Exercícios Geometria Riemanniana.
LISTA III. Distância. Variedades completas.

1. Seja (N, g) uma V.R., e $M \subset N$ uma subvariedade sua. Chamamos de d à distância em N associada à g e de $d_{(g|_M)}$ à distância em M associada à métrica inducida. Provar que $d|_M \leq d_{(g|_M)}$ e dar um exemplo onde a desigualdade estrita vale em um par de pontos.
2. Seja $\phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ una isometria local entre duas V.R. Demonstrar que a relação entre as distâncias associadas a ambas as métricas é
$$d_{M_2}(\phi(p), \phi(q)) \leq d_{M_1}(p, q), \qquad \forall p, q \in M_1.$$
Provar que se ϕ é uma isometria entre ambas V.R., então a desigualdade anterior converte-se em igualdade. Deduzir que se dois V.R. são isométricas, então seus diámetros coincidem (o diámetro é um invariante Riemanniano).
3. Considere o modelo Lorentziano do espaço hiperbólico n-dimensional, $\mathbb{H}^n(-1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \langle p, p\rangle_L = -1, x_{n+1}(p) > 0\}$ com a métrica $g = (\langle . \ , \ . \rangle_L)\,|_{\mathbb{H}_n(-1)}$, sendo
$$\langle x, y\rangle_L = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
Demonstrar que $(\mathbb{H}^n(-1), g)$ é completa. Deduzir que este é realmente um modelo valido para o espaço hiperbólico n-dimensional, no sentido em é isométrico a, por exemplo, ao modelo do semi-espaço para o espaço hiperbólico n-dimensional.
4. Demonstrar que o fato de uma V.R. ser completa não é um invariante por isometrias locais (mas sim por isometrias).
5. Um raio em uma V.R. (M, g) é uma geodésica $\gamma : [0, +\infty[\to M$ tal que $\forall t > 0$, $d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma)|_0^t$. Demonstrar que se (M, g) é uma V.R. completa e não compacta, então de todo ponto de M sai pelo menos um raio.
6. Sejam (M_1, g_1), (M_2, g_2) duas V.R. completas. Chamemos d_1, d_2, d às distâncias associadas às métricas g_1, g_2 e $g_1 \times g_2$, respectivamente. Demonstrar que
$$d((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \sqrt{d_1(p_1, q_1)^2 + d_2(p_2, q_2)^2}.$$
Concluir que
$$\mathrm{diam}(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = \sqrt{\mathrm{diam}(M_1, g_1)^2 + \mathrm{diam}(M_2, g_2)^2}.$$
7. Seja $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ um difeomorfismo entre dois V.R., sendo $(\overline{M}, \overline{g})$ completa. Suponhamos que existe $c > 0$ tal que
$$||df_p(v)|| \leq c||v||, \qquad \forall p \in M, \ \forall v \in T_pM.$$
Provar que (M, g) também é completa.
8. Seja $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ uma isometria local entre duas V.R., tendo que a primeira é completa e a segunda é conexa. Suponhamos aliás que cada par de pontos de $\overline{M}$ podem ser ligados por uma única geodésica. Demonstrar que f é uma isometria
9. Em $\mathbb{R}^n$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, define-se a função $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ h_k(x) = (1 + ||x||^2)^{-2k}$. Probar que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $g_k = h_k\langle , \rangle$ é uma métrica Riemanniana sobre $\mathbb{R}^n$ (aqui $\langle , \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$). Estudar se g_k é completa em termos de k (Dica: reduzir o estudo aos casos $k = 0, 1$).
10 . Uma V.R. (M, g) diz-se HOMOGÊNEA se $\forall p, q \in M$, $\exists \phi \in Iso(M, g)$ tal que $\phi(p) = q$ (i.e. $Iso(M, g)$ age transitivamente sobre M).
    (A) Demonstrar que $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $(\mathbb{S}^n(1), g_1)$ e $(\mathbb{H}^2(-1), g_{-1})$ são variedades homogêneas.
    (B) Provar que toda variedade homogênea é completa.
11. Seja $(\mathbb{R}^2)^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$. Definimos
$$g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/y \end{pmatrix}, \qquad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^+.$$
    (A) Provar que g é uma métrica Riemanniana não completa sobre $(\mathbb{R}^2)^+$ (Dica: estudar el segmento vertical $\{(0, y) \ / \ 0 < y \leq 1\}$).

(B) Demonstrar que dados dois pontos $p, q \in (\mathbb{R}^2)^+$ com a mesma segunda coordenada, o segmento

$$\gamma(t) = (1-t)p + tq, \qquad t \in [0,1],$$

é uma geodésica ligando p a q que minimiza a distância associada à g entre tais pontos.

12. Seja (M, g) uma V.R. completa, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo limitado, isto é, existe $c > 0$ tal que $||X|| \leq c$ em M. Provar que X é un campo completo.
13. Provar que toda V.R. de dimensão 1 é localmente isométrica à $(\mathbb{R}, g_0)$.
14. Seja $\phi : \widetilde{M} \to M$ um homeomorfismo local e proprio (i.e., a imagem inversa de um compacto de M é compacto em $\widetilde{M}$). Provar que ϕ é una projecção recobridora com um número finito de folhas.
15. Seja $\gamma : [a, b] \to M$ uma curva diferenciável. Dados $v \in T_{\gamma(a)}M, w \in T_{\gamma(b)}M$, demonstrar que existe um campo diferenciável W ao longo de γ tal que $W(a) = v$ e $W(b) = w$.