Polinômio de Taylor e aplicações

Aluna: Nathália do Nascimento Teodosio

Orientadora: Begoña Alarcón Cotillas

Roteiro:

- Definição

1-Polinômio de Taylor

2-Resto de Lagrange

3-Teorema de Taylor

4-Prova de que o lim do erro/x-x_0 = 0

- Pré Cálculo:

*Polinômio de Taylor usado em diversas áreas do conhecimento

- Representações Gráficas

  * Diferença entre aproximação Linear e Polinômio de Taylor

  * Animação do Geogebra : ideia intuitiva

- Pós – Calculo:

  * Calculo 2b: Taylor em várias variáveis

  * Métodos numéricos : Interpolação de funções

  * Edo: Séries de Taylor para resolver EDO

- Outras aplicações :

  * Aproximação de funções

  * Cálculo de Limites (infinitésimos equivalentes)

  * Propriedades das curvas

  *Teorema do valor intermediário e de Rolle

DEFINIÇÃO

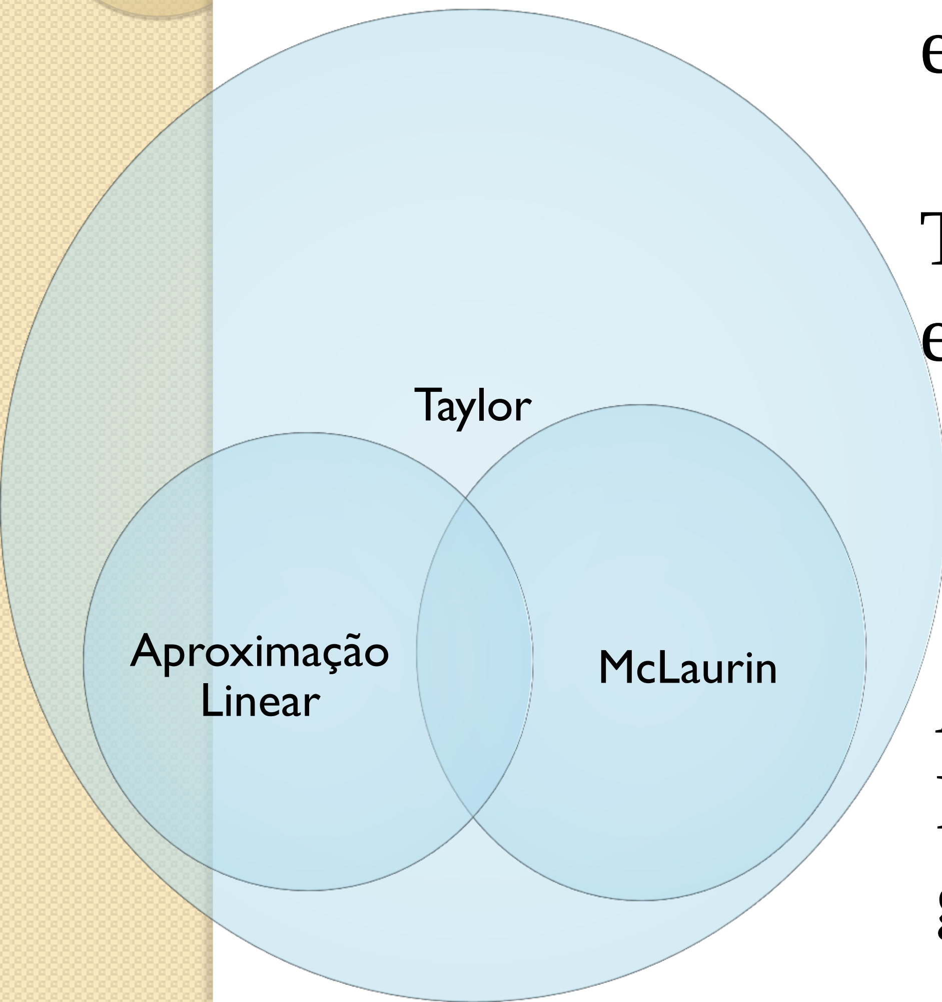
- Seja f uma função diferenciável n vezes em x_0, então definimos o enésimo polinômio de Taylor para f em torno de $x=x_0$ como sendo :

$$Pn(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ou ainda:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(f^{(k)}(0))}{(k!)}\right)(x - x_0)^k$$



McLaurin: Sempre centrado em zero

Taylor: Pode estar centrado em outros números

Aproximação Linear: Polinômio de Taylor de 1º grau

- O Erro de Lagrange é a diferença entre um x em torno de x_0 na função original e no Polinômio de Taylor . Depois de calculado o resultado pelo Polinômio, é necessário calcular o erro para se verificar o quanto aquela resposta encontrada é confiável.

- Fala-se em Estimativa do Erro pois a fórmula depende de um X entre x e x_0 o qual não se sabe o valor exato.

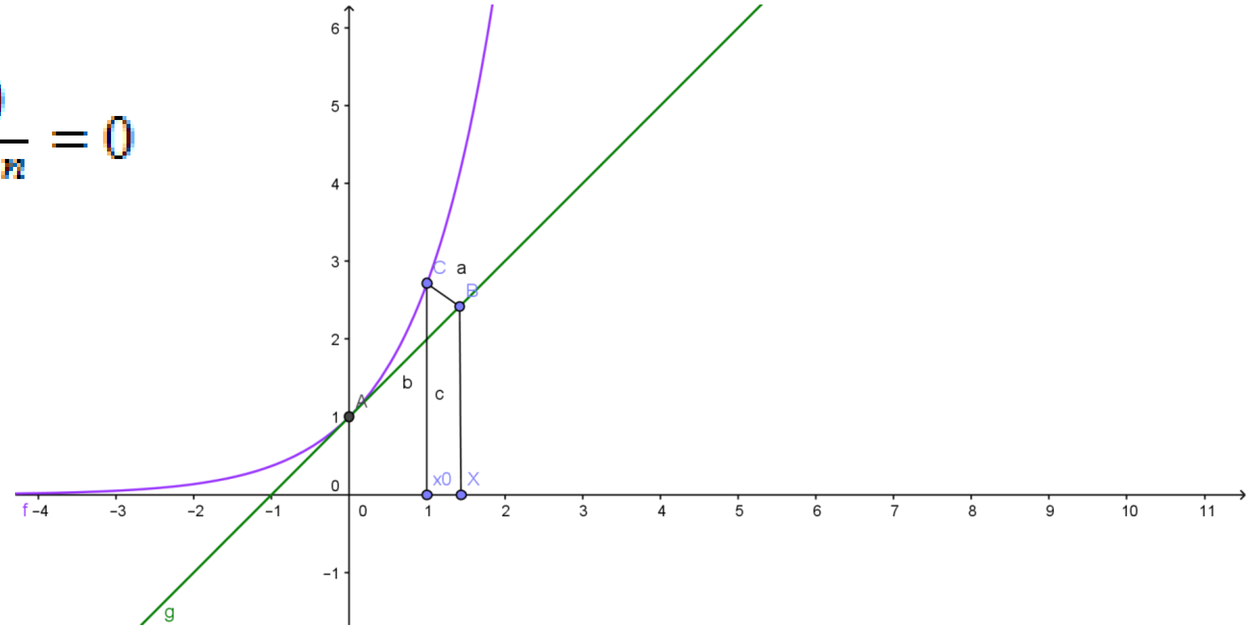
- Teorema: Se f for diferenciável até ordem n+1 em um intervalo I que contém x e xo, então existe um X entre x e x0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1\,!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

Polinômio + Resto

- Ainda,Pode-se verificar, aplicando-se L'Hôpital reiteradamente , que :

$$\lim_{(x\to x_0)} \frac{(E_n(x))}{(x-x_0)^n} = 0$$



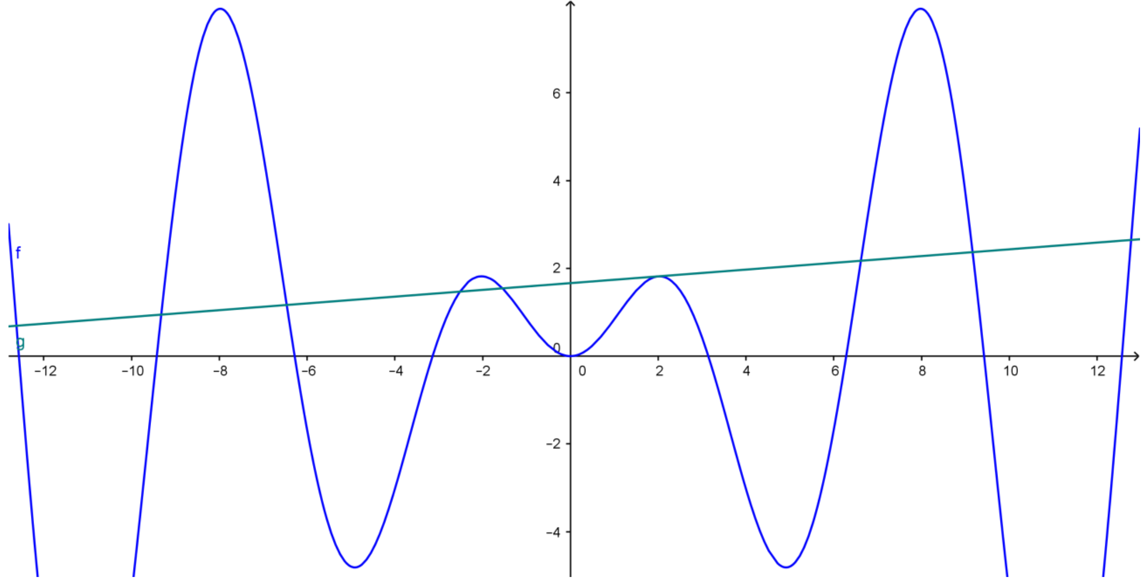
Ou seja, que a diferença "a" entre as duas funções (original f(x) e o Polinômio) quando x se aproxima de x_0, vai a zero mais rápido do que a diferença entre x e x ainda que elevada a n.

- Há fórmulas do ensino médio que são na verdade Polinômios de Taylor
- Exemplos:

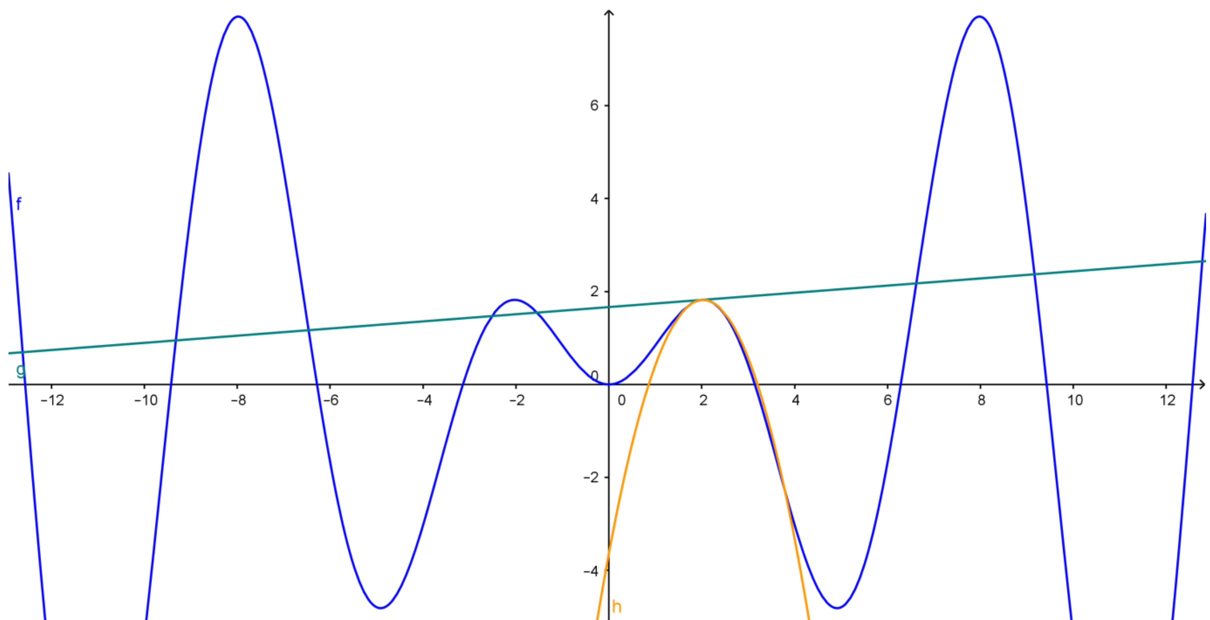
Física : MU e MUV-> Equação da posição

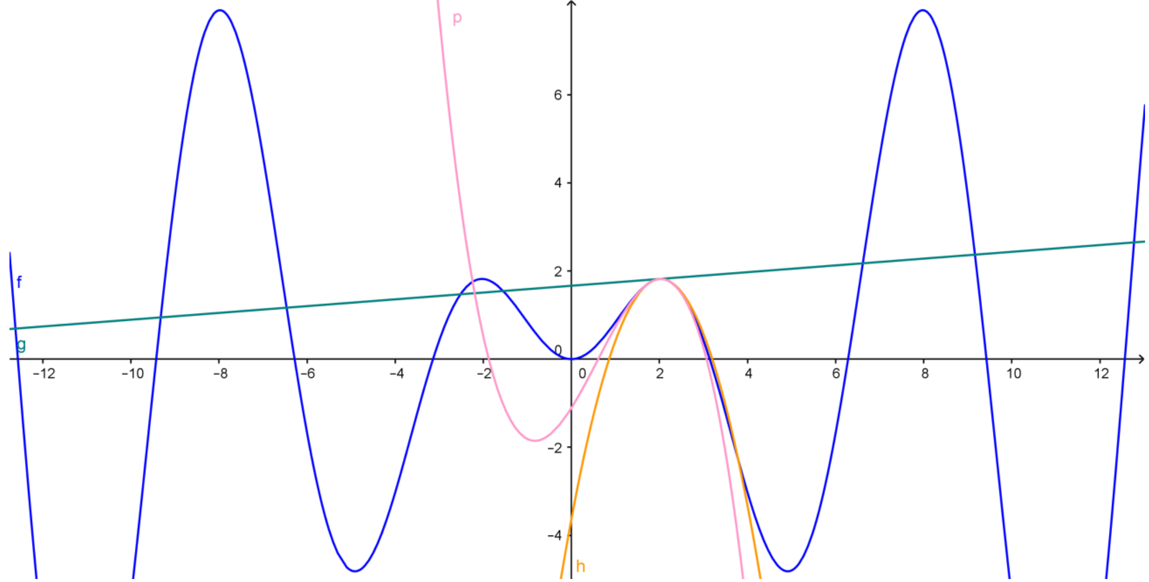
Química: Velocidade da reação química

Matemática: função de 1º grau, 2º grau e demais polinônimos

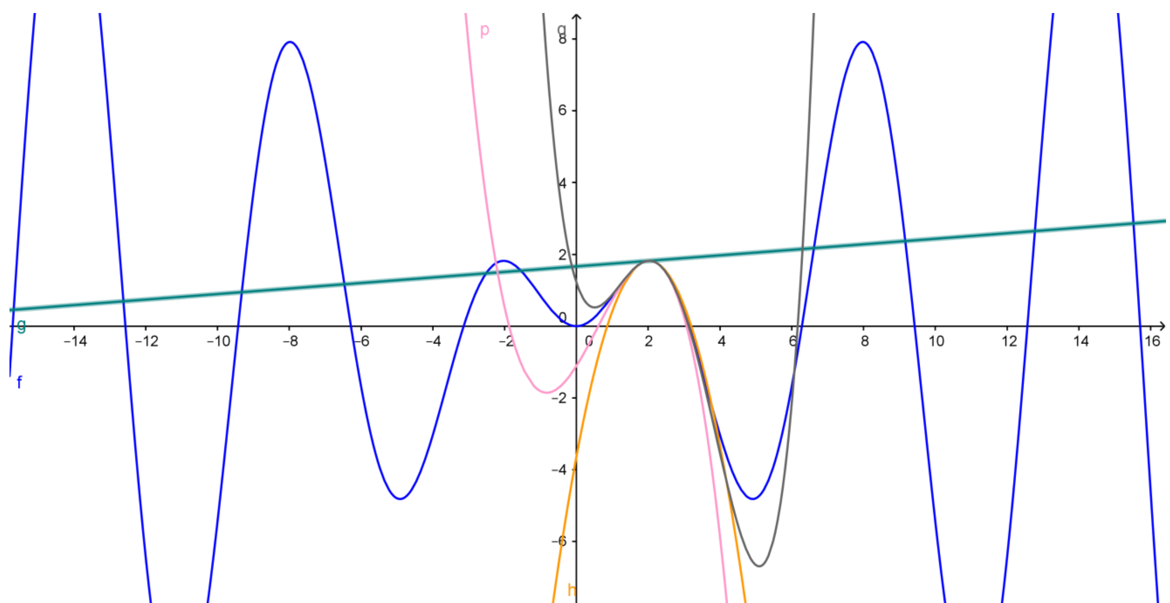


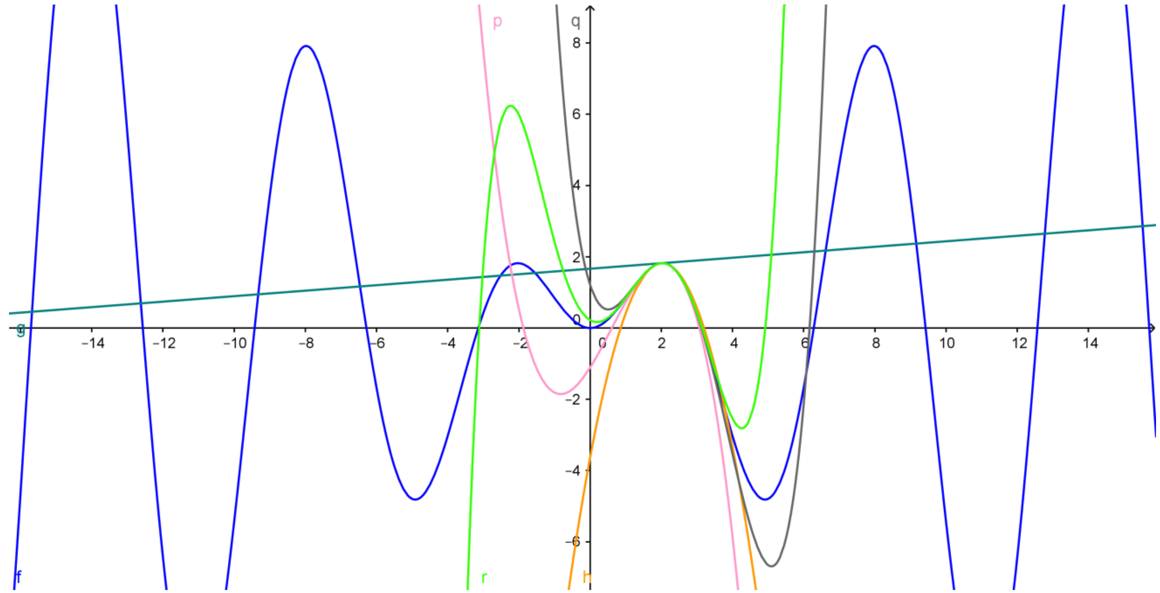
- $f(x) = x\,sen(x)$
- $P_1(x)$
- $P_2(x)$



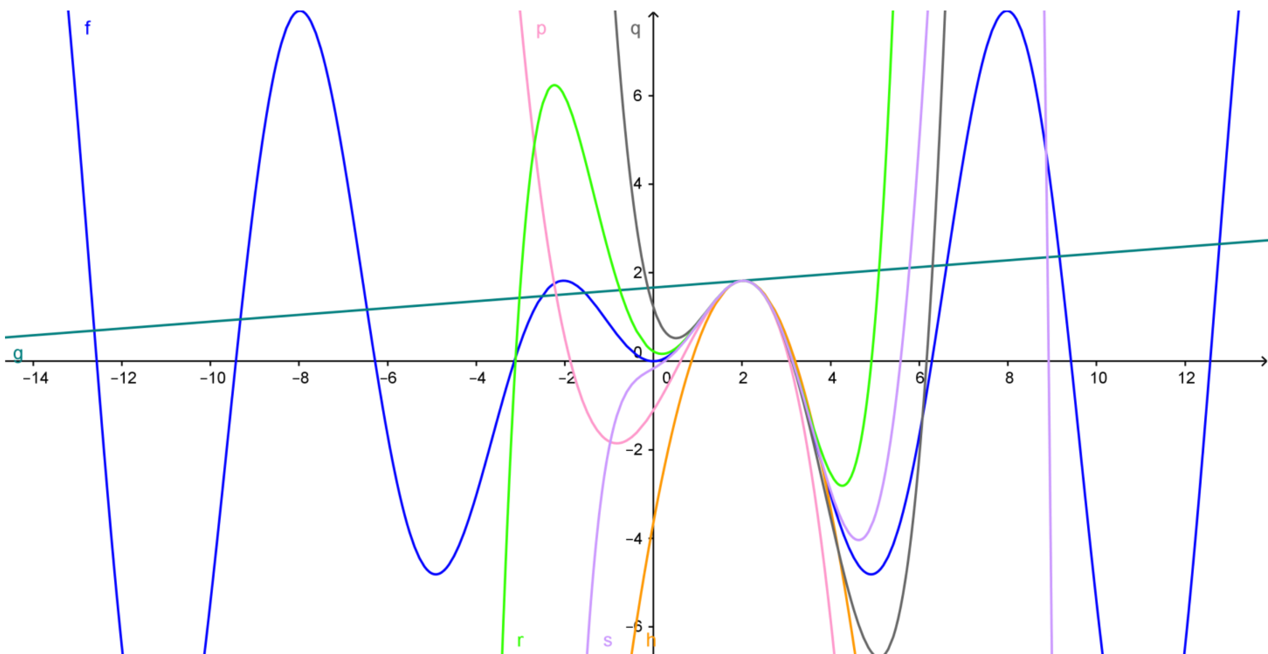


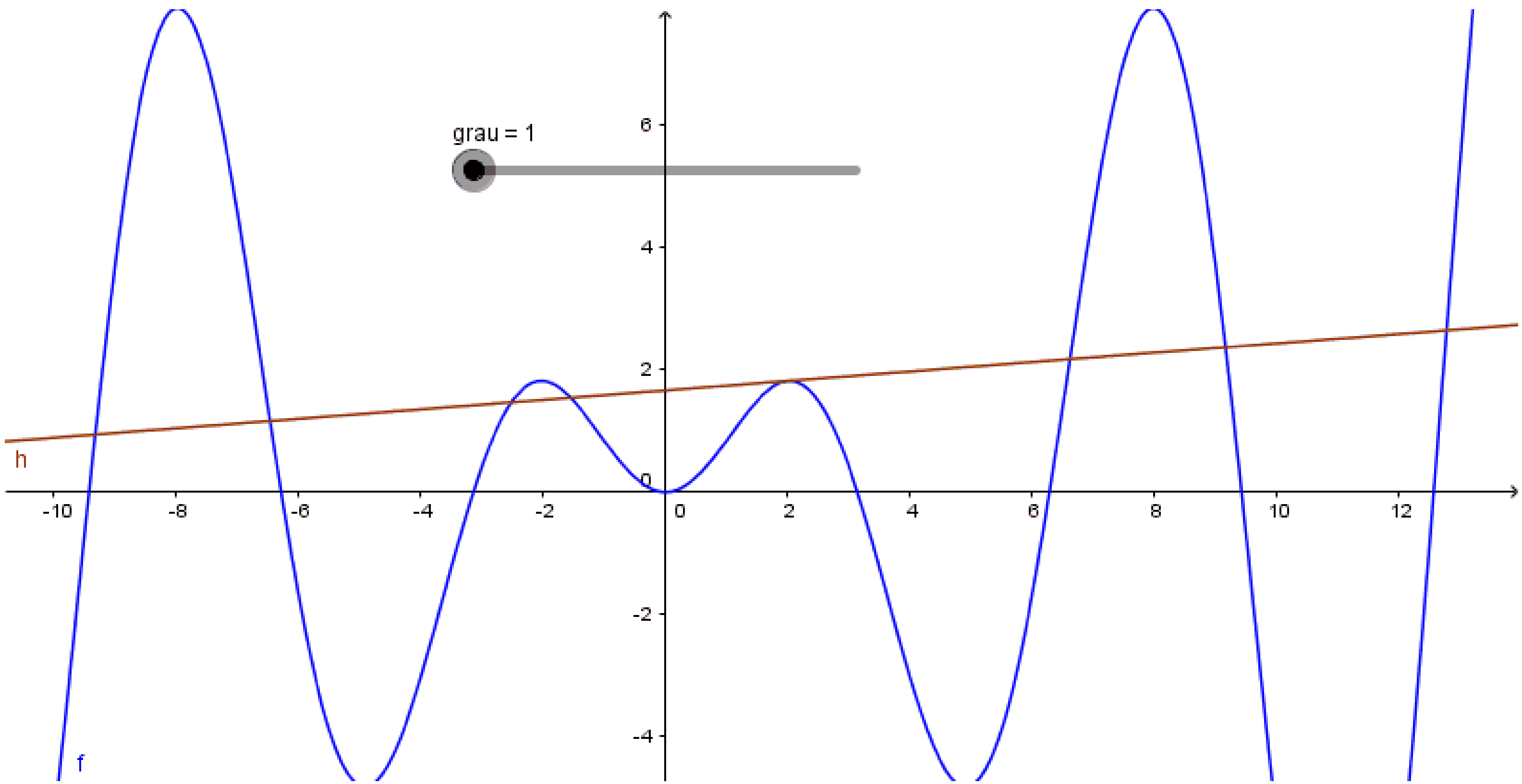
- $f(x) = xsen(x)$
- $P_1 (x)$
- $P_2 (x)$
- $P_3 (x)$
- $P_4 (x)$



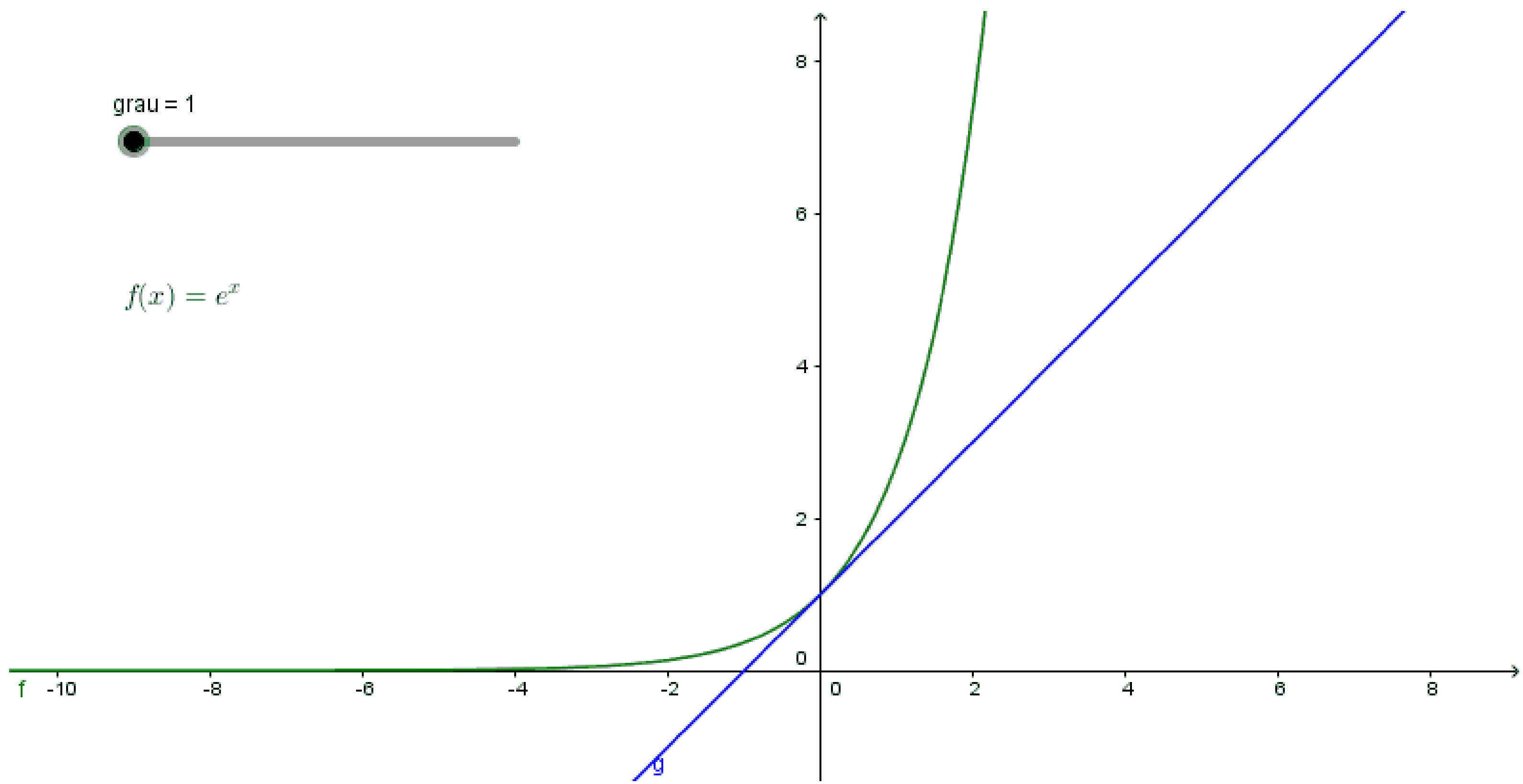


- $f(x) = xsen(x)$
- $P_1(x)$
- $P_2(x)$
- $P_3(x)$
- $P_4(x)$
- $P_5(x)$
- $P_6(x)$





grau = 1
6
4
2
0
-2
-4
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
h
f


grau = 1
$f(x) = e^x$
f
g
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Outras aplicações

- Achar algumas propriedades gráficas das curvas:

  1)Achar máximos e mínimos locais: Seja f n vezes diferenciável e $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

mas $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, tenho dois casos:

a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local, porém se $f^{(n)}(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local.

b) Se n for ímpar, então x_0 não é máximo nem mínimo local

2) Achar a derivada máxima ou mínima locais:

Achar os valores de x_0 para os quais $f''(x_0) = 0$ e aplicar na primeira derivada primeira derivada, para saber que valores correspondem aos máximos e mínimos locais. Aplicar na função para Achar o par ordenado.

- Cálculo de limites com a indeterminação 0/0:

Sejam f e g diferenciáveis, e g(x)diferente de 0:

$$\lim_{(x\to a)} \frac{(f(x))}{(g(x))} = \lim_{(x\to a)} \frac{(f^{(n)}(x))}{(g^{(n)}(x))}$$

Pós Cálculo I

- Cálculo 2b: Para Taylor em várias variáveis, a primeira derivada vira um plano tangente.

$$P_n(x,\ y) = f(x_0,\ y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)(x - x_0)$$

- Métodos numéricos: Como a ideia principal do métodos numéricos é a aproximação de respostas, o Polinômio de Taylor tem sua importância, principalmente na área de Interpolação de funções.

Bibliografia

- Curso de Análise - Elon Lages, vol.1, pág. 283
- Cálculo - Howard Anton, vol.1 e 2
- Livro em espanhol
- Apostila de Introdução aos Métodos Numéricos-UFF-parte1

Vídeos:

Cálculo II- Aula 1

Cálculo II – Aula 2, parte 1,2, e 3