Geometria Riemanniana.

Alguns operadores em coordenadas locáis em uma variedade Riemanniana (M, g)

(1) **Gradiente de uma função.**

Dada $f \in \mathcal{D}(M)$, definimos o gradiente de f no ponto $p \in M$, $(\nabla f)_p \in T_pM$, como o único vetor satisfazendo

$$g_p((\nabla f)_p, v) = v(f), \quad \forall v \in T_pM.$$

Se $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ é uma carta local:

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \text{em } U,$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}).

(2) **Divergencia de um campo.**

Seja $X \in \chi(M)$. A divergencia de X é uma função dada por

$$\text{div}X(p) = \text{Traço}\begin{pmatrix} T_pM \to T_pM \\ v \mapsto \nabla_v X \end{pmatrix}$$

Se $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ é uma carta local e $X|_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\text{div}X = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial a_j}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^{j} \right] = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{G}),$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christhoffel na carta $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ e $\sqrt{G} = \det(g_{ij})$.

(3) **Hessiana de uma função.**

Dada $f \in \mathcal{D}(M)$ definimos a Hessiana de f, $\nabla^2 f$, como

$$(\nabla^2 f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f), \qquad \forall X, Y \in \chi(M)$$

(4) **Laplaciana de uma função.**

Dada $f \in \mathcal{D}(M)$ definomos sua Laplaciana, Δf como

$$\Delta f = \text{div}\, \nabla f = \text{Traço}(\nabla^2 f).$$

Se $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ é uma carta local:

$$(\Delta f)|_U = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} g^{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{ik} \Gamma_{ij}^{j},$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christhoffel na carta $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ e (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}).

Prof. Asun Jiménez