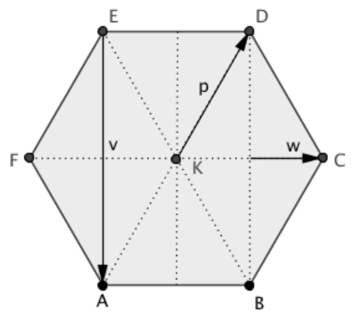
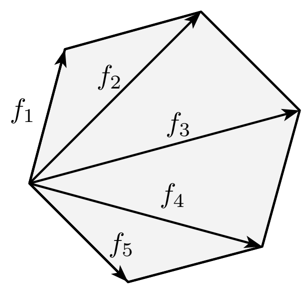
UFF - IME - GGM
Disciplina: GGM00162

2^a **Lista de Exercícios -** ***Vetores no plano***

1. Calcule e represente graficamente as seguintes expressões:
   (a) $2\vec{u} - 3\vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.
   (b) $-\frac{1}{2}\vec{v} + \vec{u} - 2\vec{w}$, onde $\vec{v} = (-1, 4)$, $\vec{u} = (-3, -2)$ e $\vec{w} = (0, 5)$.
2. Se $\overrightarrow{AB} = (5, 8)$ e $A = (3, 2)$, calcule o ponto B.
3. Dados $\vec{v} = (3, 7)$, $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{w} = (11, 4)$, determine os números x e y que tornam verdadeira a igualdade $x\vec{v} + y\vec{u} = \vec{w}$, ou seja, escreva $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{u}$.
4. Prove que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$ e conclua que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se e somente se $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.
5. Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, prove que os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais se e só se $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.
6. Calcule o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos abaixo:
   (a) $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$
   (b) $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (4, 12)$
7. Dados os vetores $\vec{u} = (2, k)$ e $\vec{v} = (3, -2)$, calcule k para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam:
   (a) Paralelos.
   (b) Perpendiculares.
   (c) Formem um ângulo de $\pi/3$ radianos.
8. Prove que dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o vetor $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}$ se e somente se
$$\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$
   O vetor $\lambda\vec{v}$ é chamado de projeção ortogonal de $\vec{u}$ sorbre $\vec{v}$.
9. Determine o conjunto de vetores no plano cuja projeção sobre o vetor $\vec{v} = (3, 1)$ seja o próprio $\vec{v}$.
10. A figura abaixo representa um hexágono regular $ABCDEF$. Determine X tal que $\overrightarrow{CX} = -3\vec{w} + 2\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{v}$.



11. Considere os vetores $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_5}$ que ligam um vértice de um hexágono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo. Determine a soma $\vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3} + \vec{f_4} + \vec{f_5}$ em função de $\vec{f_3}$.



12. Se $\overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$, ache k sabendo que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais e unitários e que $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = 6$.

13. Seja ABC um triângulo com medianas AD, BE e CF. Mostre que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

14. Dados os vértices $A = (2,1)$ e $B = (1,0)$ do triângulo ABC e o seu baricentro (ponto de corte das medianas) $G = (2/3, 0)$, calcule o vértice C.

15. Um dos vértices do quadrado $OABC$ é a origem e o outro é o ponto $A = (2,3)$. Quais são as coordenadas dos pontos B e C? (Sempre que mencionarmos um polígono, letras adjacentes indicarão vértices adjacentes).

16. Calcular a área do triângulo ABC se $A = (-3,-1)$, $B = (0,4)$ e $C = (6,1)$.

17. Calcular o valor de m para que um paralelogramo $ABDC$, em que $A = (2,-1)$, $B = (4,2)$, $C = (m,m)$, tenha área igual a 12.

18. Prove que se A, B e C são os vértices dum triângulo e G é o seu baricentro (ponto de corte das medianas), então

$$\text{área}(ABC) = 3\text{área}(ABG).$$

19. Uma fazenda tem o formato de um quadrilátero que em um dado sistema de eixos cartesianos possui vértices $A = (0,0)$, $B = (1,4)$, $C = (5,1)$ e $D = (4,5)$. Calcule a área da fazenda.