Exercícios Geometria Riemanniana.
LISTA II. Curvaturas. Campos de Jacobi.

1. **Curvatura e métricas conformes.**

   Seja (M^n, g) uma V.R. e $g_0 = e^{2u}g$ uma métrica conforme à g, donde $u \in C^\infty(M)$.

   (A) Provar que os tensores de curvatura R, R_0 de g e g_0 relacionam-se mediante

   $$\begin{aligned} R_0(X,Y)Z = \ & R(X,Y)Z + \{(\nabla^2 u)(Y,Z) - Y(u)Z(u) + g(Y,Z)||\nabla u||^2\}X \\ & -(\nabla^2 u)\{(X,Z) - X(u)Z(u) + g(X,Z)||\nabla u||^2\}Y \\ & -g(X,Z)\nabla_Y \nabla u - Y(u)\nabla u + g(Y,Z)\{\nabla_X \nabla u - X(u)\nabla u\} \end{aligned},$$

   $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, donde $\nabla^2 u$ é o Hessiano de u com respeito à g.

   (B) Deduzir que o tensor de curvatura do espacio hiperbólico $((\mathbb{R}^n)^+, g = \frac{1}{x_n^2} g_0)$ é

   $$R(X,Y)Z = -[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X], \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}((\mathbb{R}^n)^+).$$

   e que sua curvatura seccional é constantemente -1.

   (C) Suponhamos agora que $\dim M = 2$. Demonstrar que as curvaturas de Gauss K, K_0 de g e g_0 se relacionam mediante a fórmula

   $$K_0 e^{2u} = K - \Delta u,$$

   donde Δu é o Laplaciano de u segundo g.

3. **Curvatura na esfera.**

   Usando que a conexão de Levi-Civita na esfera usual $(\mathbb{S}^n(1), g)$ é $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle \overline{\nabla}_X Y, p \rangle p$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n(1))$ ($\overline{\nabla}$ indica a conexão plana de $\mathbb{R}^{n+1}$ e p é o vetor de de posição sobre a esfera), provar que

   $$\nabla_X \nabla_Y Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z, p \rangle p + g(Y,Z)X, \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n(1)).$$

   Deduzir que o tensor de curvatura de $(\mathbb{S}^n(1), g)$ é

   $$R(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X, \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n(1)),$$

   e que sua curvatura seccional é constantemente 1.

4. Seja $f = f(u,v) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ uma superfície parametrizada numa variedade Riemanniana (M^n, g). Provar que se R é o tensor de curvatura de (M, g), então

   $$R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) X = \frac{D}{\partial v}\left(\frac{DX}{\partial u}\right) - \frac{D}{\partial u}\left(\frac{DX}{\partial v}\right).$$

5. Seja (M^n, g) uma V.R., $p \in M$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ uma base local de campos diferenciáveis num aberto U que contém a p, ortonormais em cada ponto de U e cumprindo $\nabla_{E_{i_p}} E_j = 0$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Dados $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, chamamos $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l) \in C^\infty(U)$. Usar a segunda identidade de Bianchi para provar que

   $$E_{i_p}(R_{jkl\alpha}) + E_{k_p}(R_{ijl\alpha}) + E_{j_p}(R_{kil\alpha}) = 0, \qquad \forall i, j, k, l, \alpha = 1, \ldots, n.$$

6. Curvaturas e métrica produto.

   Para $i = 1, 2$, seja (M_i, g_i) una variedade Riemanniana com tensor de curvatura R_i, curvatura seccional K_i, curvatura de Ricci Ric_i e curvatura escalar ρ_i. Chamemos R, K, Ric e ρ às curvaturas correspondentes em $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$. Sejam $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, $v_1, w_1 \in T_{p_1} M_1$ linearmente independentes e $v_2, w_2 \in T_{p_2} M_2$ linearmente independentes. Provar que

   (A) A curvatura seccional do plano gerado por $v_1, w_1 \in T_{p_1} M_1$ e a do plano gerado por $(v_1, 0), (w_1, 0) \in T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2)$ cumplem

   $$K((v_1, 0) \wedge (w_1, 0)) = K_1(v_1 \wedge w_1).$$

   Analogamente,

   $$K((0, v_2) \wedge (0, w_2)) = K_2(v_2 \wedge w_2).$$

   (B) $K((v_1, 0) \wedge (0, v_2)) = 0$.

   (C) $(\mathrm{Ric}_1)_{p_1}(v_1) = \mathrm{Ric}_{(p_1,p_2)}(v_1, 0)$. Analogamente, $(\mathrm{Ric}_2)_{p_2}(v_2) = \mathrm{Ric}_{(p_1,p_2)}(0, v_2)$.

   (D) $\rho = \rho_1 \circ \pi_1 + \rho_2 \circ \pi_2$, donde π_i é a projecção canônica de $M_1 \times M_2$ em M_i, $i = 1, 2$.

7. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana, com conexão de Levi-Civita ∇. Definimos a derivada covariante do tensor de curvatura como $\nabla R : \mathfrak{X}(M)\times \overset{(4)}{\cdots} \times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$(\nabla R)(X,Y,Z,W) = \nabla_W(R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X,Y)Z - R(X,\nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z,$$

para quaisquer $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. Provar que ∇R é tensorial nas quatro variáveis.

8. **Variedades localmente simétricas.** Uma variedade Riemanniana (M^n,g) se diz localmente simétrica se $\nabla R = 0$ (com la notação do problema anterior).
   (A) Provar que se (M,g) tem curvatura seccional constante, então é localmente simétrica. Demonstrar que quando $\dim M = 2$, o recíproco vale.
   (B) Vamos supor nos items a seguir que (M,g) é localmente simétrica (com $\dim M = n$). Dada uma curva regular $\gamma :]a,b[\to M$ e três campos paralelos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ao longo de γ, provar que $R(X,Y)Z$ é um campo paralelo ao longo de γ.
   (C) Seja $\gamma : [0,+\infty[\to M$ uma geodésica. Dado $t \geq 0$, considera-se o endomorfismo

$$f_{\gamma'(t)} : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M \;/\quad f_{\gamma'(t)}(v) = R_{\gamma(t)}(\gamma'(t),v)\gamma'(t).$$

   Demonstrar que $f_{\gamma'(t)}$ é autoadjunto com respeito à $g_{\gamma(t)}$, $\forall t \geq 0$.
   Seja $\{e_1,\dots,e_n\}$ uma base ortonormal de $(T_{\gamma(0)}M, g_{\gamma(0)})$ formada por vetores propios de $f_{\gamma'(0)}$, isto é, $f_{\gamma'(0)}(e_i) = \lambda_i e_i$ para certos $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$. Demonstrar que a base ortonormal de campos paralelos $\{P_1,\dots,P_n\} \subset \mathfrak{X}(\gamma)$ dados pelas condições iniciais $P_i(0) = e_i$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfaz

$$f_{\gamma'(t)}(P_i(t)) = \lambda_i P_i(t), \qquad \forall t \geq 0,\ \forall i = 1,\dots,n.$$

9. Exercício 5 cap. V do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.
10. Exercício 6 cap. V do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.
11. Exercício 7 cap. V do livro Geometria Riemanniana de Manfredo Do Carmo.