Como o Geogebra aproxima o aluno do grande enigma do Polinômio de Taylor

Monitora: Nathália do N. Teodosio

Orientadora: Begoña Alarcón Cotillas

Índice

Resumo

Aula de hoje explicará de maneira geral como se usa os principais recursos do Geogebra e principalmente aquelas ferramentas que serão utilizadas para uma melhor compreensão do Polinômio de Taylor.

1. Serão apresentados os conhecimentos básicos sobre o Polinômio de Taylor.

2. O aluno aprenderá a esboçar o gráfico de uma função junto com alguns polinômios de Taylor de diversas ordens. Também será esboçado o intervalo ótimo de aproximação para os polinômios.

3. O aluno aprenderá a fazer uma animação que ilustrará a relação entre a ordem do Polinômio e a longitude do intervalo ótimo de aproximação.

4. Por último, serão discutidas questões que manifestam algumas características do Polinômio de Taylor.

O Polinômio de Taylor

<u>Definição</u>: Seja f uma função n vezes diferenciável em x_0, então definimos o enésimo polinômio de Taylor para f em torno de x_0 como sendo: $Pn(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x}{n!}$$

Chamado de notação Sigma.

Ou ainda:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(f^{(k)}(0))}{(k!)}\right)(x - x_0)^k$$

No caso em que $x_0=0$, o Polinômio de Taylor é chamado de Polinômio de Maclaurin.

<u>Teorema de Taylor</u>: Se f for diferenciável até ordem n+1 em um intervalo I que contém x e x_0, então existe um c entre x e x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

Polinômio　　　　　　　　Resto

<u>Definição</u>: O resto de ordem n associado a f em x_0 como sendo Rn(x)=f(x)-P(x).

Esse Teorema é usado para aproximar o valor desconhecido de f(x) pelo Polinômio de Taylor Pn(x), Lembrando que F(x)≈P(x)

<u>Exemplo</u>: Aproxime $\sqrt{1,3}$ com uma função quadrática.

Seja $f(x)=\sqrt{(1+x)}$, $x_0=0$ e $x=0,3$

$$P_2(0,3) = f(0) + f'(0)(0,3-0) + \frac{f''(0)}{2!}(0,3-0)^2$$

$R_2(0.3) = \frac{f'''(c)}{3!}(0.3-0)^3$, onde c é um ponto que pertence ao intervalo (0;0.3) .

Além disso, é possível calcular qual o intervalo I ótimo de aproximação de uma função f pelo polinômio de Taylor de ordem n com as casa decimais exatas.

<u>Exemplo</u>: Encontrar o intervalo ótimo de aproximação de f(x), no qual o polinômio de Maclaurin($x_0=0$) de ordem 2 que aproxima a função f(x)=cos(x),considera-se I=(-a,a), com erro menor que 10^{-2} (isto é, precisão de 2 dígitos).

1) O polinômio de MacLaurin de ordem 2 é:

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ ou: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

2) O erro segundo o polinômio de Taylor é:

$\frac{f'''(c)}{6}x^3$ ou: $\frac{sen(c)}{6}x^3$, para algum c ∈(0,x) se x>0 ou (x,0)se x<0. Esse erro deve ser menor que 10^{-2}, $\forall$ x ∈ I.

Sabe-se também que :

$|R_2(x)| = \left|\frac{sen(c)}{6}x^3\right| \leq \frac{|sen(c)|}{6}a^3$ para todo $|x| \leq$ a (já que x^3 é estritamente crescente em I $x^3 \leq a^3$)

Já que $|sen(c)| \leq 1, \forall c \in R$, temos:

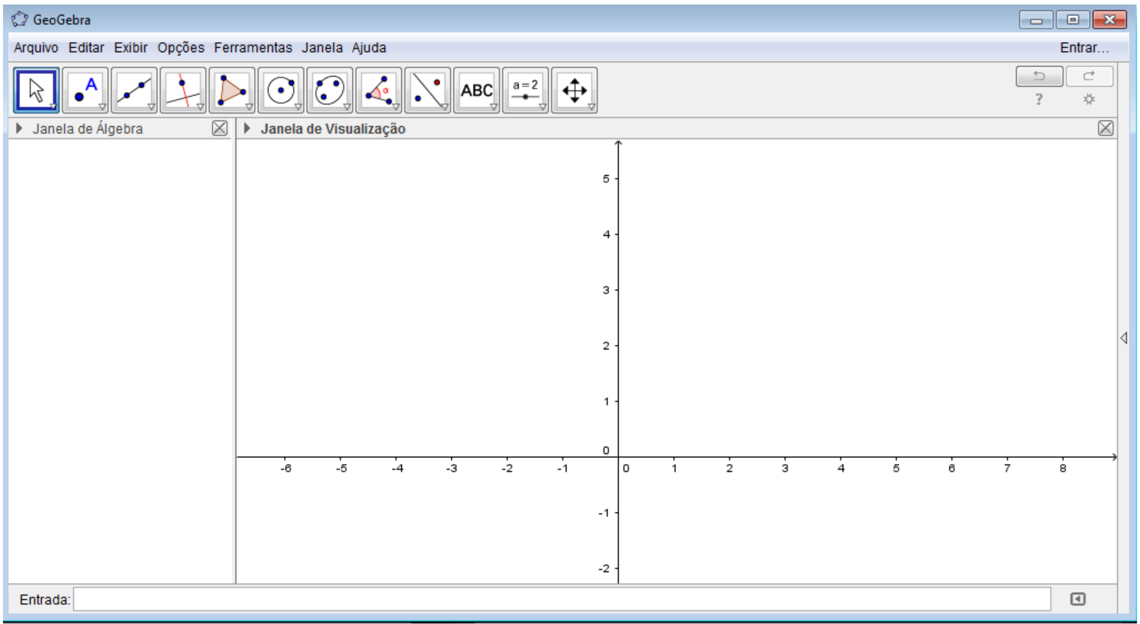
$\frac{1}{6}a^3 \leq 10^{-2} \rightarrow a^3 \leq 0{,}06 \rightarrow a \leq \sqrt[3]{0{,}06} \rightarrow a \leq 0{,}4$

Portanto o intervalo ótimo é de [-0.4,0.4] (centrado em 0)

O Geogebra

Esta é a tela principal do Geogebra.

Começamos pelos componentes dessa tela.



A tela principal é a graduada, a "Janela de visualização" onde se tem a representação gráfica das funções inseridas em Entrada na parte inferior da janela.

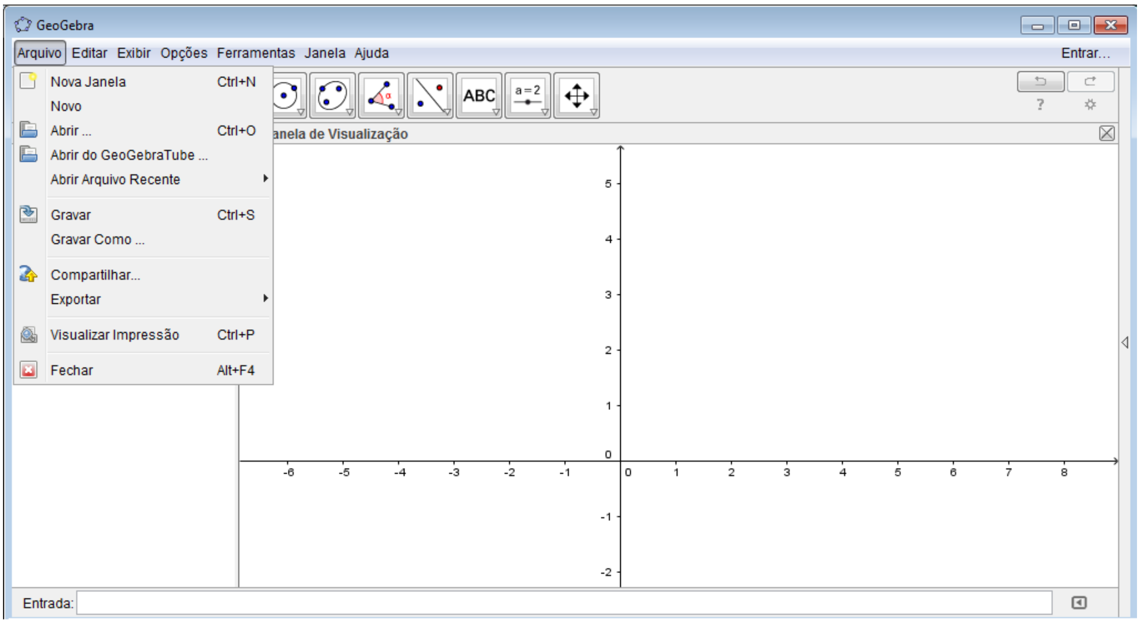
A tela branca na lateral esquerda, "Janela Algébrica", como o próprio nome diz, mostra as equações e funções daquilo que foi inserido em entrada.

Na entrada inserem-se funções, equações e inúmeros tipos de operações.

Na parte de cima há dois menus importantes.

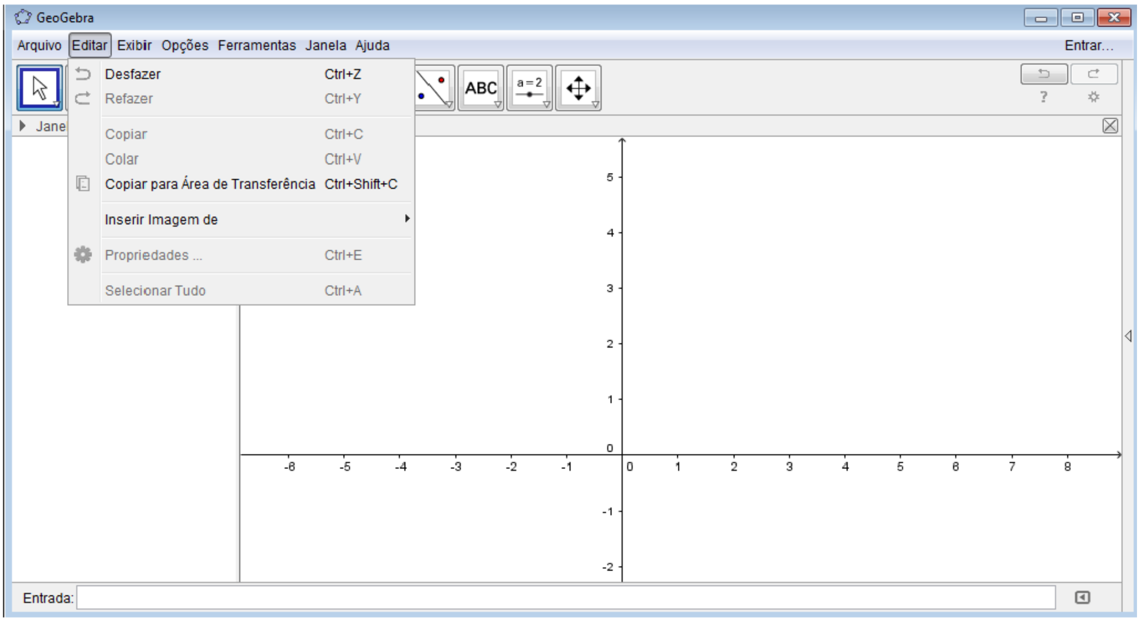
Primeiro Menu

- Em "Arquivo" temos algumas opções comuns a vários programas, como criar novo documento, abrir algum arquivo a ser utilizado, gravar, etc. Algumas opções interessantes são:
- Abrir do GeogebraTube: uma biblioteca de imagens e animações que podem ser úteis em muitos trabalhos
- Exportar para usar o que foi criado no Geogebra em diversas outras plataformas, como Word.

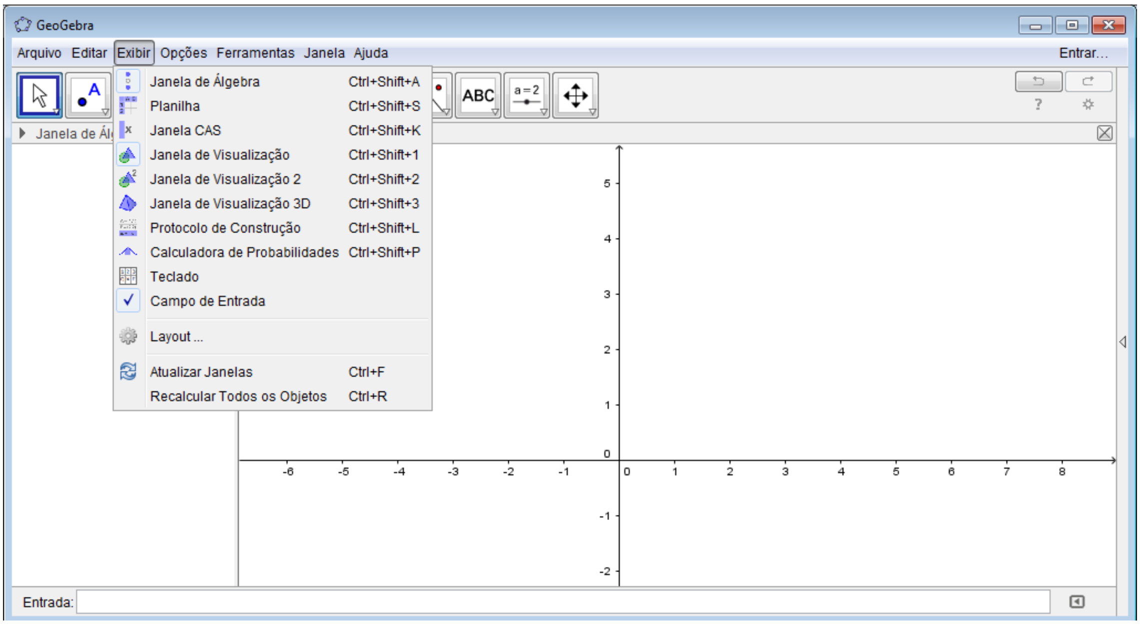



GeoGebra
Arquivo Editar Exibir
Janela de Álgebra
Entrada:
Abrir do GeoGebraTube
GeoGebraTube
Search
Isosceles Triangles - Examples and Non-Examples
Chris Bolognese
Involute profile
Xabier Iriarte
Falkirk Wheel (Scotland)
Michael Borcherds
Entrar...

- Em editar:


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Desfazer Ctrl+Z
Refazer Ctrl+Y
Copiar Ctrl+C
Colar Ctrl+V
Copiar para Área de Transferência Ctrl+Shift+C
Inserir Imagem de
Propriedades ... Ctrl+E
Selecionar Tudo Ctrl+A
ABC
Entrada:

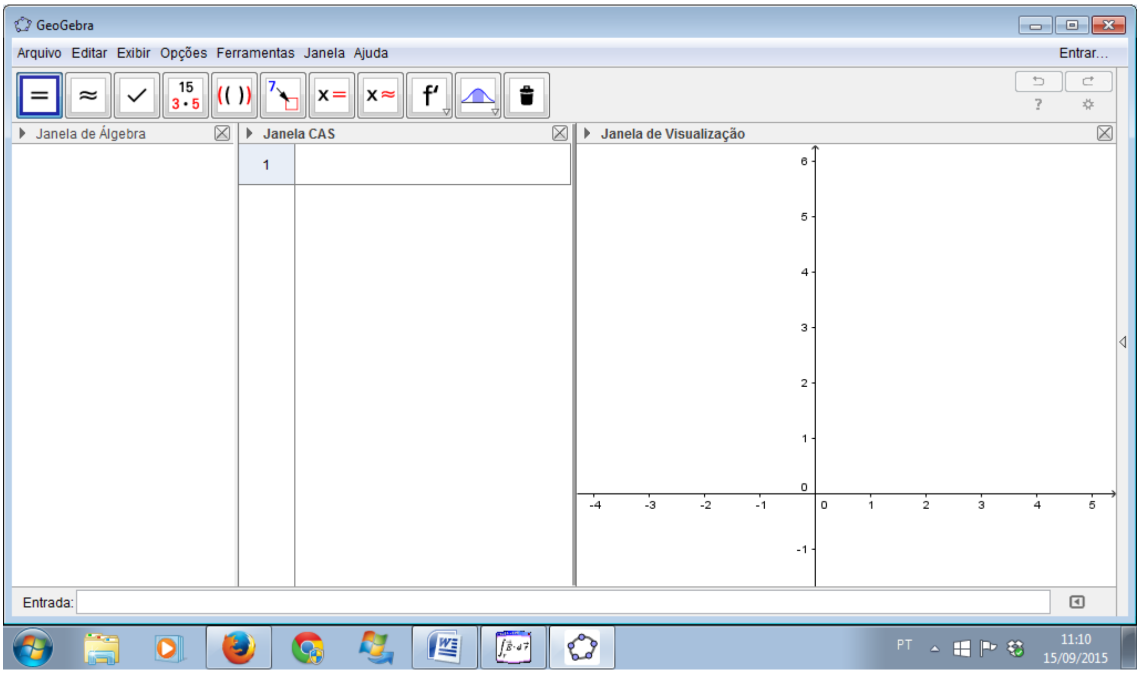
- No menu exibir:



A opção Planilha é voltada para Estatística e Probabilidade, esboço de linhas de tendência ou regressão.

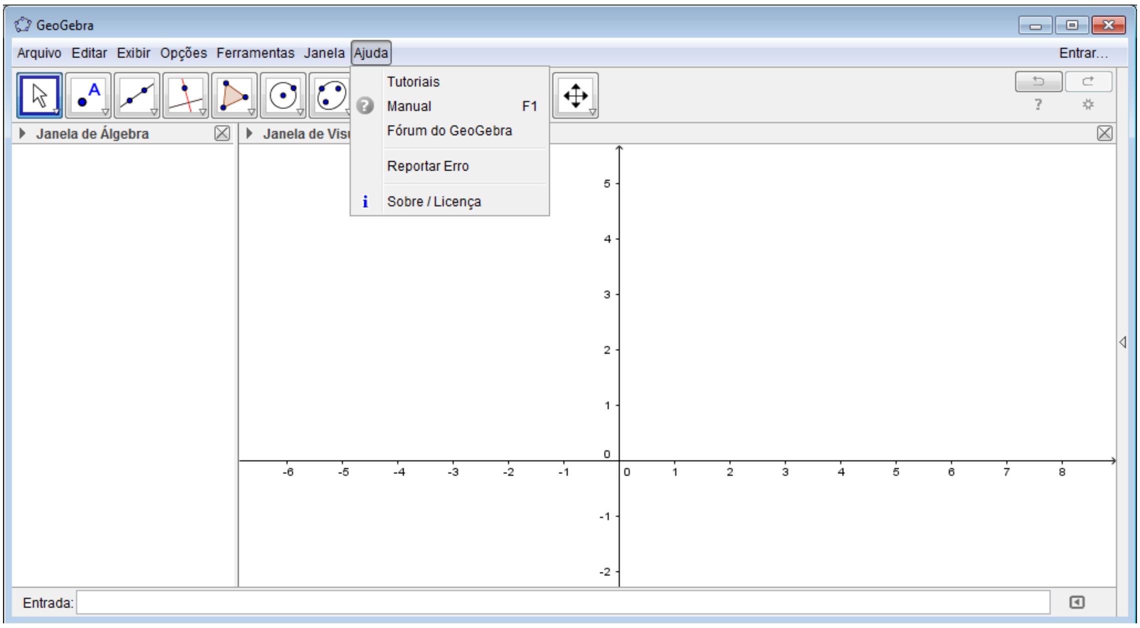
A janela CAS (Cálculo Simbólico) é uma ferramenta importante para quem quer aprender a mexer no Geogebra por apresentar múltiplas funcionalidades para cálculos que envolvem constantes desconhecidas.

Ao abrir a Janela CAS, aparece a seguinte tela:



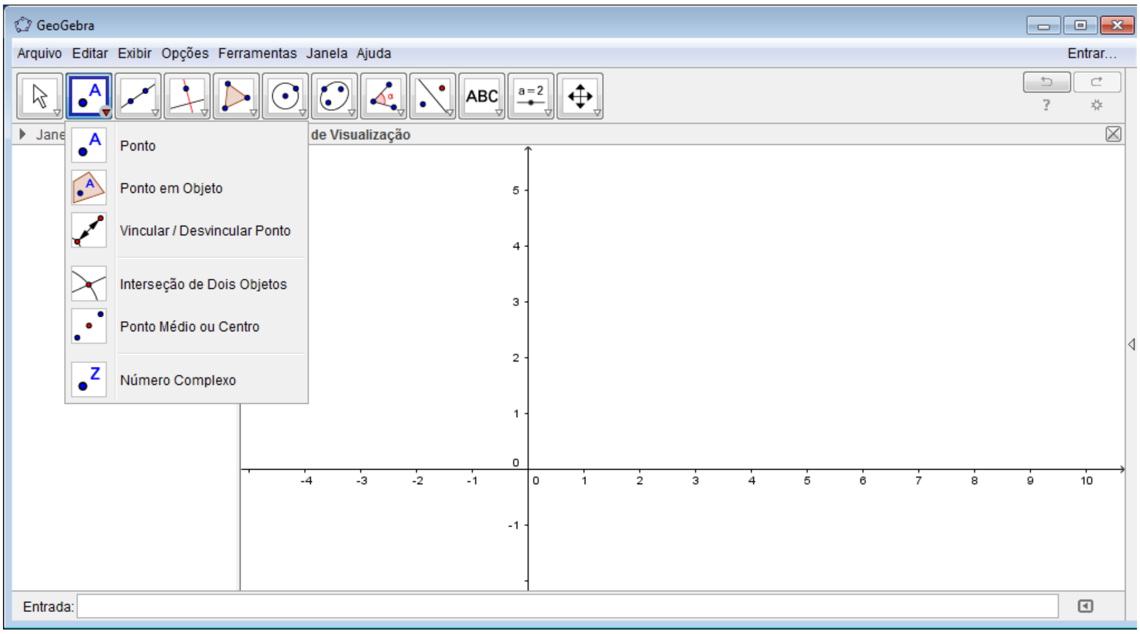
Observe que o menu situado abaixo do primeiro (chamado Menu Algébrico e que ainda não foi explicado) é substituído por um menu da Janela CAS, esse menu mostra as principais funções dessa janela. Observe ainda que a mesma possui o que chamamos de divisão em células (na imagem aparece a célula 1). Ela funciona de forma que a o digitar um comando numérico ou algébrico o processamento interno do programa realiza os cálculos e retorna uma saída. De modo geral, a Janela CAS tem o mesmo objetivo da janela de Entrada, porém possui maiores opções de operações.

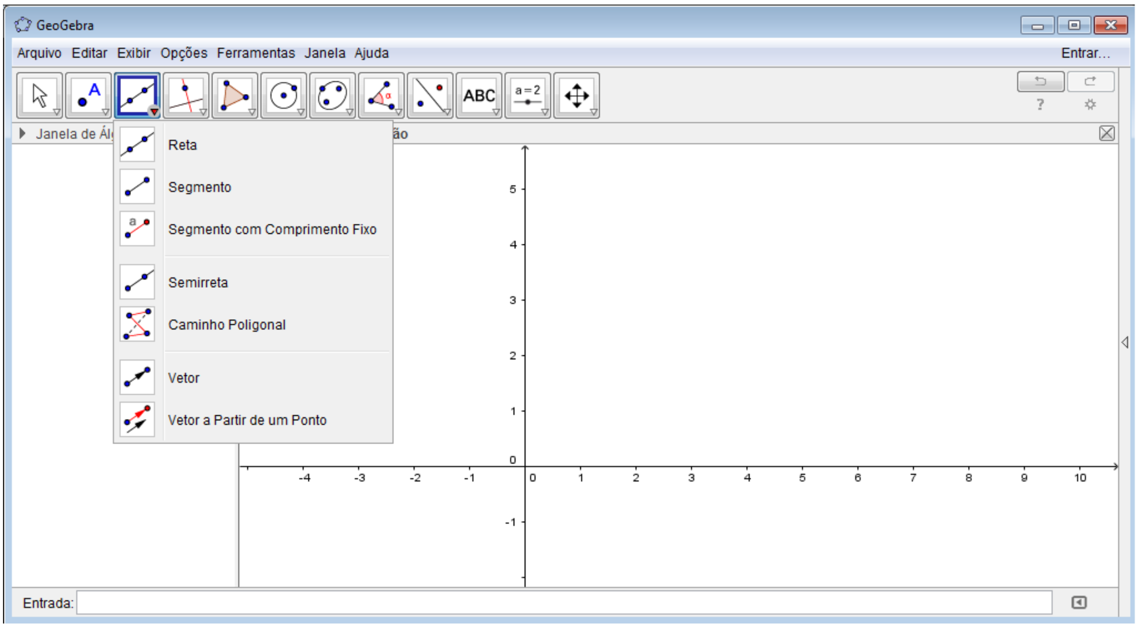
- O menu Ajuda pode ser interessante até mesmo para não iniciantes. Ele possui tutoriais que explicam como realizar várias tarefas, exibe manuais com comandos e fórum de discussões.

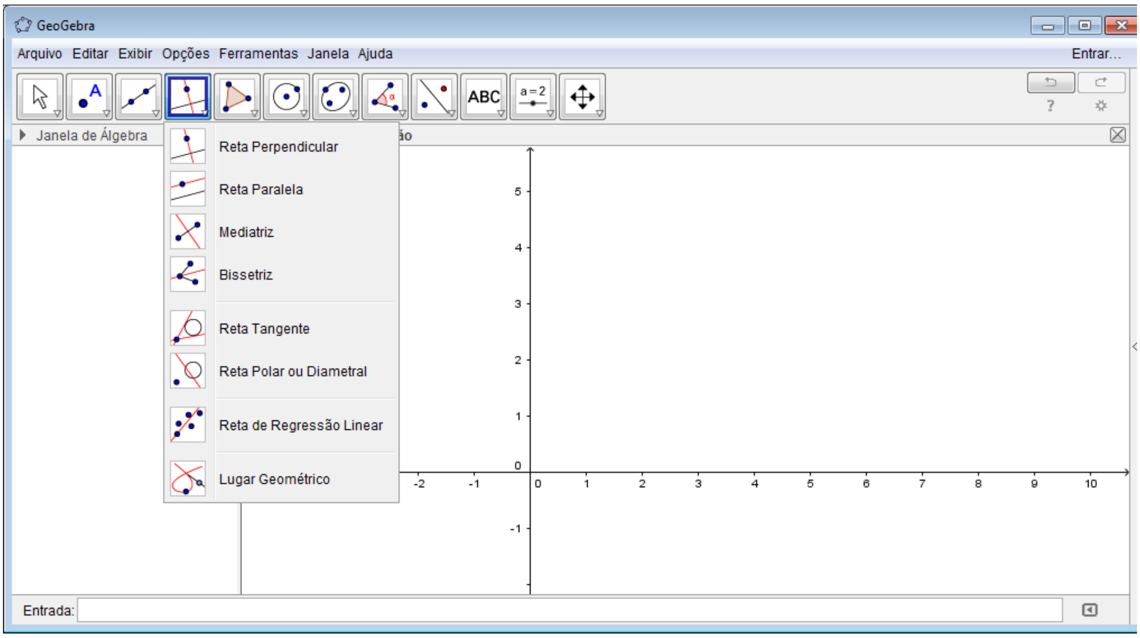


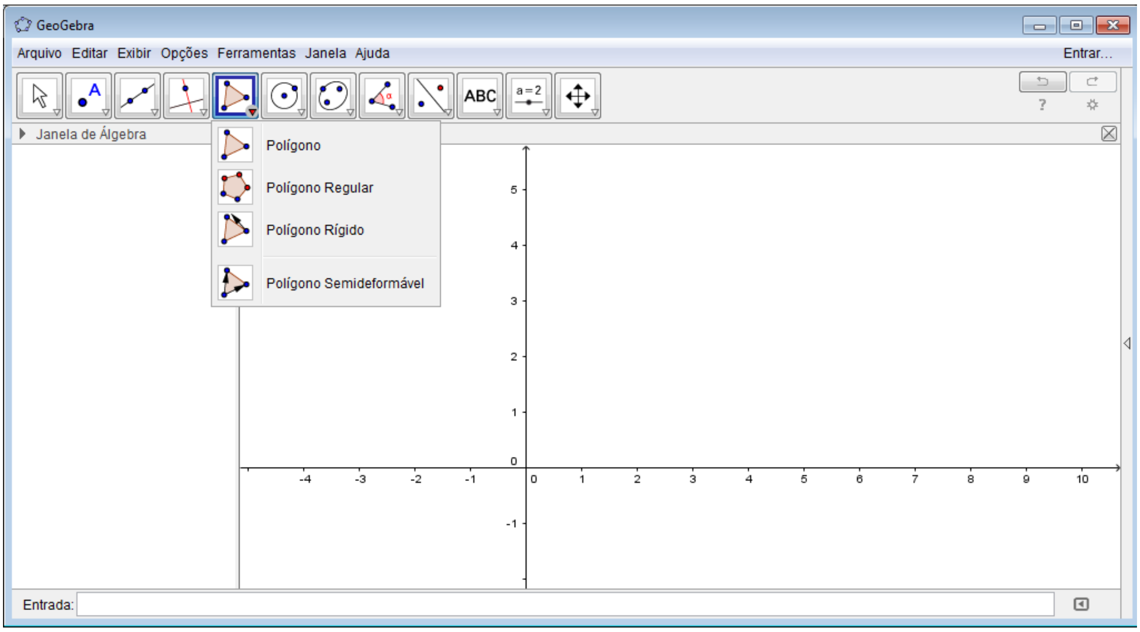
Segundo Menu (Ou Menu Algébrico):

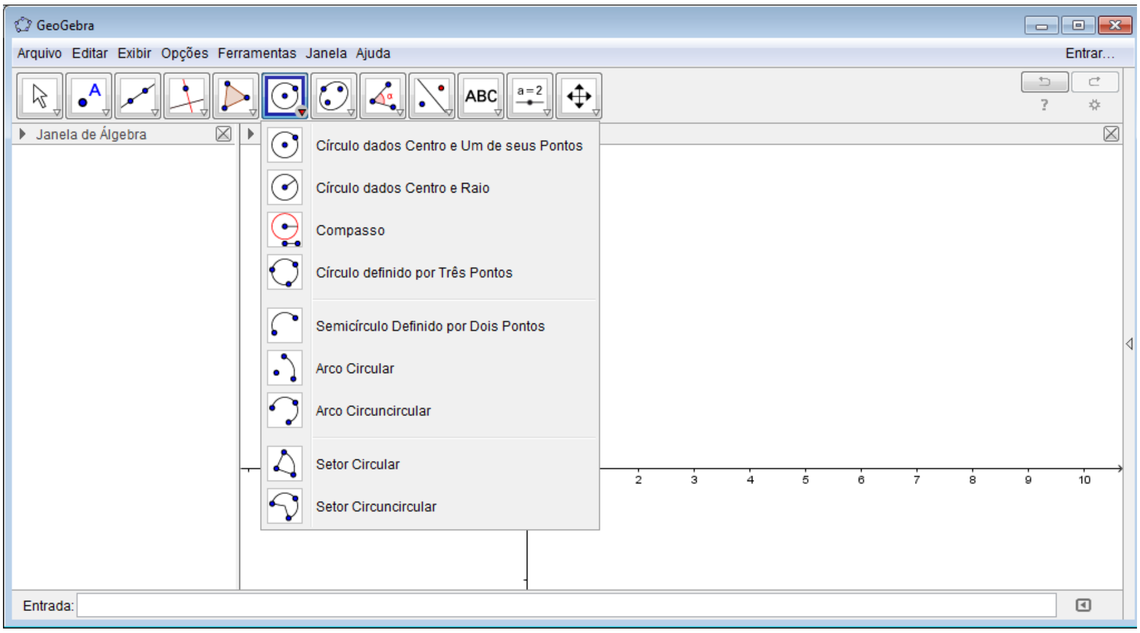
Há várias opções de construção geométrica a mão livre. Os desenhos, dicas e nomes já são autoexplicativos, veja as imagens a seguir:

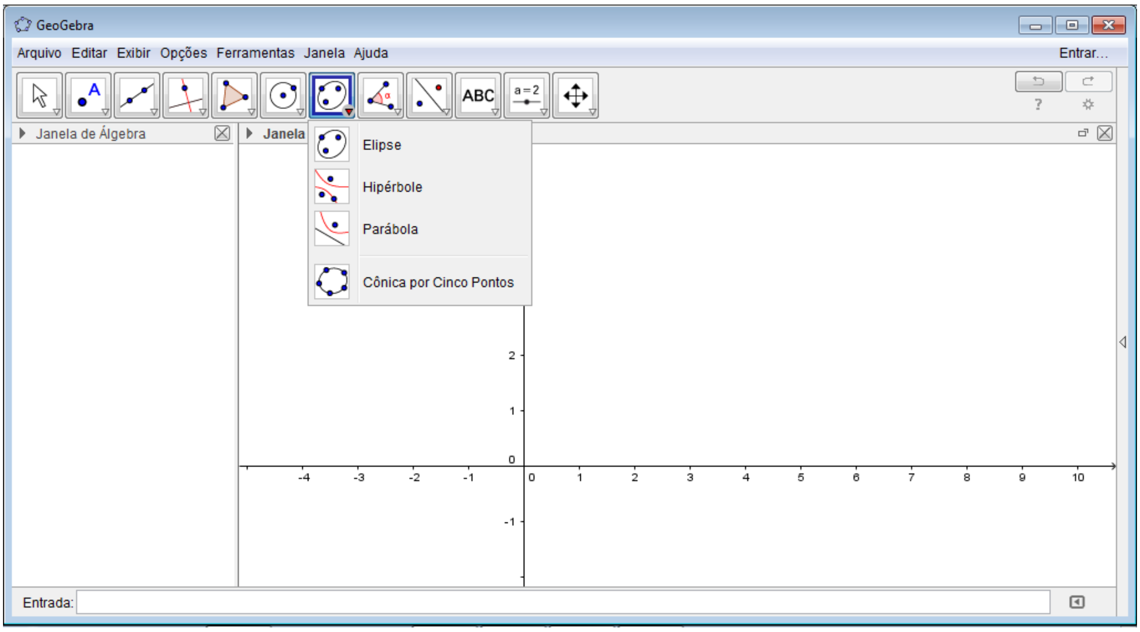

GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Ponto
Ponto em Objeto
Vincular / Desvincular Ponto
Interseção de Dois Objetos
Ponto Médio ou Centro
Número Complexo
de Visualização
Entrada:

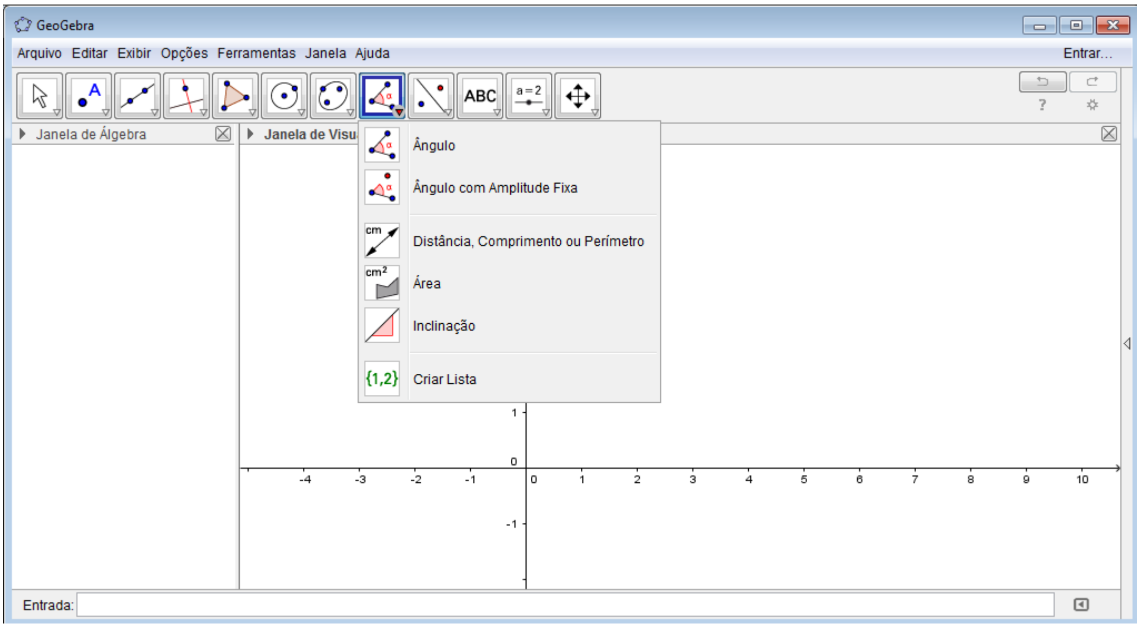

GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Reta
Segmento
Segmento com Comprimento Fixo
Semirreta
Caminho Poligonal
Vetor
Vetor a Partir de um Ponto
Entrada:

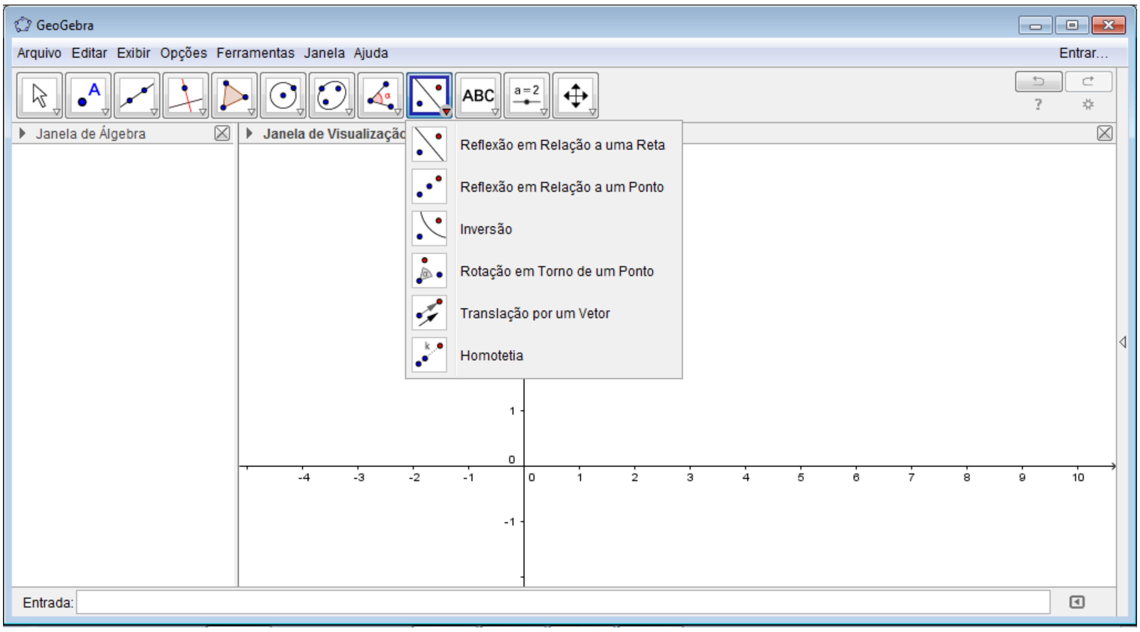

GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Reta Perpendicular
Reta Paralela
Mediatriz
Bissetriz
Reta Tangente
Reta Polar ou Diametral
Reta de Regressão Linear
Lugar Geométrico
Entrada:


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Polígono
Polígono Regular
Polígono Rígido
Polígono Semideformável
Entrada:

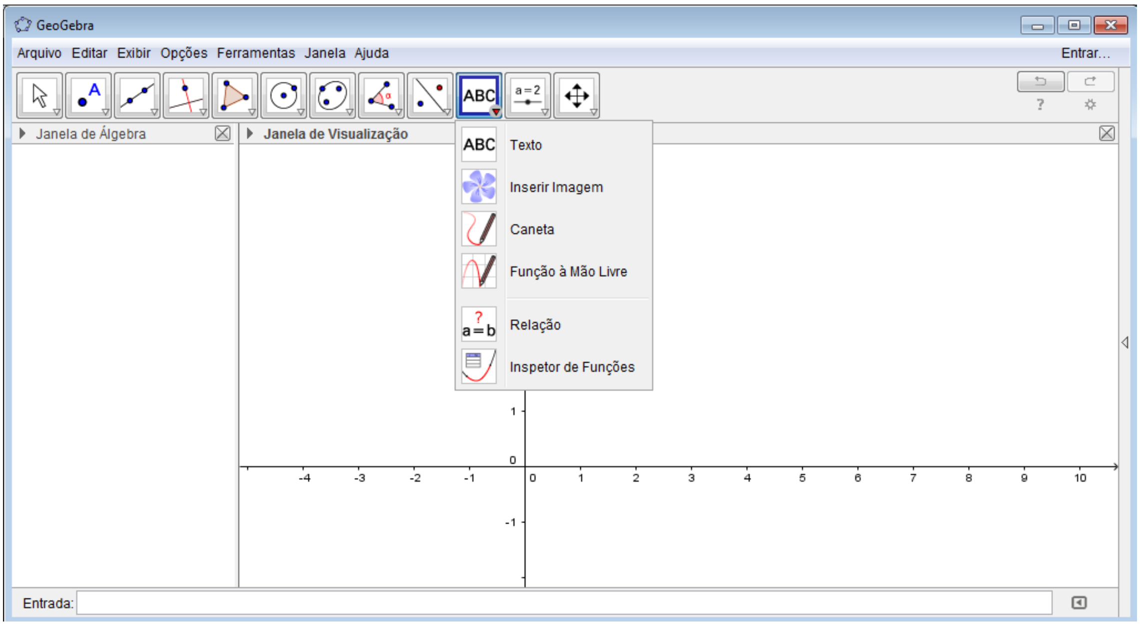

GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Janela de Álgebra
Círculo dados Centro e Um de seus Pontos
Círculo dados Centro e Raio
Compasso
Círculo definido por Três Pontos
Semicírculo Definido por Dois Pontos
Arco Circular
Arco Circuncircular
Setor Circular
Setor Circuncircular
Entrada:


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Janela de Álgebra
Elipse
Hipérbole
Parábola
Cônica por Cinco Pontos
Entrada:

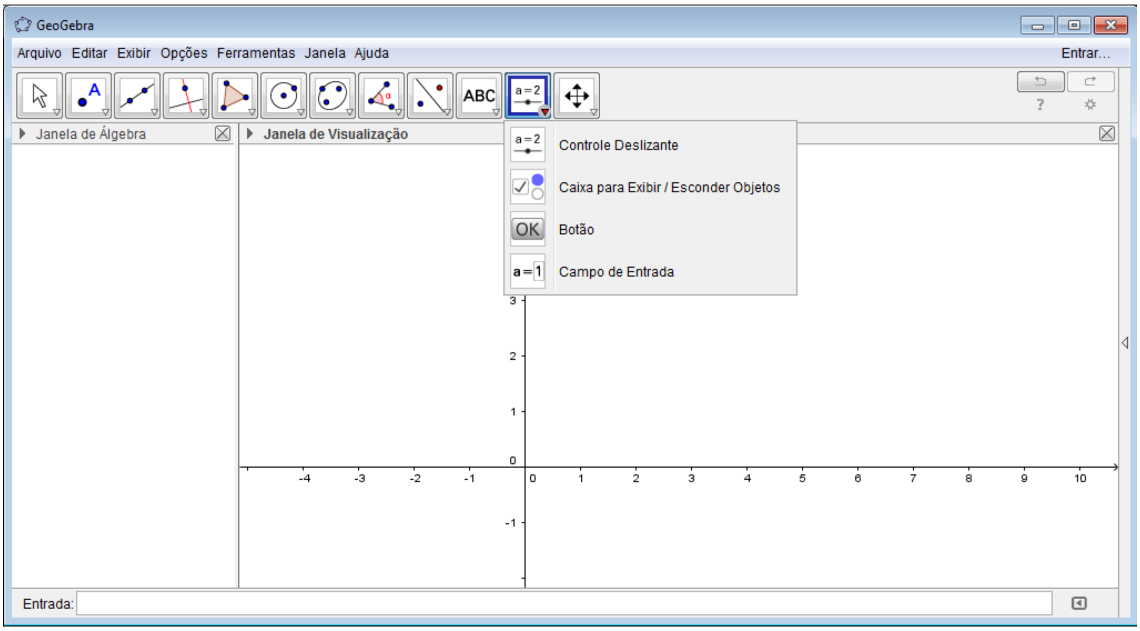

GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Janela de Visu
Ângulo
Ângulo com Amplitude Fixa
Distância, Comprimento ou Perímetro
Área
Inclinação
{1,2}
Criar Lista
Entrada:


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
a=2
Janela de Álgebra
Janela de Visualizaçã
Reflexão em Relação a uma Reta
Reflexão em Relação a um Ponto
Inversão
Rotação em Torno de um Ponto
Translação por um Vetor
Homotetia
Entrada:

No submenu “ABC” é possível criar legendas, e criar funções a mão livre (interessante quando você tem o desenho da função, mas não sabe a sua forma algébrica) Esse submenu, e o da figura seguinte serão utilizados nas construções para Polinômio de Taylor.



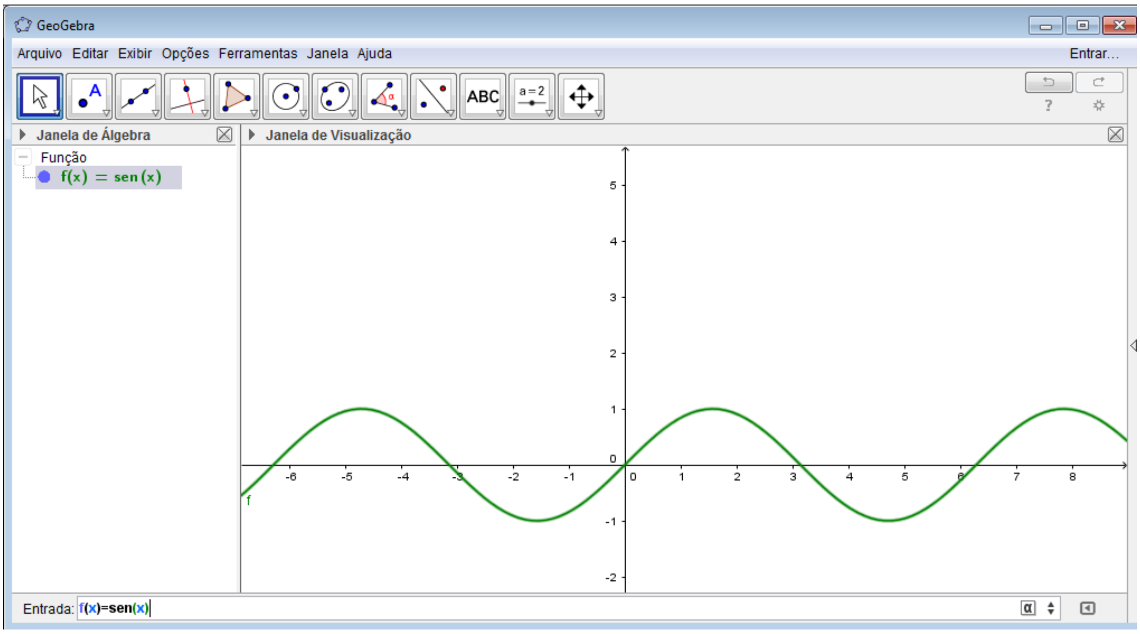
Criação de botão deslizante:



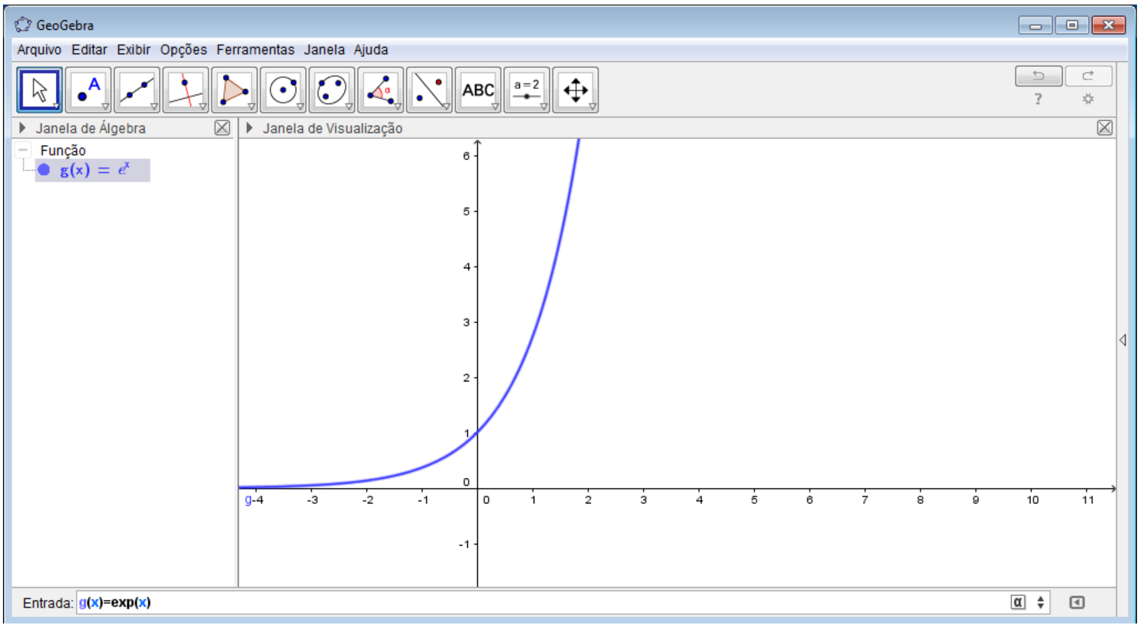
A prática parte 1

Exemplo:

Começamos inserindo uma função qualquer, para isso basta escrever a função no campo "entrada" no inferior da tela, lembrando-se de nomeá-la (f(x)). Por exemplo:

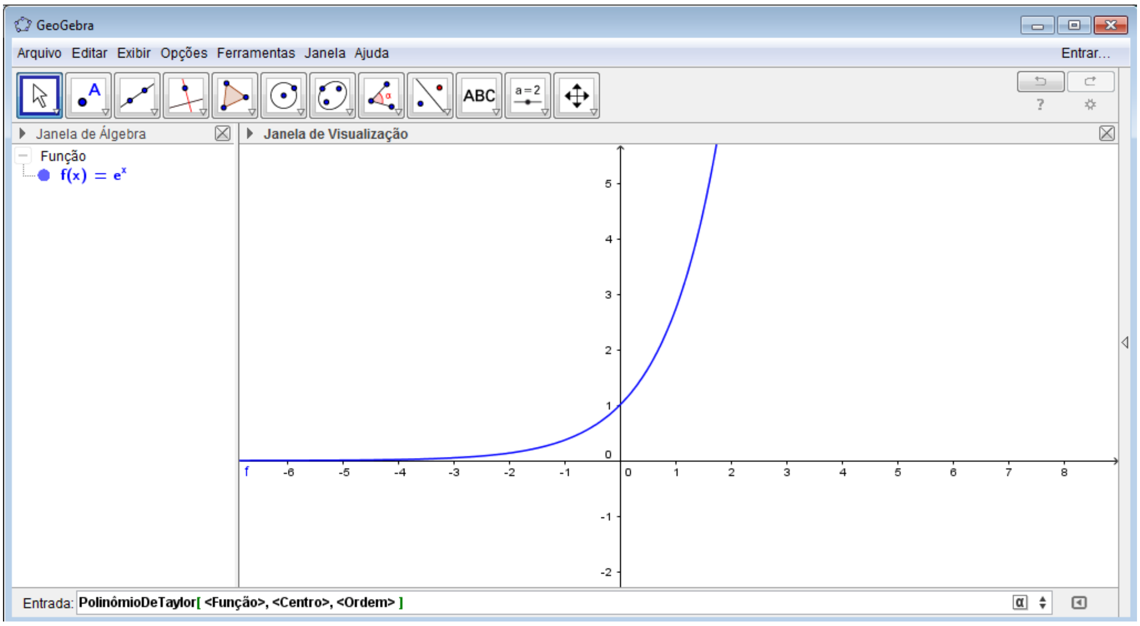


Outro exemplo, que usaremos para o propósito do Polinômio de Taylor:

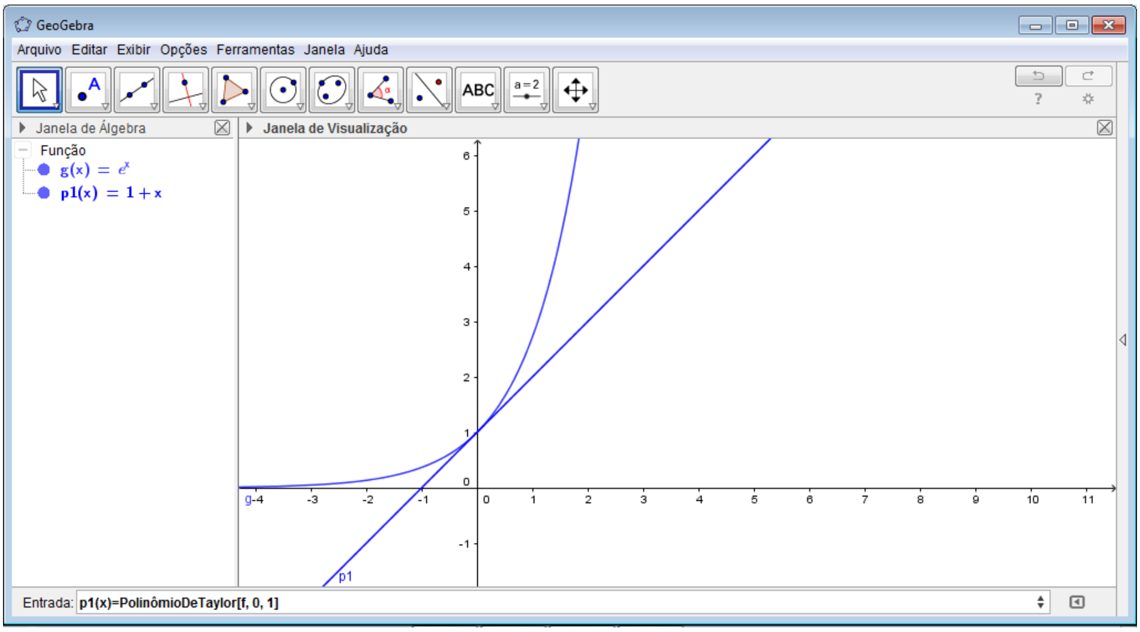


Parte 1: Como gerar o Polinômio de Taylor

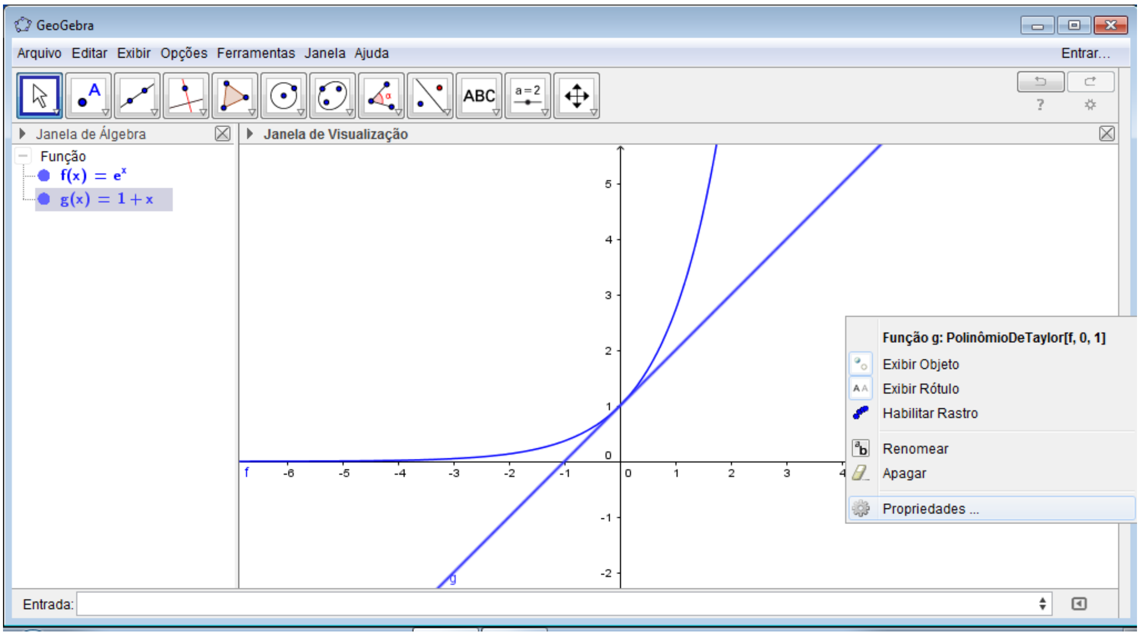
Para gerar o Polinômio de Taylor basta pôr o comando abaixo:

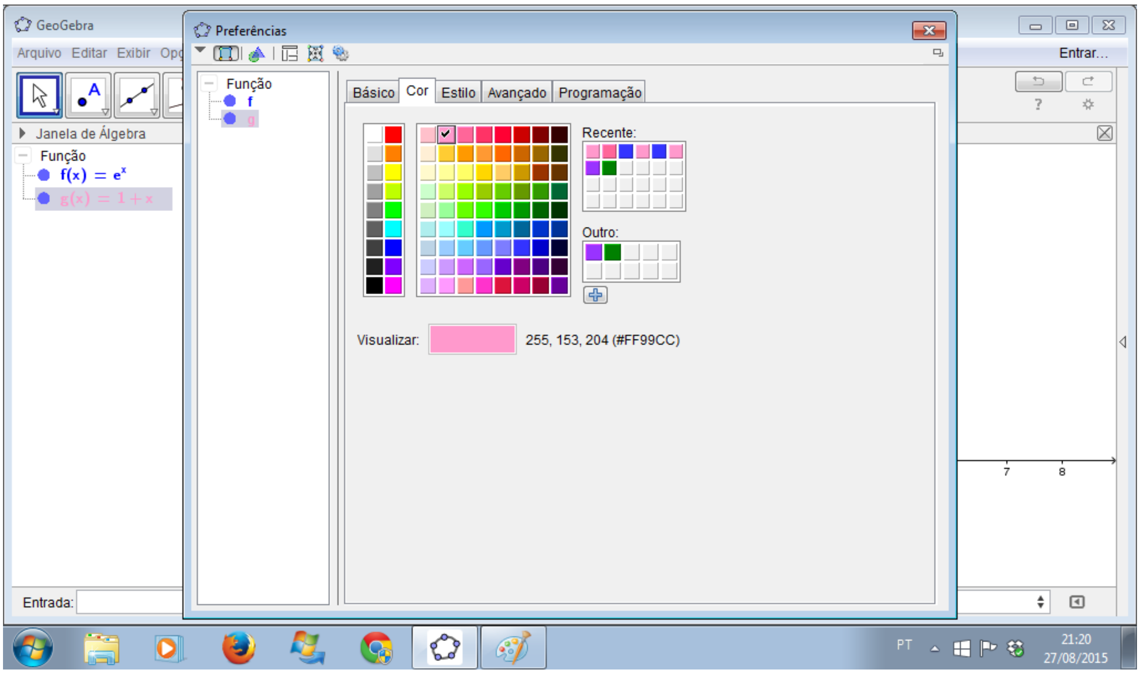


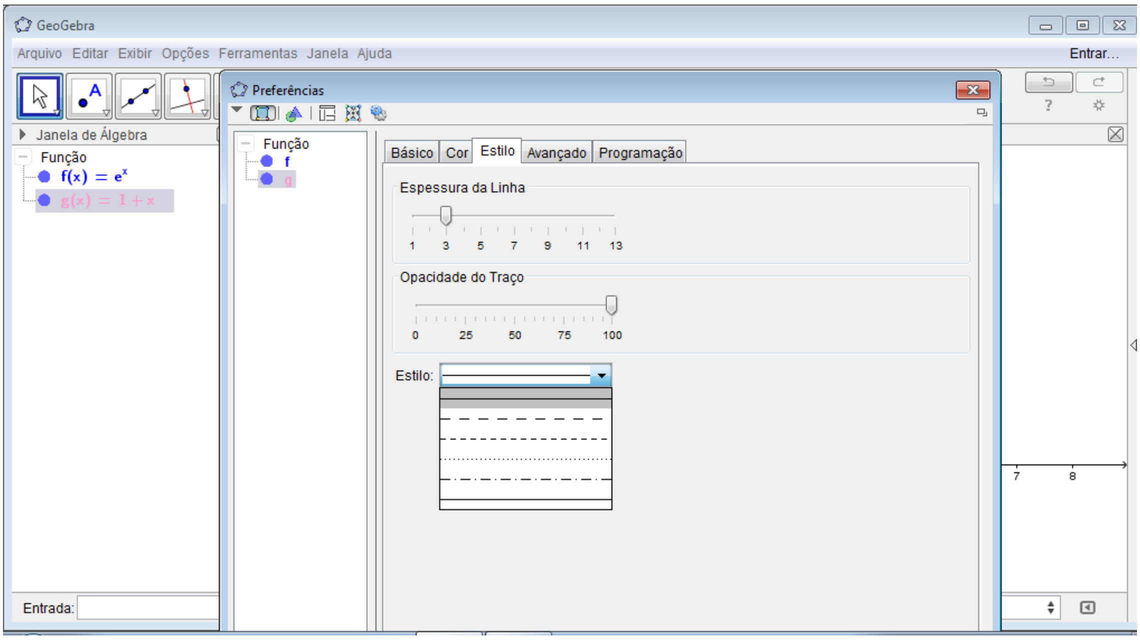
Completando com g, 0,1, cria-se o Polinômio de Taylor de grau 1.

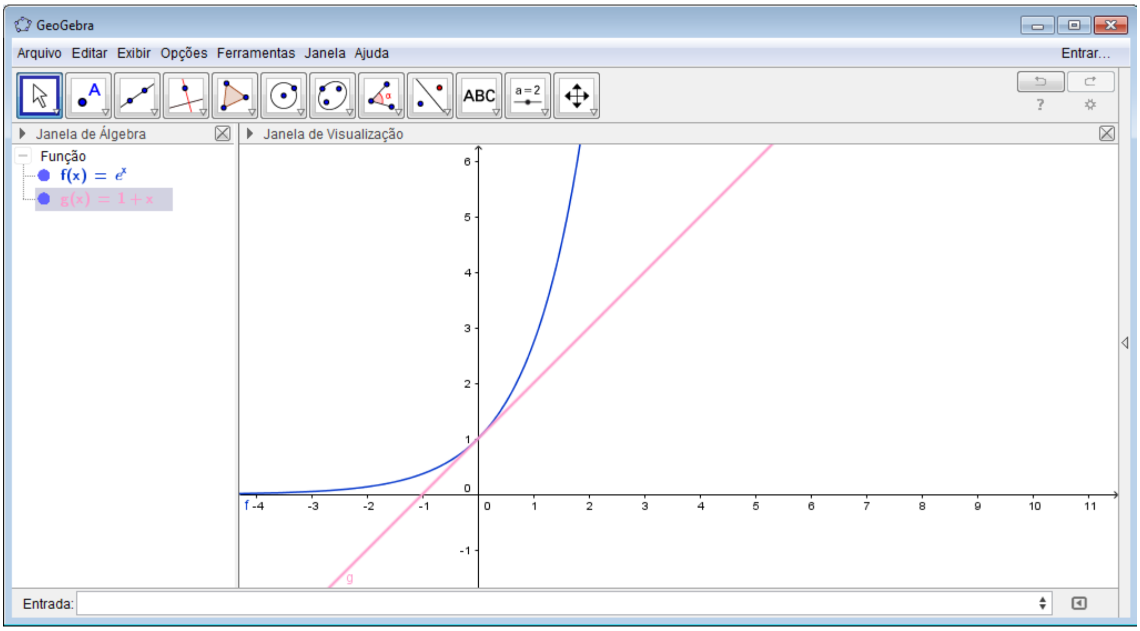


Clicando com o botão direito com uma função selecionada, há opções de mudança de cor e estilo das linhas

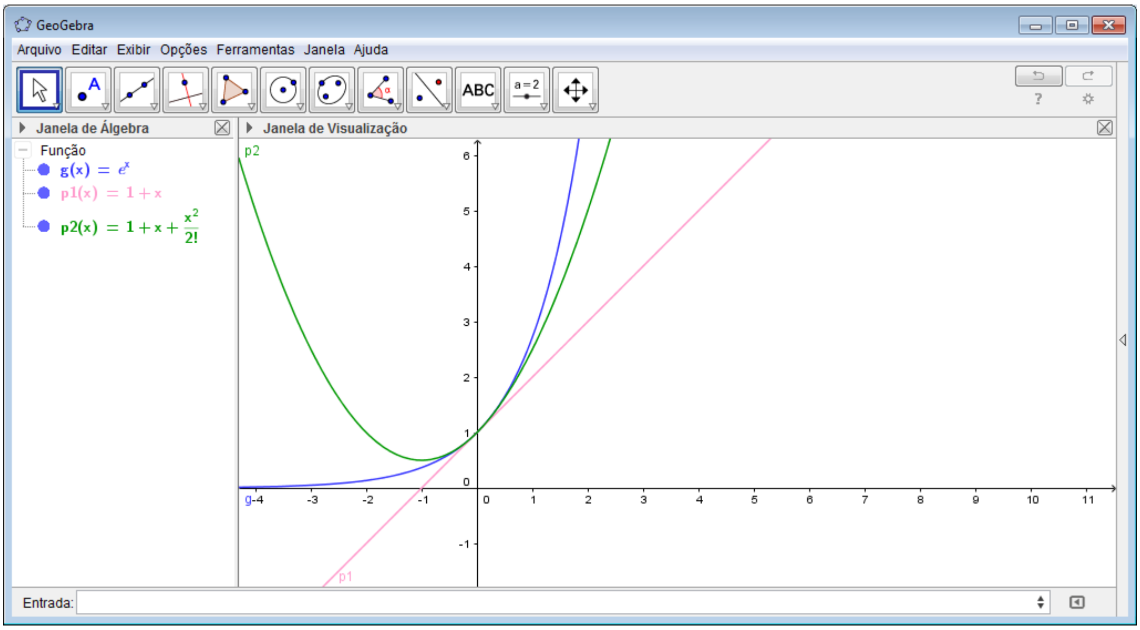


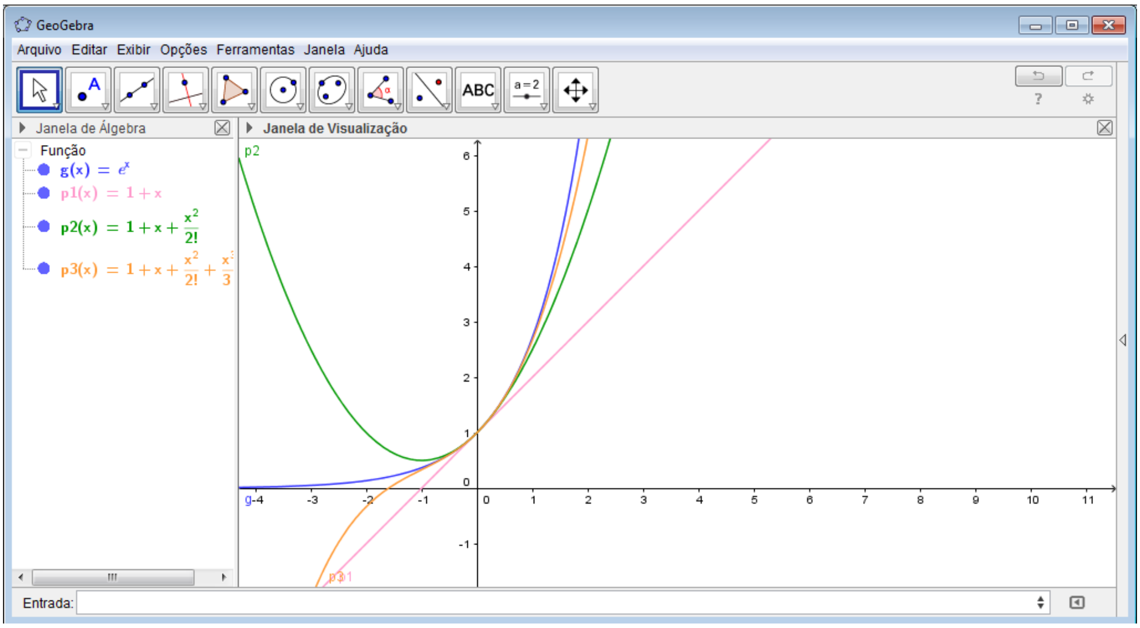




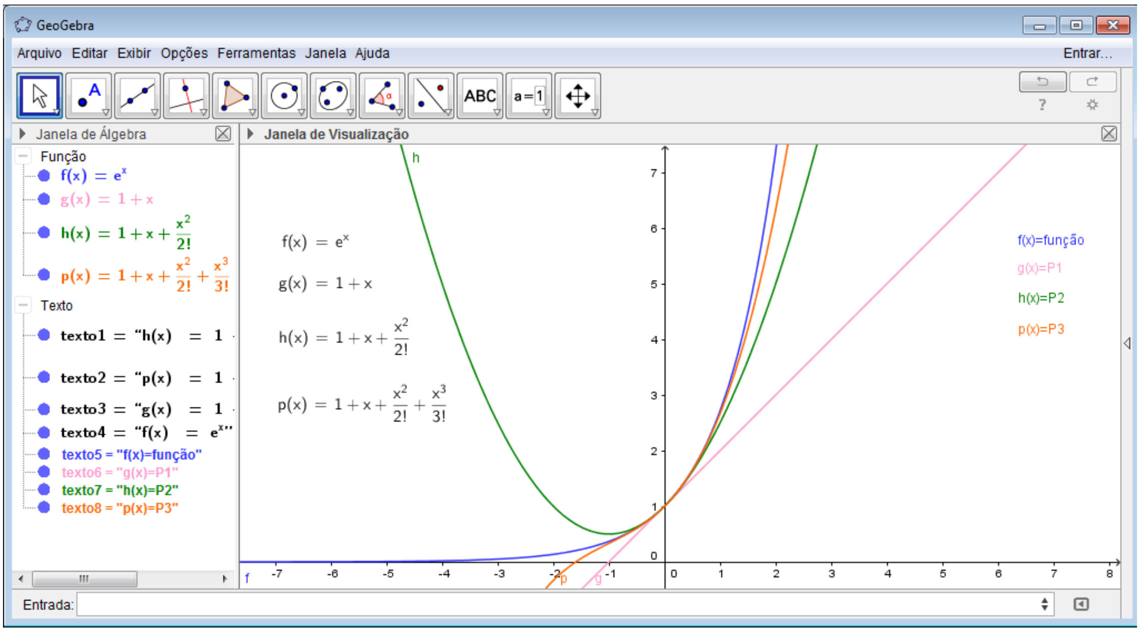


Seguindo adiante, temos o Polinômio de ordem 2 e 3:





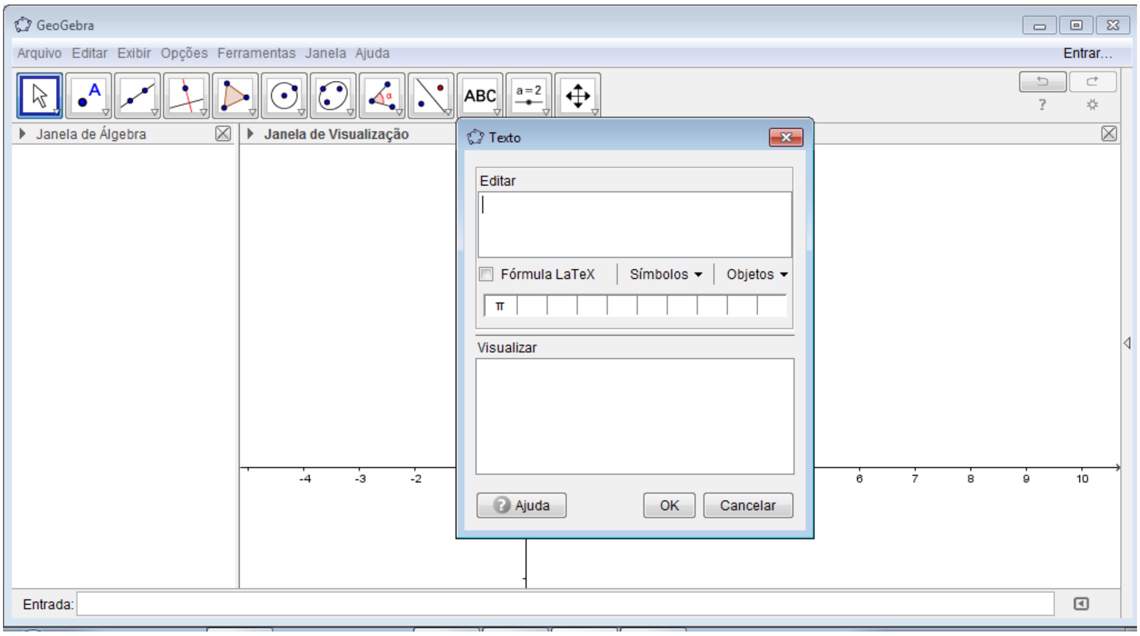
Para confeccionar legendas, como na imagem seguinte, temos duas formas:



1) Simplesmente arrastando a função da Janela de Álgebra para a Janela de visualização, como as legendas da esquerda;

2) Clicando no menu “ABC” e depois inserir texto, como as legendas da direita.

Aparecerá a seguinte tela:



Quem souber editar texto em LaTex, é só clicar no quadrado de Fórmula LaTex e aplicar a linguagem.

Tarefas:

1) Calcular o intervalo ótimo de aproximação com a função f(x) =cos(x) em $x_0=0$:

a) Para grau 1

b) Para grau 2

c) Para Grau 3

d) Para Grau 4

2) Compare os intervalos obtidos com o grau do polinômio, qual a relação entre eles?

3) Com qual polinômio se aproxima melhor cos(0,6)? E cos(0,8)?

4)Criar uma imagem com a função f (x)=argcosh(x) e os polinômios de Taylor centrado em $x_0=2$, até grau 4, com cores diferentes e legendadas.

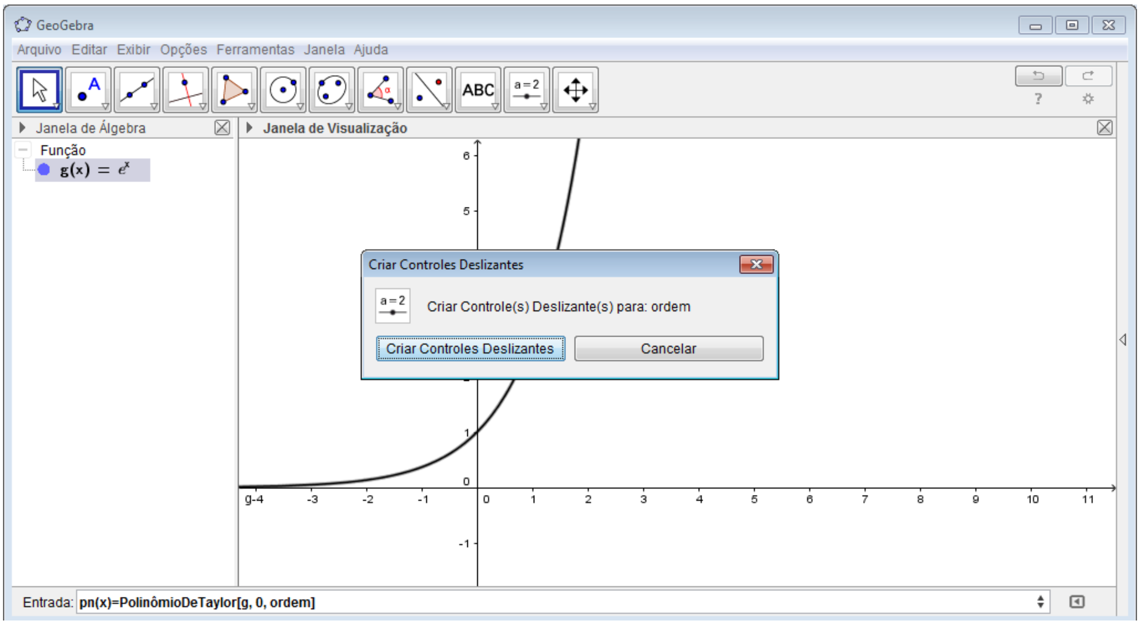
5) Calcular o intervalo ótimo de aproximação com o Polinômio de Taylor de ordem 1 , com erro menos que 10^{-2} e representar.

6) Construa a função f(x)=sen(x), juntamente com os poliômios de ordem 1,2,3,4 e responda: Qual a diferença entre grau e ordem?

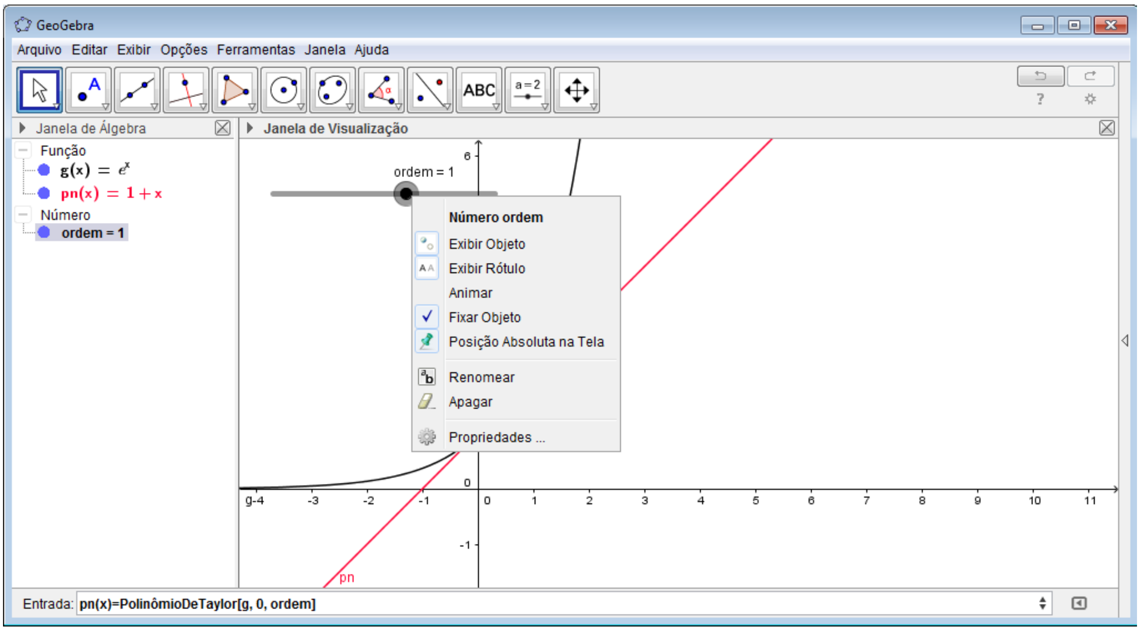
A prática parte 2

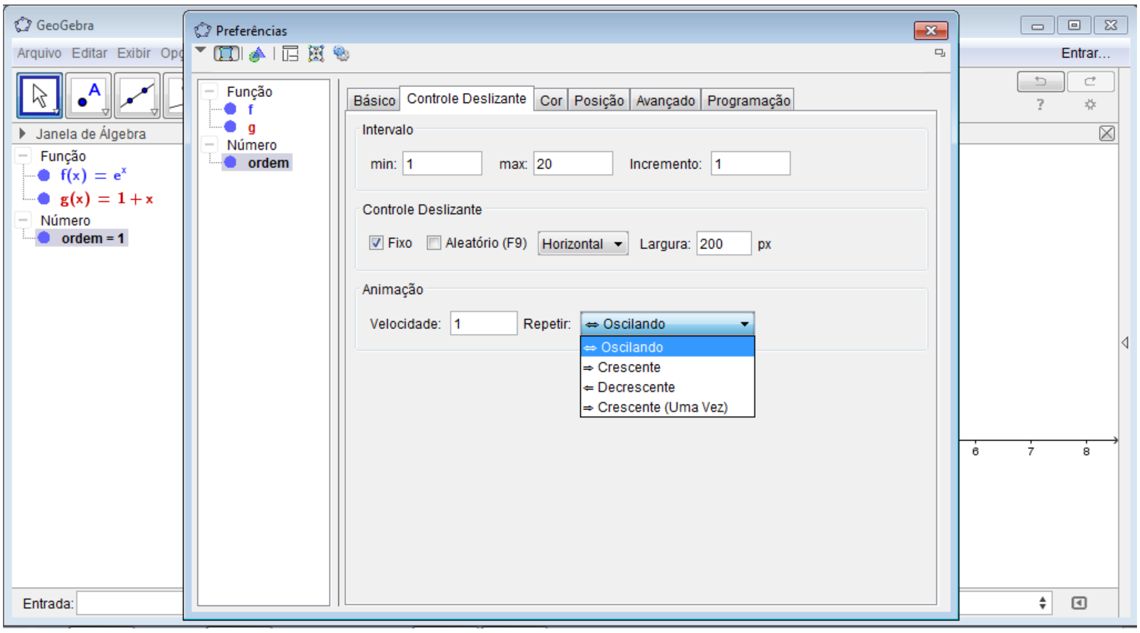
Agora, vamos fazer uma animação GIF com os diferentes graus de polinômio:

Primeiro criar o polinômio com ordem genérica, por exemplo, ordem. Assim que for criado,aparecerá uma tela automaticamente pra você criar um controle deslizante para ordem.

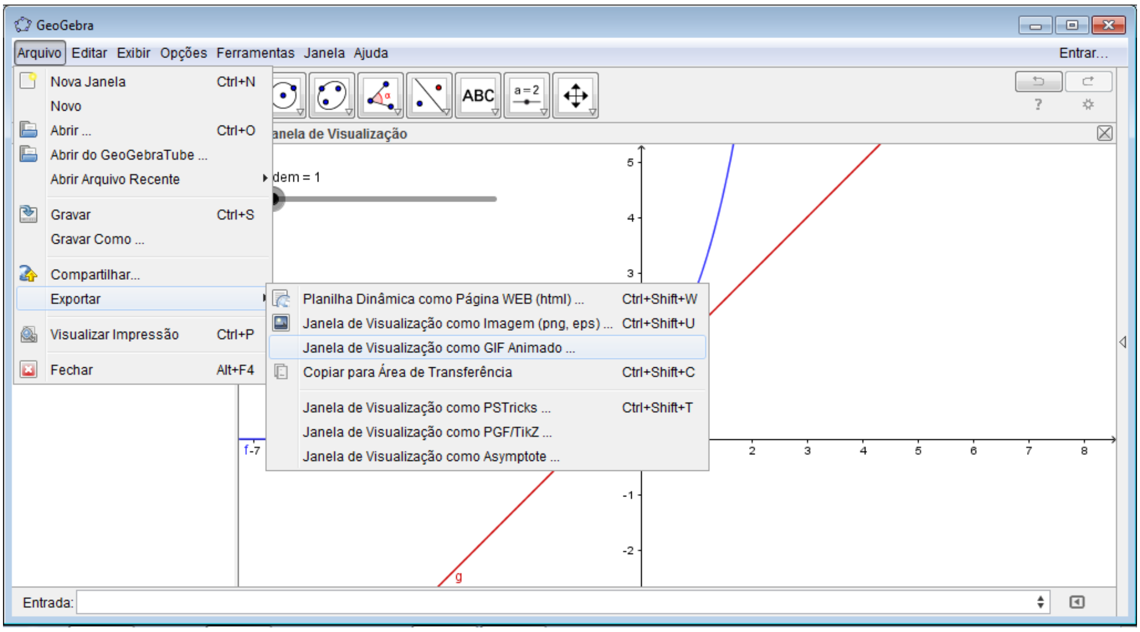


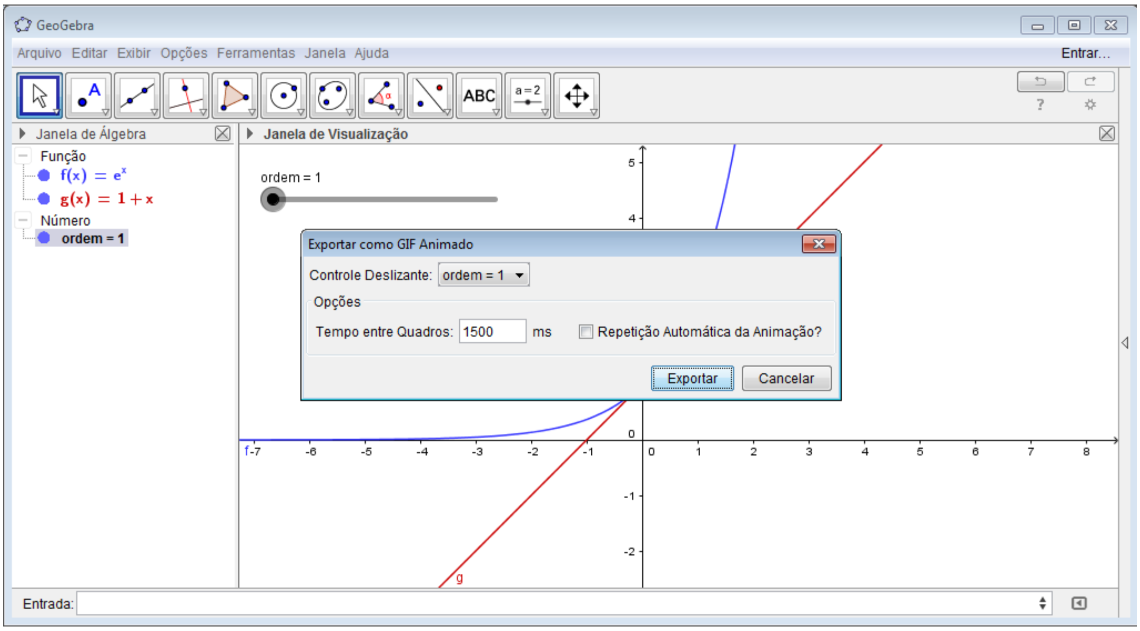
Porém, ele será criado de acordo com o padrão do programa, que não é próprio pro polinômio de taylor. Clicar no botão direito do mouse , e depois em configurações. Nessa tela é possivel mudar o intervalo do controle, a variação (incremento) o estilo do controle e da animação.


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Janela de Álgebra
Função
g(x) = eˣ
pn(x) = 1 + x
Número
ordem = 1
Janela de Visualização
ordem = 1
Número ordem
Exibir Objeto
Exibir Rótulo
Animar
Fixar Objeto
Posição Absoluta na Tela
Renomear
Apagar
Propriedades ...
pn
Entrada: pn(x)=PolinômioDeTaylor[g, 0, ordem]


Preferências
Função
f
g
Número
ordem
Básico
Controle Deslizante
Cor
Posição
Avançado
Programação
Intervalo
min: 1
max: 20
Incremento: 1
Controle Deslizante
Fixo
Aleatório (F9)
Horizontal
Largura: 200 px
Animação
Velocidade: 1
Repetir: Oscilando
Oscilando
Crescente
Decrescente
Crescente (Uma Vez)

A mudança depende de você mexer no botão deslizante, porém ao criar a animação o botão mexe sozinho:





Tarefas:

1) Criar uma animação GIF com:

a) $f(x)=\cos(x)$, $x_0=0$

b) $f(x)=\text{arcosh}(x)$, $x_0=2$

2) Porque muitas vezes é necessário usar o Polinômio de Taylor ao invés da Aproximação Linear?

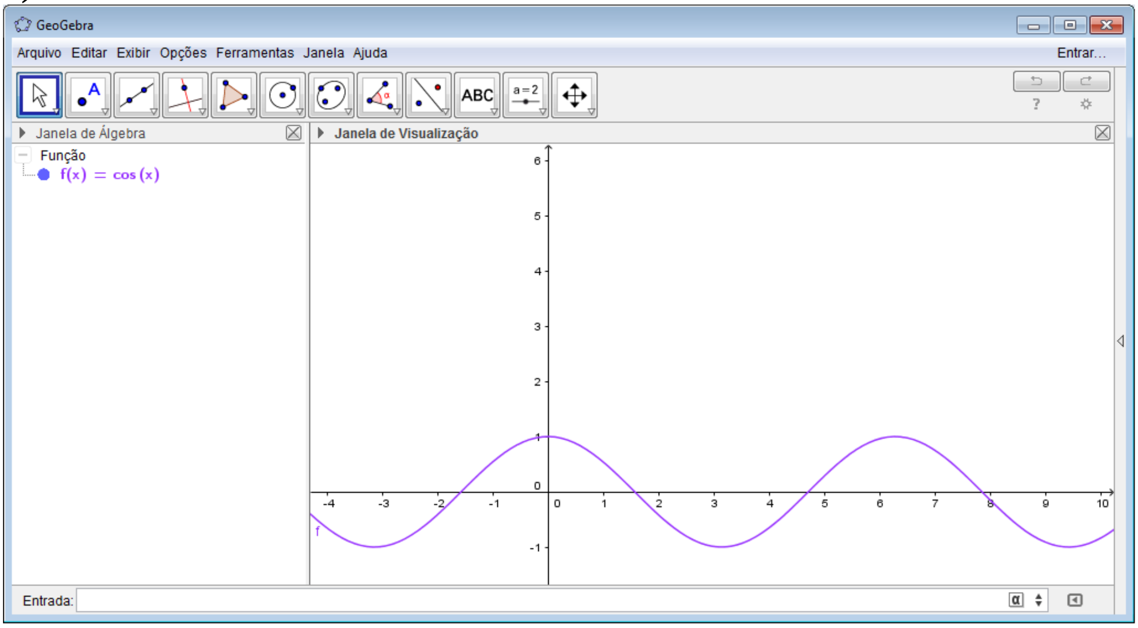
3)Se numa função duas vezes diferenciável, $f''(x_0) = 0$ mas $f'(x_0) \neq 0$, o que posso descobrir?

4)Se numa função n vezes diferenciável, e é verificado que $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ mas $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, o que posso descobrir?

RESPOTAS DOS DOIS ITENS DE TAREFA:

Parte1:

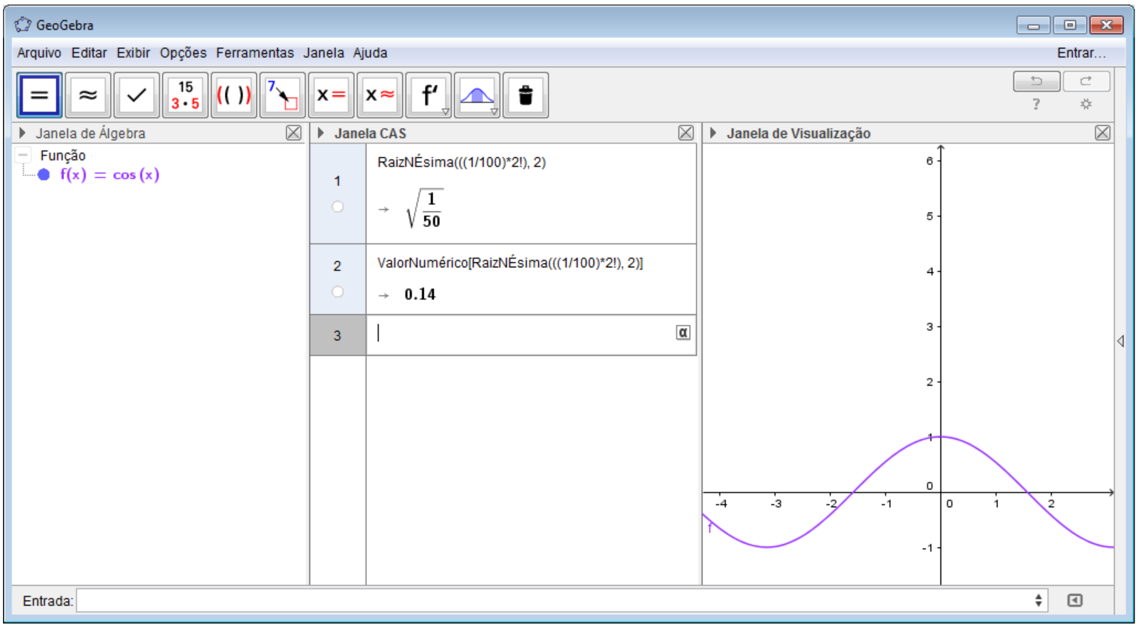
1)



I=[-a,a]

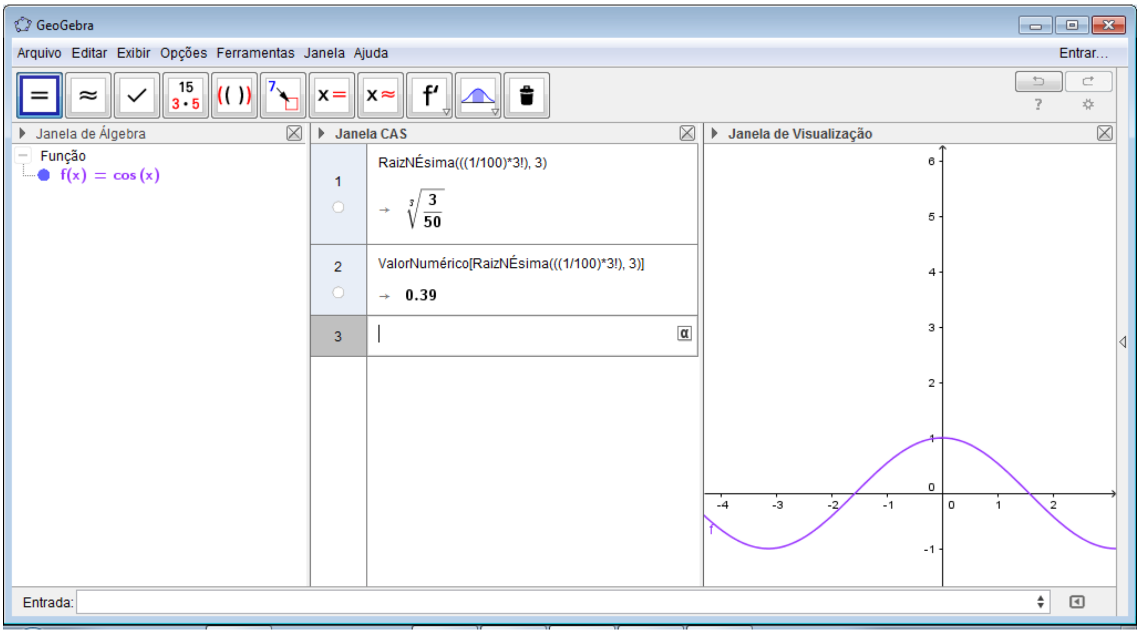
a) |R1|= $\left|\frac{f''(c)}{2!}x^2\right| \leq \frac{1}{2!}a^2 \leq 10^{-2}$

Pois sen(x) $\leq$ 1 ∀ x e se x ∈ a [-a,a], o valor máximo de $x^2=a^2$



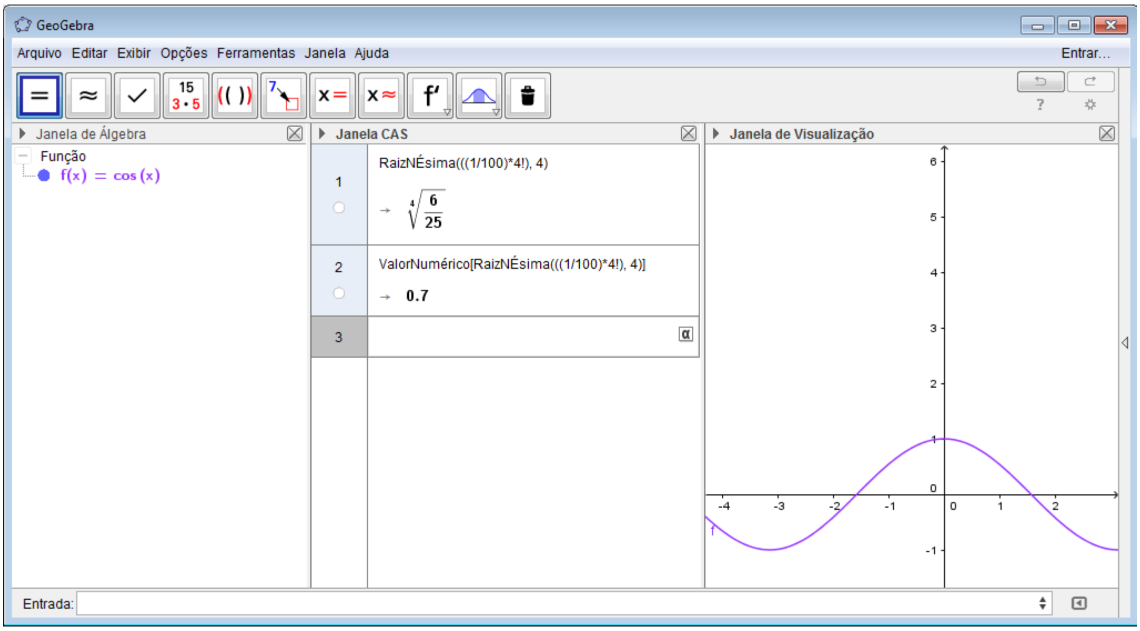
b)$|R2| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| \le \frac{1}{3!}a^3 \le 10^{-2}$

Pois sen(x) $\le$ 1 ∀ x e se x ∈ a [-a,a], o valor máximo de $x^3=a^3$



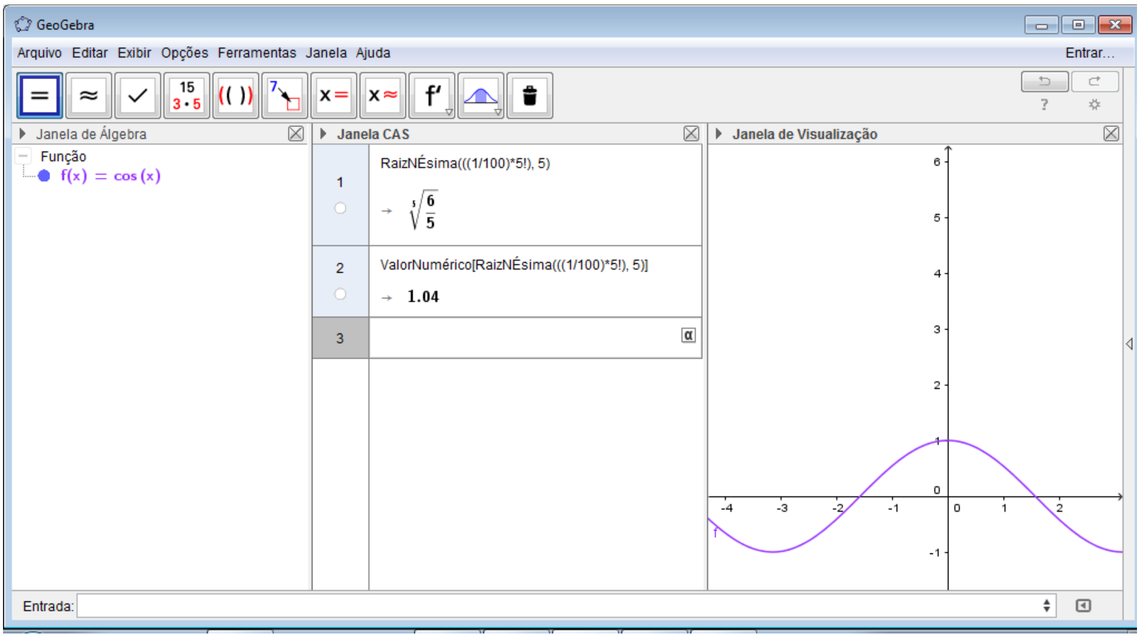
c)$R3= \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right| \le \frac{1}{4!}a^4 \le 10^{-2}$

Pois sen(x) $\le$ 1 ∀ x e se x ∈ a [-a,a], o valor máximo de $x^4=a^4$



d)R4= $\left|\frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5\right| \leq \frac{1}{5!}a^5 \leq 10^{-2}$

Pois sen(x) $\leq$ 1 ∀ x e se x ∈ a [-a,a], o valor máximo de x^5 $=a^5$

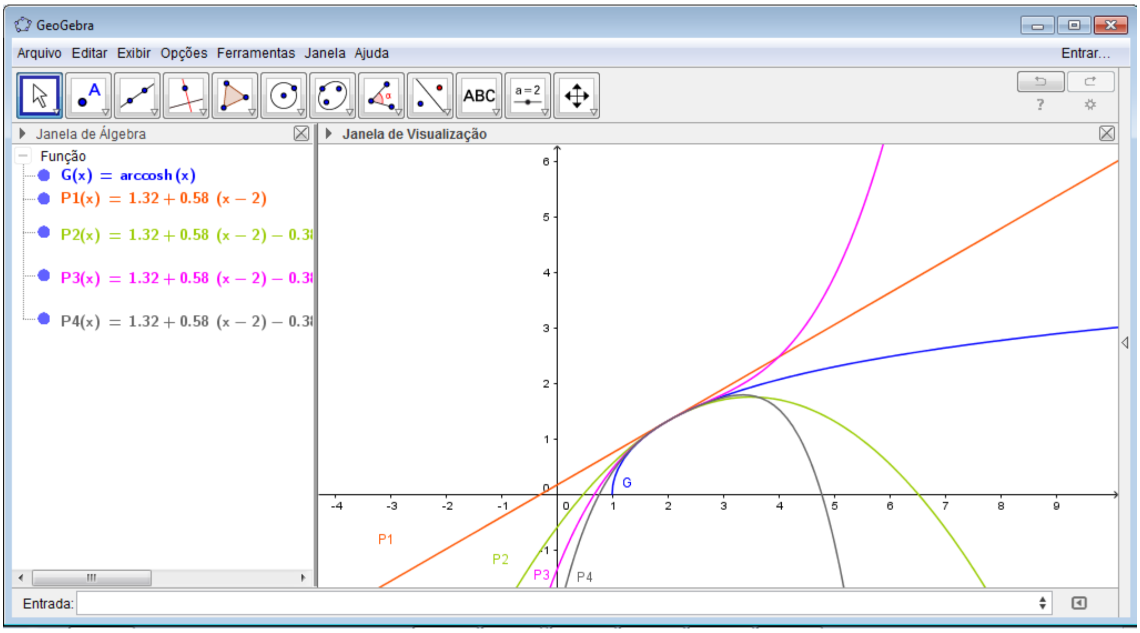


2) O aumento do grau do polinômio aumenta o intervalo ótimo de aproximação (valor de a) criando um erro menor. Assim, quanto mais longe de x_0, maior deve ser o grau para que se tenha uma

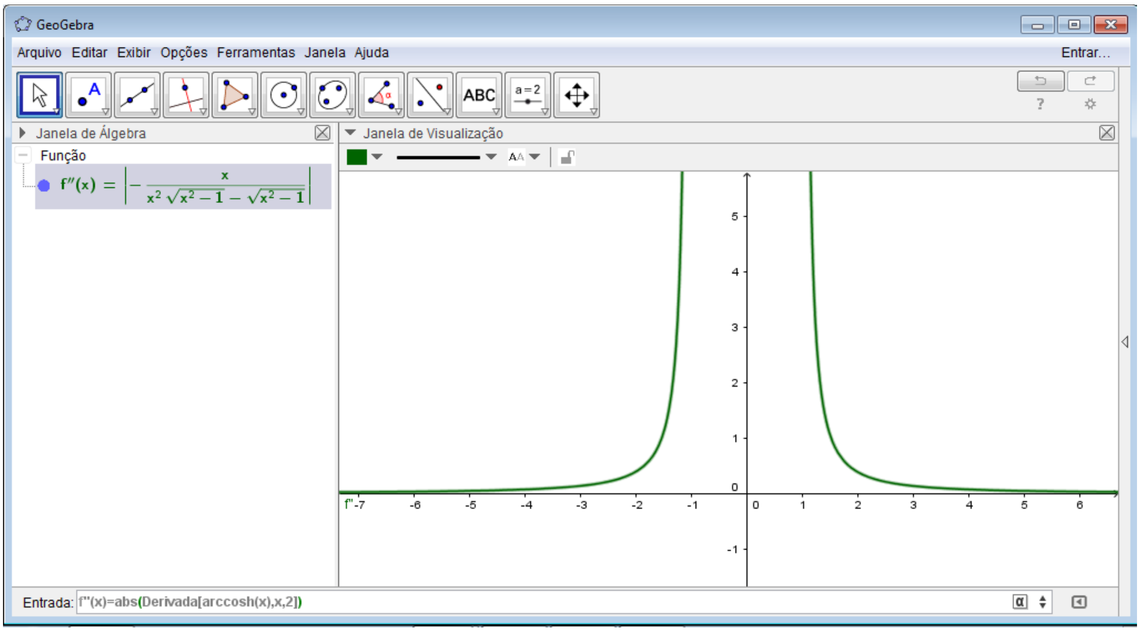
aproximação aceitável do polinômio para com a função original, ou seja, o aumento do grau do polinômio aumenta o intervalo ótimo de aproximação (valor de a) tendo assim um erro menor.

3)Grau 3. Grau 4.

4)



5)Solução:



Como a função f(x) = arcosh(x) é duas vezes derivável em Rn\ [-1; 1], decorre do Teorema de Taylor que o Polinômio de Taylor de ordem 1 centrado em $x_0 = 2$ aproxima a função f com resto de Lagrange:

$$R_1 = \frac{f''(c)}{2!}(x-2)^2$$

para todo x ∈ $(-\infty, -1)\ U\ (+1;+\infty)$ e para algum c no intervalo (2; x) se x > 2 ou (2; x) se x < 2.

Seja I = [2 - a; 2 + a], com 2 -a > 1, o intervalo buscado. Como queremos que o Polinômio aproxime com uma precisão da ordem de 10^{-2} nesse intervalo, temos que impor que |R1(x)| < 10^{-2} para todo x ∈ [2 -a; 2 + a].

Portanto, tem-se que verificar que:

$$|R_1| = \left|\frac{f''(c)}{2!}(x-2)^2\right| = |f''(c)| \cdot \frac{|(x-2)^2|}{2!} < 10^{-2}$$,

para todo x ∈ I e para algum c entre 2 e x.

Precisaremos, então, de uma cota superior para $|f''(c)|$ e outra para $\frac{(x-2)^2}{2!}$ em função de a para depois isolar a na nova desigualdade obtida.

Calculemos a com ajuda do Geogebra:

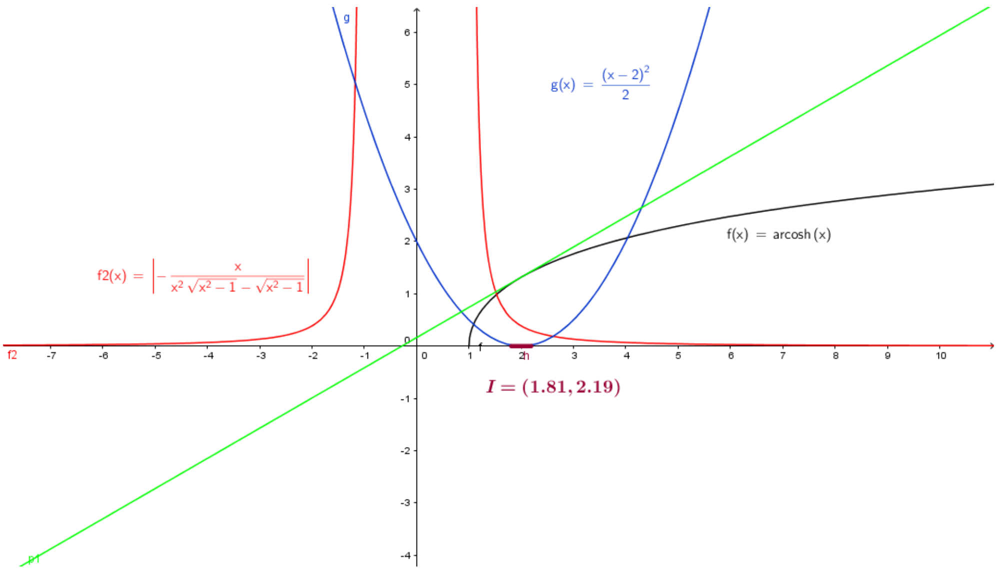
a) Introduzir f(x)=arcosh(x) na caixa de Entrada na parte inferior da Janela de Visualização.

b) Introduzir o comando f2(x)=abs(Derivada[f, 2]) para obter o gráfico do valor absoluto da segunda derivada.
de f, isto é, de $|f''(c)|$.

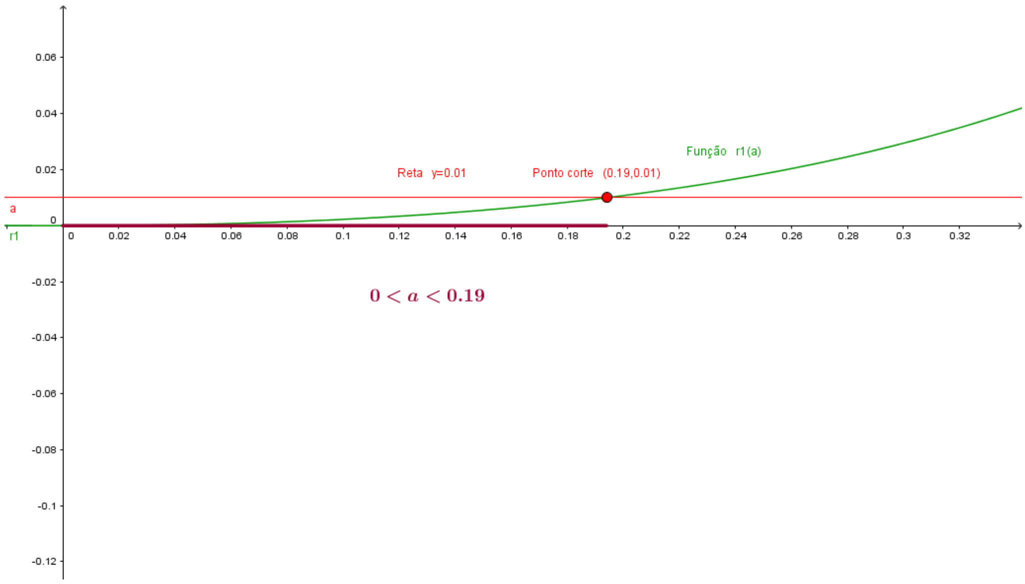
c) Observar que o valor máximo absoluto de f2(x) no intervalo I é f2(2-a), pois f2(x) é estritamente decrescente em I. Em consequência sabemos que $|f''(c)| \leq f''|(2-a)|$

d) Plotar a função g(x) = $\frac{(x-2)^2}{2!}$ no Geogebra. Observar que o valor máximo absoluto de g no intervalo I é

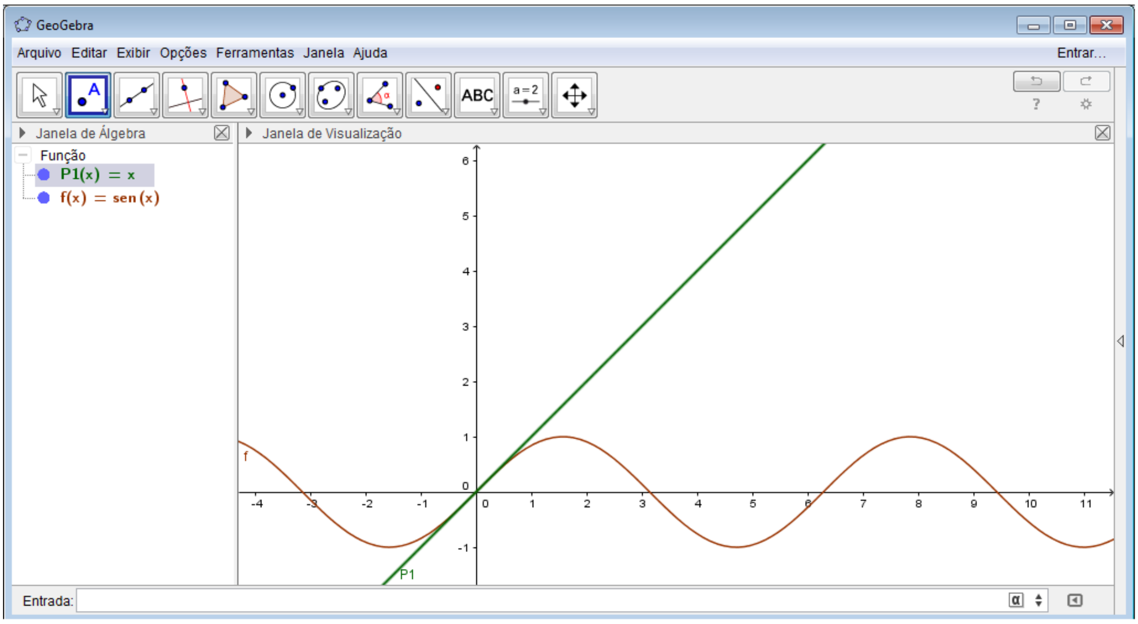
g(2 + a) = $\frac{a^2}{2}$, pois é estritamente crescente em [2, 2+a] e é simétrica no eixo x=2.



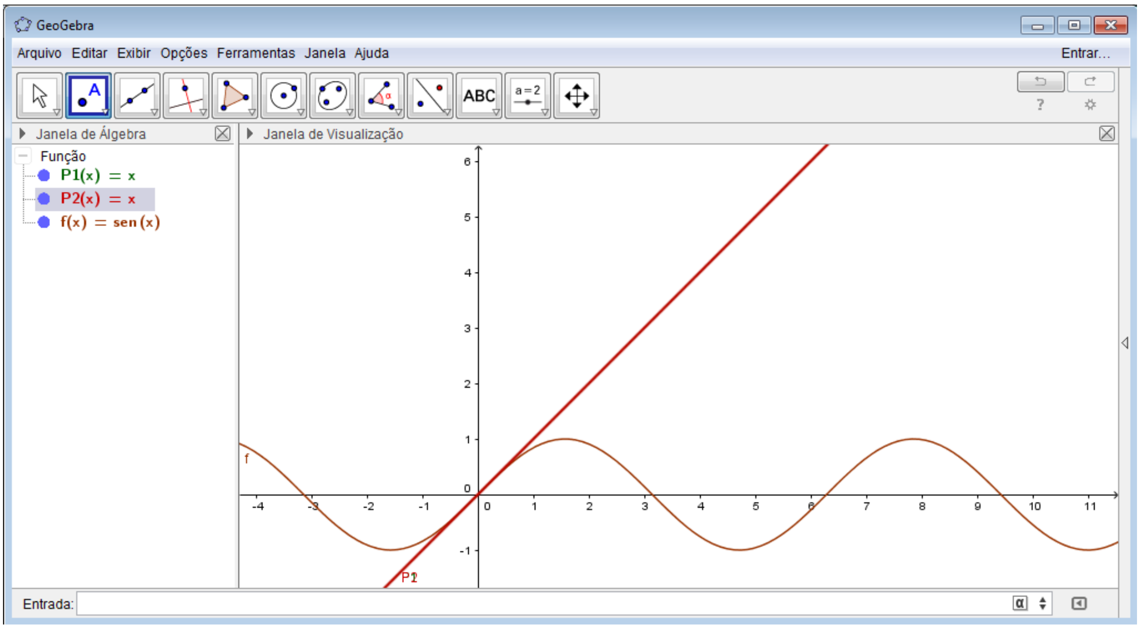
e)Observar que temos obtido que $\left|R_1\right| \leq \left|f''(2-a)\right|\frac{a^2}{2}$. Para ver quando esse valor é menor do que 10^{-2}, representaremos a função r1(a) = f2(2- a)g(2 + a) e a reta y = 0.01. O primeiro ponto de corte positivo será a cota superior de a. No nosso caso, r1(x) < 0.01 para todo 0 < x < 0.19. Assim, um intervalo ótimo seria
I = (2 - 0.19; 2 + 0.19) = (1.81; 2.19).



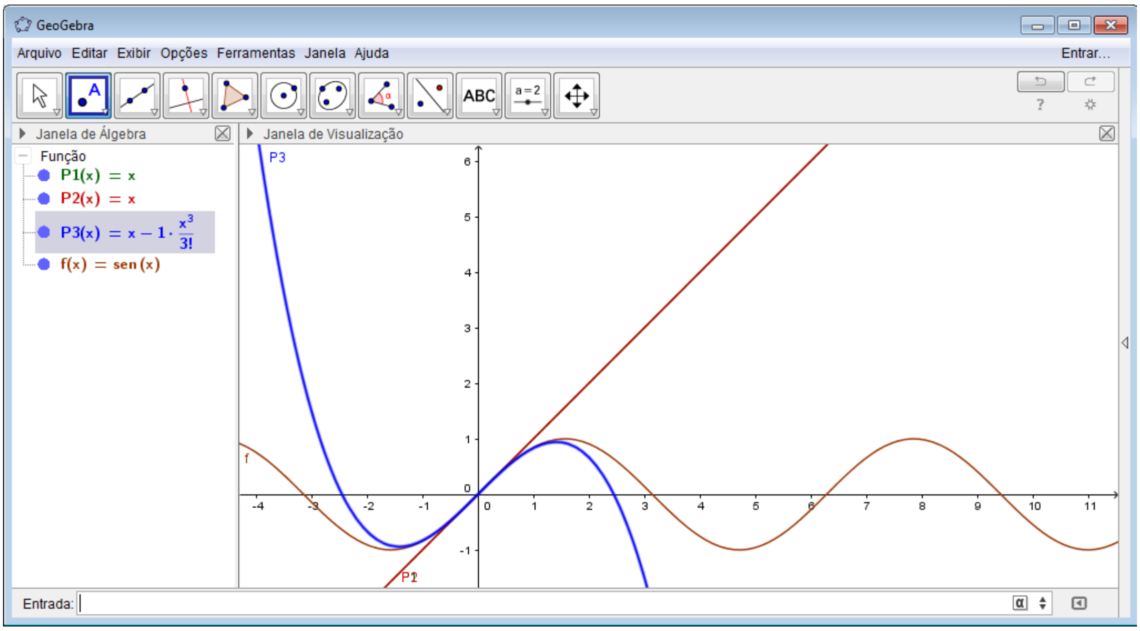
6) Ordem 1 e grau 1:



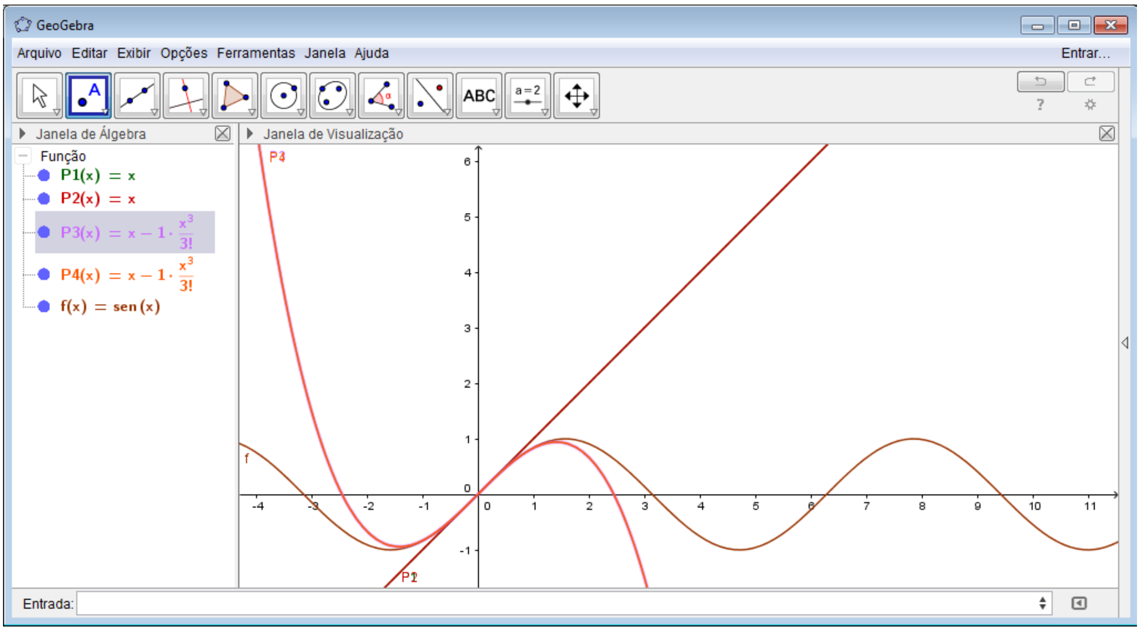
Ordem 2 e grau 1:



Ordem 3 e grau 3:



Ordem 4 e grau 3:



Assim vemos que a ordem diz qual a parcela do Polinômio de Taylor é a útlima, e a ordem pode ou não aparecer no polinômio dependendo do valor que o mesmo está centrado, enquanto o grau representa o expoente maior.

Parte 2:

1)a), b) respostas no arquivo

2) Por isso algum as vezes não é possível utilizar apenas Aproximação Linear com um x mais afastado de x_0. Dependendo da função, a aproximação linear não é suficiente, não trazendo um erro aceitável

3) a) $f(x_0) = 0$ Corta o eixo OX em $x=x_0$

b)

$$f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) > 0$$

O ponto (x_0,0) é mínimo relativo e x_0 é raiz de f

c)

$$f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) \neq 0$$
$$f''(x_0) > 0$$

O ponto (x_0,0) é mínimo relativo e x_0 não é raiz de f

d)

$$f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) < 0$$

O ponto (x_0,0) é máximo relativo e x_0 é raiz de f

e)

$$f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) \neq 0$$
$$f''(x_0) < 0$$

O ponto (x_0,0) é máximo relativo e x_0 não é raiz de f

f)

$$f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) = 0$$

Ponto de inflexão na origem

g)

$f'(x_0) \neq 0$
$f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Ponto de Inflexão fora da origem

Além disso, há a regrageral que vale para n $\geq$ 2: Se são verificadas todas as condições do enunciado e n $\geq$ 2:

Se n é ímpar

- $f^{(n+1)}(c) > 0$ então c é mínimo local
- $f^{(n+1)}(c) < 0$ então c é máximo local

Ex 1: $f(x) = x^3$

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$

$X_0=0$ é ponto de inflexão.

Ex 2: $f(x) = x^4$

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) > 0$

$X_0=0$ é mínimo local.

Ex 3: $f(x) = x^5$

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) > 0$

$X_0=0$ é ponto de inflexão.

4) X_0 é ponto crítico de f'

$f''(x_0) < 0$

Se $f'''(x_0) \neq 0$

$f''(x_0) > 0$

Bibliografia

- Curso de Análise - Elon Lages, vol.1, pág. 283
- Cálculo - Howard Anton, vol.1 e 2
- Bayón L, Grau J.M.,Suaréz P.M.,Cálculo.Grados em Ingernieria. Ediciones de la Universidad de Oviedo. Ediuno. 2011
- Apostila de Introdução aos Métodos Numéricos-UFF-parte1
- Cálculo Diferencial & Integral I- Jaime E. Munõz Rivera

Outras referências

Vídeos:

- Cálculo II- videoaula 1: https://www.youtube.com/watch?v=4elA1yVc5oo
- Cálculo II – videoaula 2, parte 1,2, e 3 : https://www.youtube.com/watch?v=g3D2nSqYPc8, https://www.youtube.com/watch?v=IkRDGHww1wU , https://www.youtube.com/watch?v=A0uIM-lEUJs
- Coleção de vídeos Matemática Prática-Fernando Deeke Sasse- videoaulas 4,6 e 7: https://www.youtube.com/watch?v=n6ViNFTAfOs&list=PL594978F3375E6D38

Sites:

- Moodle da professora Begoña: http://www.professores.uff.br/balarcon/moodle/course/view.php?id=2

- Laboratório:http://www.professores.uff.br/balarcon/LabCalculo.html