UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
SOLUÇÕES DA PRIMEIRA PROVA DE COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA APLICADA – 2017/1
Professor: Bruno Santiago

1. (2pt.)

   (a) Qual o domínio da função $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$?

   (b) Em quais pontos o gráfico de $f(x)$ intersecta o eixo-x ?

   (c) Calcule a função derivada $f'(x)$.

Solução

(a) Observe que a expressão de f contém uma raiz quadrada. Os pontos do domínio de f devem ser tais que aquilo que aparece dentro da raiz seja sempre positivo. Em outras palavras, o domínio de f é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $2x^2 - 2 \geq 0$. Para resolver uma desigualdade do segundo grau como esta devemos determinar as raízes da equação $2x^2 - 2$:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2 &= 0 \\ 2x^2 &= 2 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

Note que o gráfico de $2x^2 - 2$ é uma parábola com concavidade para cima.

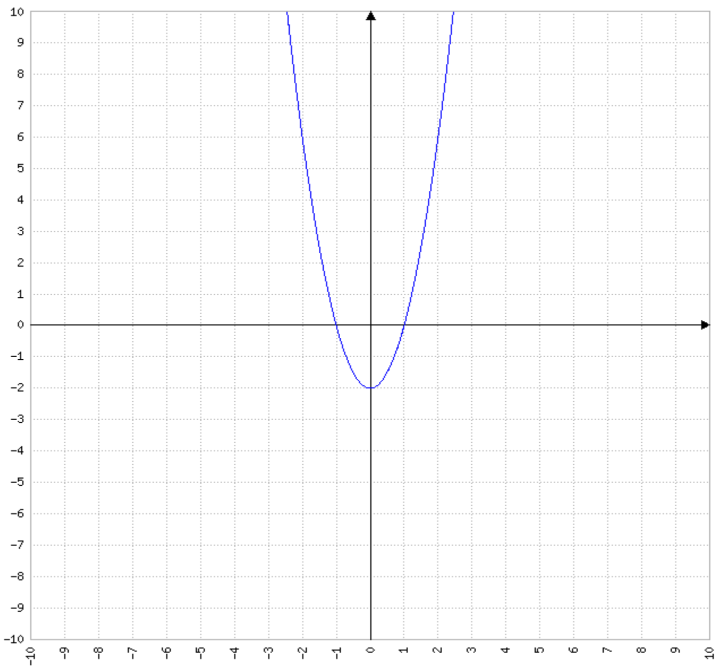

Figura 1: Um esboço do gráfico da parábola $2x^2 - 2$.

Com essas informações, vemos que

$$2x^2 - 2 \geq 0 \text{ se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1.$$

Portanto, $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$.

(b) Devemos determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$. Em outras palavras, para quais $x \in \mathbb{R}$ temos $\sqrt{2x^2-2} = 0$. Isto acontece se, e somente se, a expressão dentro da raiz quadrada for nula. Ora, vimos na solução do item (a) que $2x^2 - 2 = 0$ se, e somente se $x = \pm 1$. Portanto,

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \{-1, 1\}.$$

(c) A função $f(x)$ é a composta das funções $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 2x^2 - 2$. Em outras palavras, $f(x) = g(h(x))$. Pela regra da cadeia, $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.
Então, primeiro calculamos

$$h'(x) = 2.2x^{2-1} = 4x$$

e

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-2}}.4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-2}}.$$

2. (2pt.) Calcule os limites laterais $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x)$ e decida se $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$.

(a) $a = 1$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ 2 \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$

(b) $a = 0$ e $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$

Solução

(a) Devemos calcular

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Observe que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Logo, se $x \neq 1$ temos que $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$. Portanto,

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} x + 1 = 2.$$

Como consequência disto vemos que f é contínua em $x = 1$, pois os limites laterais em 1 são ambos iguais ao valor $f(1)$ da função $f(x)$ quando $x = 1$.

(b) Lembrando que $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x \leq 0$, temos que

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} |x| = 0.$$

Veja a figura 2. Assim, ambos os limites laterais de $f(x)$ quando $x = 0$ existem e são iguais. No entanto, o valor $f(0)$ de $f(x)$ quando $x = 0$ é $f(0) = 2$. Portanto, f é descontínua em $x = 0$.

3. (2pt.)

(a) Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $x = 1$.

(b) Qual a equação dessa reta ?

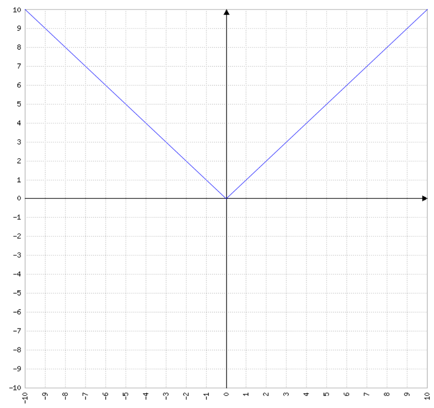

Figura 2: Um esboço do gráfico de $|x|$.

Solução

(a) A inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função é dada pelo valor de sua derivada. Como

$$f'(x) = 3x^{(3-1)} = 3x^2,$$

vemos que $f'(1) = 3.1^2 = 3$. Logo a inclinação da reta tangente ao gráfico de de f no ponto $x = 1$ é 3.

(b) Lembre que a equação de uma reta no plano sempre possui a forma $g(x) = ax + b$, onde a é a inclinação da reta. Já sabemos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ em $x = 1$ possui inclinação 3. Logo, a reta que estamos procurando possui equação $g(x) = 3x + b$. Para determinar o valor de b precisamos conhecer um ponto do plano por onde a reta passa.

Para tanto, lembre que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 1$ passa pelo ponto $(1, f(1))$ no plano. Como $f(1) = 1$, isto nos diz que a reta que estamos procurando passa pelo ponto $(1, 1)$. Logo, devemos ter $g(1) = 1$, ou seja

$$\begin{aligned} 3.1 + b &= 1 \\ b &= 1 - 3 = 2. \end{aligned}$$

4. (2pt.) Considere a função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x.$$

(a) Encontre os conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ é horizontal.

(b) Indique os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

(c) Esboce o gráfico.

Solução

(a) A reta tangente ao gráfico é horizontal somente nos pontos onde a derivada se anula. Logo, devemos determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = 0$. Para isto, primeiro calculamos a derivada

$$f'(x) = \frac{3x^{(3-1)}}{3} - 4x^{(1-1)} = \frac{3x^2}{3} - 4x^0 = x^2 - 4.$$

Logo $f'(x) = 0$ se, e somente se

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Portanto, a reta tangente ao gráfico de f é horizontal no conjunto $\{-2, 2\}$.

(b) Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, olhamos para sua derivada. Nos intervalos onde a derivada é positiva a função será crescente. Nos intervalos onde a derivada for negativa a função será decrescente. Como a derivada de f é $f'(x) = x^2 - 4$, uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes (que calculamos no item anterior) -2 e 2, temos que

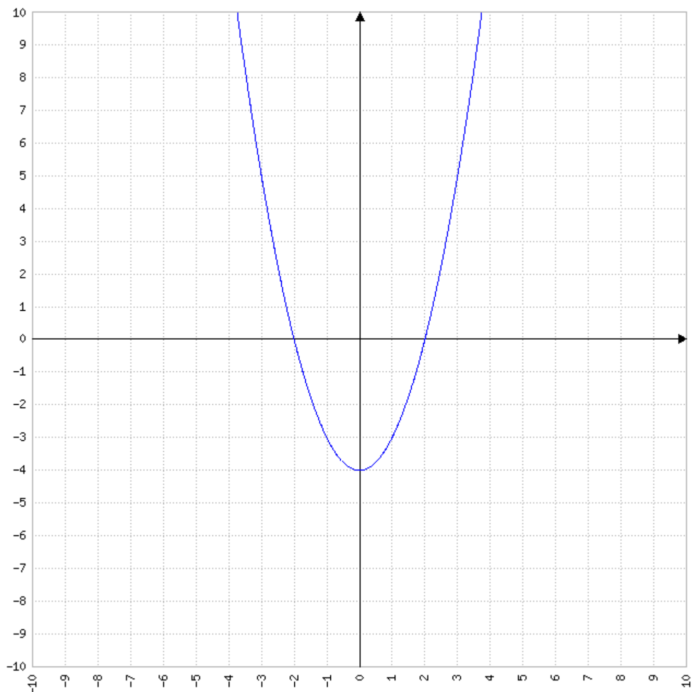

Figura 3: Gráfico da parábola $x^2 - 4$.

$$f'(x) = x^2 - 4 > 0 \text{ se } x < -2 \text{ ou } x > 2$$

e

$$f'(x) = x^2 - 4 < 0 \text{ se } -2 < x < 2.$$

Portanto, f é crescente em $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-2, 2)$.

(c) Já conhecemos os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente, e os pontos onde a reta tangente ao gráfico é horizontal. Note que $f(-2) = -\frac{16}{3}$ e $f(2) = \frac{16}{3}$ e que $f(0) = 0$. Além disso temos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3} - 4x = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3} - 4x = +\infty.$$

Com estas informações podemos esboçar o gráfico de f.

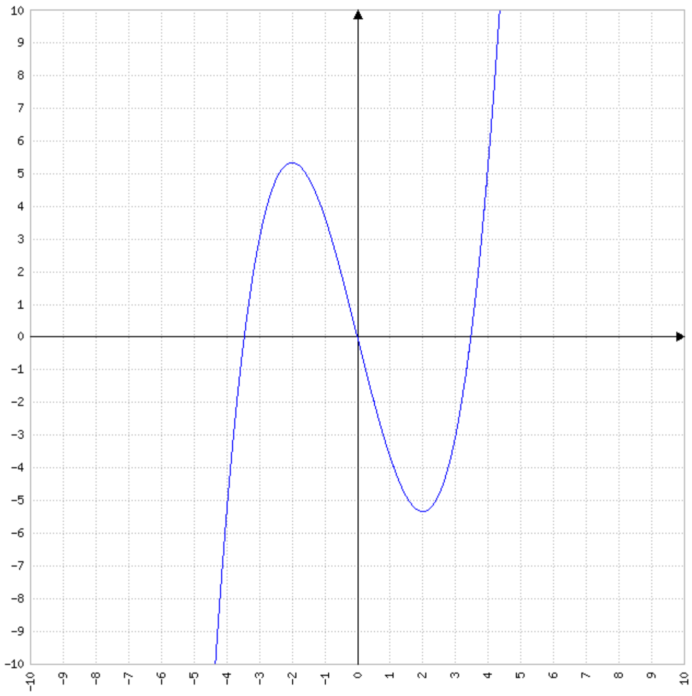

Figura 4: Gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

5. (2pt.) Dada a função

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}.$$

   (a) Identifique as assíntotas verticais. Calcule os limites laterais $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ para cada assíntota vertical.

   (b) Calcule os limites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Identifique as assíntotas horizontais.

   (c) Esboce o gráfico.

Solução

(a) As assíntotas verticais só podem estar localizadas nos pontos onde o denominador da expressão que define f se anula. Ou seja, nos pontos onde $x^2 - 1 = 0$. Portanto, as assíntotas verticais (se existirem) estão localizadas em $x = -1$ e $x = +1$. Para determinar se temos assíntotas verticais, devemos calcular os limites laterais

$$\lim_{x\to-1^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-1} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-1}.$$

Note que a expressão $3x^2 + 1$ que aparece no numerador é sempre positiva e, além disso,

$$\lim_{x\to-1^\pm} 3x^2 + 1 = \lim_{x\to1^\pm} 3x^2 + 1 = 4.$$

Por outro lado, para valores de x muito próximos de -1, mas menores do que -1, temos que $x^2 - 1$ é positivo e muito próximo de 0. Com isto, vemos que

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = +\infty.$$

Já para valores de x muito próximos de -1, mas maiores do que -1, temos que $x^2 - 1$ é negativo e muito próximo de 0. Isto garante que

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = -\infty.$$

Analogamente, para valores de x muito próximos de 1, porém menores do que 1, temos que $x^2 - 1$ é negativo e muito próximo de 0, o que nos diz que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Finalmente, para valores de x maiores do que 1 e muito próximos de 1 temos $x^2 - 1$ positivo e muito próximo de 0. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

(b) Começamos notando que $\lim_{x \to \pm\infty} 3x^2 + 1 = +\infty$ e que $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 - 1 = +\infty$, pois ambas são expressões polinomiais de grau par. Com isto em mente, podemos calcular

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 3.$$

Portanto, o gráfico de f possui uma assíntota horizontal na reta $y = 3$.

(b) Para esboçar o gráfico com maior precisão iremos determinar (como fizemos na questão anterior) os intervalos de crescimento e decrescimento da função f. Como antes, calculamos a derivada de f e determinamos ons intervalos onde ela é positiva e os intervalos onde ela é negativa, bem como os pontos onde ela se anula. Para o cálculo da derivada utilizamos a regra do quociente, notando que o numerador e o denominador da expressão que define $f(x)$ são funções polinomiais.

$$f'(x) = \frac{6x(x^2 - 1) - 2x(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Como $(x^2 - 1)^2 \geq 0$, e como

$$x > 0 \text{ implica } -8x < 0,$$

ao passo que

$$x < 0 \text{ implica } -8x > 0,$$

temos que $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$. Além disso, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Note também que $f(0) = -1$ e que o gráfico de f nunca intersecta o eixo x, já que $3x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com estas informações podemos esboçar o gráfico de f.

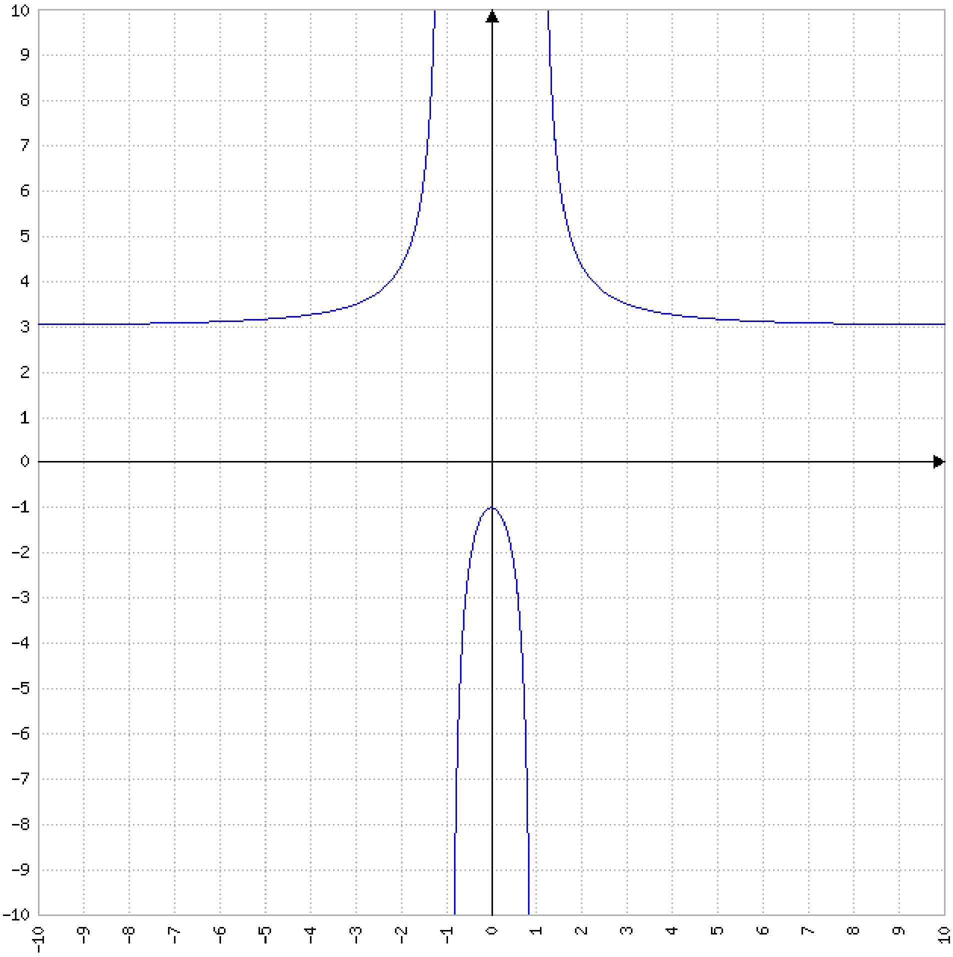

Figura 5: Gráfico de $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$.