r_n), g \times \overset{(n)}{\cdots} \times g)$. É B única?

6. Considere o mergulho do toro de Clifford,
$$F : \mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1) \to \mathbb{S}^3(1), \qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$
Em cada esfera consideramos a métrica canônica. Provar que a métrica pullback via F da métrica canônica sobre $\mathbb{S}^3(1)$ é homotética a métrica produto sobre $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$.

7. Considere a imersão
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6, \qquad F(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}, e^{2\pi i(t_1+t_2)}).$$
Considere Γ a quadrícula de $\mathbb{R}^2$ gerada pelos vetores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$. Demonstrar que F induz um mergulho F do toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ em $\mathbb{S}^5(1)$ (toro equilátero). Em $\mathbb{S}^5(1)$ e $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ consideramos respetivamente a métrica canônica g (induzida pelo produto escalar usual de $\mathbb{R}^6$) e a métrica pullback F^*g. Encontrar uma métrica g_1 sobre $\mathbb{R}^2$ que induza-se ao quociente $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ e que o faça isométrico a $(\mathbb{T}, F^*g)$.

8. Demonstrar que o mergulho de Veronese, induzido em $\mathbb{RP}^2$ pela imersão
$$\widetilde{F} : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{S}^4(1/\sqrt{3}), \qquad \widetilde{F}(x, y, z) = (\frac{1}{2}(x^2 - y^2), xz, yz, xy, \frac{\sqrt{3}}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$
é um mergulho isométrico se em $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{S}^4(1/\sqrt{3})$ consideramos as suas respetivas métricas canônicas (quociente da métrica canônica sobre $\mathbb{S}^2(1)$ e induzida pelo produto escalar usual de $\mathbb{R}^5$, respetivamente).

9. Considere o mergulho de Tai $F : \mathbb{RP}^n \to S(n+1, \mathbb{R})$, induzido pela imersão

$$\widetilde{F} : \mathbb{S}^n(1) \to S(n+1, \mathbb{R}), \qquad \widetilde{F}(p) = p^t \cdot p,$$

onde $S(n+1, \mathbb{R})$ é o espaço de matrizes simétricas reais de ordem $n+1$. Seja g_1 a métrica canônica sobre $\mathbb{RP}^n$ (quociente da métrica canónica sobre a esfera) e $g_0(A, B) = \text{Traço}(A \cdot B)$ a métrica canônica sobre $S(n+1, \mathbb{R})$. Demonstrar que a métrica pullback $F^* g_0$ é homotética a g_1.

10. Considere duas isometrias $\phi_i : (M_i, g_i) \to (N_i, g_i)$, $i = 1, 2$. Demonstrar que a aplicação produto $\phi_1 \times \phi_2 : (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) \to (N_1 \times N_2, g_1 \times g_2)$ é uma isometria.