Exercícios Geometria Riemanniana.
LISTA I. Conexão de Levi-Civita. Geodésicas e aplicação exponencial

1. Seja $a \in \mathbb{S}^n(1)$. Calcular o gradiente da função altura $f : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle a, p \rangle$, se consideramos na esfera sua métrica usual. Provar que as hipersuperfícies de nível de f são ortogonais ao campo gradiente de f.
2. Provar que em $(\mathbb{R}^n, g_0)$, um campo X ao longo de uma curva regular α é paralelo se e só se X é constante. Deduzir que o transporte paralelo ao largo de α é a identidade.
3. Sejam $(M_1^n, g_1), (M_2^m, g_2)$ duas variedades Riemannianas. Em $M_1 \times M_2$ considera-se a métrica produto $g = g_1 \times g_2$.
   (A) Denotemos por $\nabla^1, \nabla^2, \nabla$ as conexões de Levi-Civita de (M_1, g_1), (M_2, g_2) e $(M_1 \times M_2, g)$. Demonstrar que para $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$ temos
   $$\nabla_{(X_1,X_2)}(Y_1, Y_2) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2).$$
   (B) Demonstrar que una curva diferenciable $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) :]a, b[\to M_1 \times M_2$ é geodésica em $(M_1 \times M_2, g)$ se e só se cada α_i é geodésica em (M_i, g_i), $i = 1, 2$.
   (C) Para $i = 1, 2$, sejam $p_i \in M_i$ e $A_i(p_i) = \{v_i \in T_{p_i} M_i | 1 \in I_{(p_i, v_i)}\}$, onde $I(p_i, v_i)$ é o intervalo maximal de definição das geodésicas $\gamma_i(., p_i, v_i)$ em (M_i, g_i) com condições iniciáis $\gamma_i(0, p_i, v_i) = p_i$, $\gamma_i'(0, p_i, v_i) = v_i$. Assim, a exponencial $\exp^i_{p_i}$ de (M_i, g_i) está definida em $A(p_i)$. Notemos por $\exp(p_1, p_2)$ a exponencial em $(M_1 \times M_2, g)$, definida em $A(p_1, p_2) = \{(v_1, v_2) \in T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2 | 1 \in I_{((p_1,p_2),(v_1,v_2))}\}$, onde $I_{((p_1,p_2),(v_1,v_2))}$ é o intervalo maximal de definição da geodésica
   $$\gamma(., (p_1, p_2), (v_1, v_2)) = (\gamma_1(., p_1, v_1), \gamma_2(., p_2, v_2)).$$
   Provar que $A_1(p_1) \times A_2(p_2) \subseteq A(p_1, p_2)$ e que
   $$\exp(p_1, p_2) = (\exp^1_{p_1}, \exp^2_{p_2}) \qquad \text{em } A_1(p_1) \times A_2(p_2).$$
4. **O espaço hiperbólico n-dimensional como hipersuperfície do espaço de Lorentz-Minkowksi**. (Note no que segue o parecido com a esfera $S^n(1)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$). Em $\mathbb{R}^{n+1}$ considera-se o produto Lorentziano dado por
   $$\langle x, y \rangle_L = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1},$$
   sendo $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$. Notemos por $\overline{\nabla}$ a conexão plana usual em $\mathbb{R}^{n+1}$. Demonstrar que dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$,
   $$X(\langle Y, Z \rangle_L) = \langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle_L + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z \rangle_L.$$
   (A) Chamemos $\mathbb{H}^n(-1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle p, p \rangle_L = -1,\ x_{n+1}(p) > 0\}$, que é uma das duas componentes de um paraboloide hiperbólico em $\mathbb{R}^{n+1}$. Provar que $\mathbb{H}^n(-1)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (B) Mostrar que dado $p \in \mathbb{H}^n(-1)$, o espaço tangente a $\mathbb{H}^n(-1)$ é dado por $T_p\mathbb{H}^n(-1) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle v, p \rangle_L = 0\}$. Dado $p \in \mathbb{H}^n(-1)$, chamamos $g_p : T_p\mathbb{H}^n(-1) \times T_p\mathbb{H}^n(-1) \to \mathbb{R}$ ao tensor $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_L$, $\forall v, w \in T_p\mathbb{H}^n(-1)$. Demonstrar que $(\mathbb{H}^n(-1), g)$ é uma variedade Riemanniana.
   (C) Seja ∇ a conexão de Levi-Civita para g. Provar que
   $$(\nabla_X Y)p = (\overline{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})p - \langle X_p, Y_p \rangle_L p,\ \forall p \in \mathbb{H}^n(-1),$$
   donde $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n(-1))$ e $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ são estensões locais de X, Y em torno de p (Dica: usar a caracterização da conexão de Levi-Civita).
   (D) Dados $p \in \mathbb{H}^n(-1)$ e $v \in T_p\mathbb{H}^n(-1)$ com $||v|| = 1$, provar que a curva $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$ é uma geodésica em $(\mathbb{H}^n(-1), g)$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Demonstrar que a exponencial $\exp_p : T_p\mathbb{H}^n(-1) \to \mathbb{H}^n(-1)$ é um difeomorfismo.

5. Provar que los símbolos de Christoffel do espaço hiperbólico com o modelo do semiespaço $((\mathbb{R}^n)^+, g' = \frac{1}{x_n^2} g_0)$ com respeito à parametrização $((\mathbb{R}^n)^+, 1_d)$ são
$$\Gamma'^n_{nn} = -\Gamma'^n_{ii} = \Gamma'^i_{ni} = \Gamma'^i_{in} = -\frac{1}{x_n}$$
para cada $i = 1, \ldots, n-1$, e o resto de símbolos valem zero.
6. Demonstrar que dados $R > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, uma parametrização pelo comprimento de arco da circunferência de raio R centrada em a na métrica hiperbólica do semiplano superior é $\gamma(t) = (a + R\tanh t, \frac{R}{\cosh t})$ (são as geodésicas da métrica hiperbólica).
7. Achar as parametrizações pelo comprimento arco para todas as geodésicas do plano hiperbólico no modelo do disco $(B^2(0,1), \frac{4}{(1-||z||^2)^2} g_0)$, donde g_0 é el produto escalar usual em $\mathbb{R}^2$.
8. O transporte paralelo não depende da parametrização da curva. Sea $\alpha :]a,b[\to M$ uma curva regular em uma V.R., $\phi :]c,d[\to]a,b[$ um difeomorfismo e $\beta = \alpha \circ \phi$.
   a) Provar que a aplicação $H : \mathfrak{X}(\alpha) \to \mathfrak{X}(\beta) \mid H(X) = X \circ \phi$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.
   b) Demonstrar que $\forall X \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $\frac{D(X)}{ds} = \phi' \frac{DX}{dt} \circ \phi$
   c) Deduzir que $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é paralelo ao longo de α se e só se $X \circ \phi$ é paralelo ao longo de β.
   d) Sejam $[s_0, s_1] \subset]c,d[$ e $[t_0, t_1] = \phi([s_0, s_1]) \subset]a,b[$. Provar que se ϕ é crescente, então $\tau_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \tau_{s_0}^{s_1}(\beta)$.
9. Seja M uma variedade diferenciável conexa e $f \in C^1(M)$. Provar que se $X(f) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, então f é constante.
10. Exercício 5 Cap. III do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.
11. Exercício 8 Cap. III do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.
12. Exercício 9 Cap. III do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.
13. Escolha um entre os exercícios 11, 12,13 ou 14 do Cap. III do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.