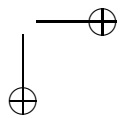
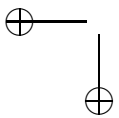
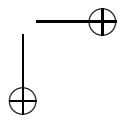
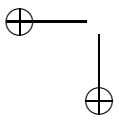
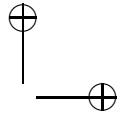
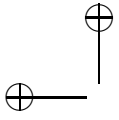


*A Ricardo Mañé, que nunca
conhecemos, mas que sempre nos
ensinou.*

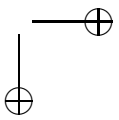
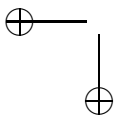
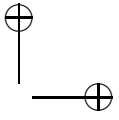
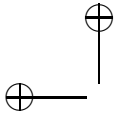


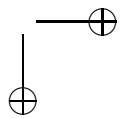
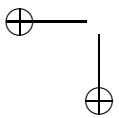
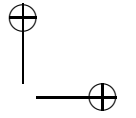
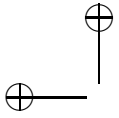


Sumário

Prefácio	vii
1 Preliminares	1
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	1
1.2 Fluxos Kupka-Smale	6
1.3 Estabilidade Estrutural e Ω -Estabilidade	7
1.4 Fluxos Estrela	7
1.5 O Lema de Franks	8
1.6 A conjectura da Estabilidade	12
1.7 Breves palavras sobre a Teoria Ergódica	15
2 Poços e Singularidades	17
2.1 O Teorema de Pliss	17
2.2 Explosões	20
2.3 O Connecting Lemma de Hayashi	22
3 Objetos Dinâmicos	26
3.1 Índices	26
3.2 Conjuntos Pré-Periódicos	27
3.3 A Topologia de Hausdorff e Aplicações	29
3.4 Limites Fundamentais	32
3.5 Interseções Heteroclínicas	33
4 Dominação	41
4.1 Hiperbolicidade do Fluxo Linear de Poincaré	41
4.2 Sequências Periódicas de Isomorfismos	45

4.3	Dominação para o fluxo Linear de Poincaré	49
4.4	Mais um critério para hiperbolicidade	52
5	O Caso Separado Não Singular	58
5.1	O Argumento de Mañé	58
5.2	O <i>Ergodic Closing Lemma</i> de Mañé	59
5.3	O Argumento de Redução do Índice	60
6	Hiperbolicidade I	73
6.1	O Caso Ω -estável: Densidade	73
6.2	O Caso Ω -estável: Geral	81
6.3	O Caso Kupka-Smale	85
7	Conjuntos Minimalmente Não-Hiperbólicos	89
8	Ciclos Heterodimensionais	95
8.1	Não Existência de Ciclos Heterodimensionais	96
8.2	Não existência de conjuntos simples	106
8.3	Conclusão	113
9	Hiperbolicidade II	115
9.1	Localizando o Conjunto Pré-periódico	115
9.2	Prova do Teorema 9.1	119
9.3	O Caso Incompressível	119
10	Avanços no Caso Singular	122
10.1	Contra Exemplos	122
10.2	Separação no Caso Singular e Hiperbolicidade Seccional	126
10.3	Codimensão 1	128
A	Dinâmica Hiperbólica e Sombreamento	133
B	O Lema de Franks	140
C	Dominação em Superfícies	147
D	Soluções e Sugestões Para os Exercícios	157





Prefácio

Este livro começou a nascer a partir do interesse, pelo primeiro autor, pela famosa conjectura da estabilidade, durante seu mestrado e doutorado, combinada com seu recente interesse pela teoria de fluxos com singularidades, em particular a teoria seccional hiperbólica.

Este interesse, aliado aos estudos e contribuições da terceira autora em exibir mais exemplos na teoria seccional hiperbólica e os estudos do segundo autor sobre o conceito de hiperbolicidade essencial, possibilitou a existência deste livro.

Com o advento da teoria hiperbólica, devido a Peixoto [57] e Smale [68], os sistemas Axioma A (ou hiperbólicos) entraram em cena imponentemente, uma vez demonstrada a estabilidade destes. A chamada conjectura da estabilidade versava sobre a recíproca, isto é, se os sistemas estáveis são hiperbólicos. Esta conjectura gerou intensa atividade na área de sistemas dinâmicos e finalmente foi resolvida por Mañé [45], em um monumental trabalho. Anteriormente, matemáticos como Liao, Pliss, Aoki e etc, também contribuíram com resultados parciais. Logo em seguida, usando os métodos de Mañé, Palis resolveu a chamada conjectura da Ω -estabilidade [56].

Da conjectura da estabilidade, duas perguntas naturais surgiram. A primeira, se a conjectura era verdadeira pra fluxos e a segunda, se uma propriedade mais fraca que estabilidade, atualmente chamada de propriedade estrela, era suficiente para garantir a hiperbolicidade de um difeomorfismo. A primeira foi demonstrada por Hayashi [32], através do seu poderoso *connecting lemma*, a segunda foi demonstrada independentemente por Hayashi [33] e Aoki [3].

Naturalmente, uma terceira pergunta poderia surgir: a propriedade estrela é suficiente para implicar a hiperbolicidade *de um fluxo*? De fato, a

pergunta já nasceu morta, pela existência do famoso *atrator de Lorenz*, um sistema que possui a propriedade estrela porém não é hiperbólico.

Mesmo assim, uma das principais características deste sistema é a presença de singularidades acumuladas por órbitas periódicas. Isto levou Gan e Wen a enunciarem e demonstrarem o seguinte teorema: *‘fluxos estrela sem singularidades são hiperbólicos’*.

Por outro lado, motivados pelo estudo sistemático do atrator de Lorenz, novas tecnologias foram criadas, culminando no conceito que hoje conhecemos como *hiperbolicidade seccional*. Matemáticos como Morales, Pacifico, Pujals, Shilnikov, Turaev entre outros, desenvolveram tais tecnologias e o conceito de *fluxo seccionalmente Axioma A* surgiu em [48]. Além disso, diversos exemplos de sistemas do tipo Lorenz, pertencem a classe dos fluxos seccionalmente Axioma A.

Naturalmente, podemos resgatar a seguinte pergunta, todo fluxo estrela é seccionalmente Axioma A? Mesmo assim, a resposta é negativa, e um contra-exemplo é apresentado neste livro. Porém acreditamos que a resposta seja afirmativa para a maioria dos fluxos estrela, de fato, o primeiro autor em colaboração com C. Morales tem resultados parciais nesta direção e isto também é comentado neste livro.

A finalidade do livro então é descrever com mais detalhes este belo capítulo da teoria dos Sistemas Dinâmicos. Optamos por escrever todos os conceitos na linguagem de fluxos, simplesmente pelo fato que a maioria dos textos sobre conceitos recentes envolvidos são apresentados no caso de difeomorfismos. Para os conceitos básicos de dinâmica hiperbólica no caso de fluxos temos o belíssimo livro de Palis-de Melo [21]. O presente livro então segue esta linha.

Finalmente, ainda há uma pergunta muito natural: Por que chamar tais fluxos de *estrela*? Bem, a resposta pode ser um tanto jocosa, os sistemas que apresentam tal propriedade são caracterizados pelo fato de não serem aproximados por sistemas exibindo órbitas críticas não hiperbólicas. Em alguns trabalhos, o conjunto de difeomorfismos com esta propriedade foi denotado por $\mathcal{F}^1(M)$, e a notação evoluiu para o caso de fluxos como $\mathcal{G}^1(M)$, já outros trabalhos usavam a notação $\mathcal{X}^*(M)$, e ao longo do tempo, devido aquela estrelinha ali em cima na notação, começaram a ser chamados de fluxos... estrela!

O livro está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 revisamos os conceitos básicos de Equações Diferenciais Ordinárias, Teoria Ergódica e apresentamos os conceitos de estabilidade e a propriedade estrela. Usando

o lema de Franks, mostramos que a estabilidade implica a propriedade estrela.

No capítulo 2 estudamos duas entidades: os poços e as singularidades. Primeiramente, recordamos o teorema de Pliss que garante finitude de poços diante da propriedade estrela. Mostramos também que sistemas estáveis que são hiperbólicos não apresentam ciclos. Introduzimos então o *connecting lemma* de Hayashi e obtemos o importante resultado que fluxos estáveis não possuem singularidades acumuladas por órbitas periódicas, que foi o principal empecilho para mostrar a hiperbolicidade de fluxos estáveis.

No capítulo 3 estudamos diversos conceitos necessários para desenvolver a teoria dos capítulos seguintes: índices de órbitas periódicas, pontos pré-periódicos e limites fundamentais. Além disso, estudamos situações em que é possível criar interseções homoclínicas.

O capítulo 4 é de certa forma o mais técnico. Nele apresentamos o fluxo linear de Poincaré, extremamente útil para lidar com fluxos sem singularidades. Caracterizamos a hiperbolicidade através do fluxo linear de Poincaré e introduzimos o importante conceito de dominação. Apresentamos também resultados devido a Mañé e Liao sobre a existência de dominação em órbitas periódicas na presença da propriedade estrela.

No capítulo 5 mostramos a hiperbolicidade do fecho das órbitas periódicas de fluxos estrela sem singularidades no caso separado. A separação simplifica diversos argumentos e assim é possível expor o belo argumento de redução de índice, usando o *ergodic closing lemma* de Mañé.

No capítulo 6 apresentamos a prova devido a Hayashi de que Ω -estabilidade implica hiperbolicidade para fluxos.

No capítulo 7 estudamos os conjuntos minimalmente não-hiperbólicos, que constituem obstruções para a hiperbolicidade, tais conjuntos se dividem em duas categorias os simples e os não-simples. Em particular mostramos que tais conjuntos não-simples não existem no fecho das órbitas periódicas, para fluxos estrela sem singularidades,

No capítulo 8 introduzimos o conceito de ciclos heterodimensionais. Tais ciclos formam um mecanismo para prevenir a hiperbolicidade, e o principal resultado deste capítulo é mostrar que tais ciclos não existem diante da propriedade estrela. Talvez esta seja uma das provas mais técnicas do livro. Com isto, obtemos a não existência de conjuntos minimalmente não-hiperbólicos simples.

O capítulo 9 então culmina com a prova do teorema de Gan e Wen, citada acima.

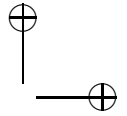
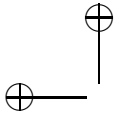
No capítulo 10 apresentamos avanços sobre o estudo de fluxos estrela com singularidades e introduzimos o conceito de hiperbolicidade seccional.

O livro termina com quatro apêndices. No primeiro coletamos os resultados básicos de dinâmica hiperbólica. No segundo apêndice, coletamos e enunciamos diversas versões do lema de Franks. Como apenas enunciamos o importante teorema que mostra dominação nas órbitas periódicas a partir da propriedade estrela, que é um teorema longo, apresentamos a prova de uma versão mais simples no caso de difeomorfismos em superfícies no terceiro apêndice, para ilustrar os métodos usados no caso geral. No último apêndice apresentamos dicas e/ou soluções dos diversos exercícios deixados ao longo do texto.

Finalmente, os autores agradecem a Davi Obata pela inestimável colaboração na confecção deste livro. Também agradecem ao prof. Carlos Morales pelas conversas frutíferas a respeito da hiperbolicidade seccional. Alexander Arbieto agradece a hospitalidade do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, ele agradece também a todo o grupo que participa do Seminário de Teoria Ergódica da UFRJ, que acontece todas as terças e quintas, pelo ambiente agradável que o grupo proporciona, ele agradece a Annelise Casellato pela paciência e carinho, finalmente ele dedica este livro a sua querida irmã Eliane Regina Mendoza Arbieto. Bruno Santiago agradece ao primeiro autor, pela oportunidade de aprender essa matemática maravilhosa e por sempre nos motivar a ir cada vez mais longe, agradece também aos colegas da UFRJ, pelas excelentes e animadas discussões matemáticas e não-matemáticas. Ele dedica este trabalho a Nathália Campagnani, por todo o amor que lhe tem. Tatiana Soderó agradece ao primeiro autor pela oportunidade de participar deste engrandecedor projeto e dedica este livro ao seu querido namorado Marcelo Tavares pelo apoio e carinho. Este trabalho é parcialmente suportado pelo CNPq, FAPERJ e PRONEX-DS.

A.A., B.S., T.S.

Maio de 2011
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Brasil.



Capítulo 1

Estabilidade, Kupka-Smale e Fluxos Estrela

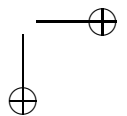
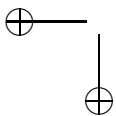
Neste capítulo, além de estabelecer certas notações básicas iremos contar um pouco da história da conjectura da estabilidade, em particular, iremos apresentar a propriedade estrela.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção iremos apresentar as notações e definições básicas que serão usadas neste livro.

No que segue, M denotará uma variedade Riemanniana suave compacta e sem bordo. Todos os campos vetoriais usados estarão definidos nela. Se X é um campo C^1 então os teoremas básicos de Equações Diferenciais Ordinárias (ver [21]), aliado à compacidade, implicam que existe um fluxo $\{X_t\}_{t \in A}$ em M globalmente definido, isto é, $A = \mathbb{R}$, $X_0 = Id$ e $X_{t+s} = X_t \circ X_s$. Em geral, usaremos as letras X, Y e Z para denotar um campo.

Dado $x \in M$, a órbita de x é definida como $\{X_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e é denotada por $O(x)$. Algumas vezes usamos $O^+(x)$ e $O^-(x)$ para denotar órbita futura e passada de x respectivamente, isto é $O^+(x) = \{X_t(x)\}_{t > 0}$ e $O^-(x) = \{X_t(x)\}_{t < 0}$. Usamos também $(x, X_t(x)) = X_{[0,t]}(x) = \{X_s(x)\}_{s=0}^t$ para denotar uma corda, ou seja, um pedaço de órbita. Uma singularidade é um ponto σ tal que $X(\sigma) = 0$. O conjunto de singularidades é denotado por $Sing(X)$.



Uma órbita $O(x)$ é periódica se existe $p \in O(x)$ e $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$. Neste caso, temos que $O(x) = \{X_t(p); 0 \leq t \leq T\}$ e dizemos que p é um ponto periódico. O menor $T > 0$ que satisfaz $X_T(p) = p$ é dito o período de p e é denotado por $\pi(p)$. O conjunto de pontos periódicos é denotado por $\text{Per}(X)$. Definimos o conjunto de elementos críticos de X como

$$\text{Crit}(X) = \text{Per}(X) \cup \text{Sing}(X).$$

Hiperbolicidade de Órbitas Críticas

Definição 1.1. Uma singularidade σ é hiperbólica se para qualquer autovalor λ de $DX(\sigma)$ temos que $\text{Re}(\lambda) \neq 0$.

Para definir a hiperbolicidade de uma órbita periódica precisamos do conceito do mapa de Poincaré associado a tal órbita.

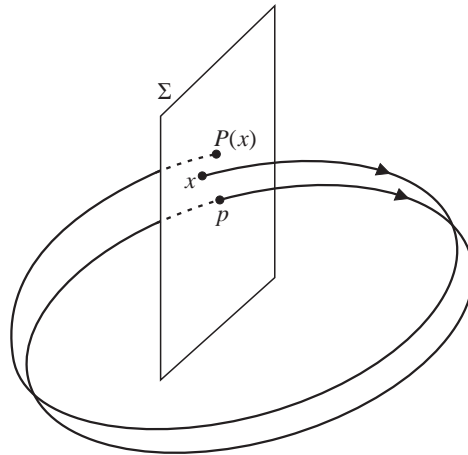


Figura 1.1: Mapa de Poincaré

Seja $O(p)$ uma órbita periódica de um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Pelo ponto p consideremos uma seção transversal Σ ao campo X . A órbita de p volta a intersectar Σ no tempo $\pi(p)$. Pela continuidade do fluxo de X , a órbita por um ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de p também volta a intersectar

Σ em um tempo próximo a $\pi(p)$. Portanto se $V \subset \Sigma$ é uma vizinhança de p suficientemente pequena, podemos definir uma aplicação $P : V \rightarrow \Sigma$ que a cada ponto $x \in V$ associa $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a intersectar Σ . Esta aplicação é denominada o *mapa de Poincaré* associado à órbita $O(x)$ e à seção Σ .

Definição 1.2. Um ponto periódico p é hiperbólico se qualquer autovalor λ de $DP(p)$ satisfaz $|\lambda| \neq 1$.

Variedades Invariantes

Dado um ponto $p \in M$, definimos os conjuntos estável/instável locais de p como

$$W_\varepsilon^{ss}(p) = \{y \in M; d(X_t(y), X_t(p)) < \varepsilon, \forall t \geq 0\},$$

e

$$W_\varepsilon^{uu}(p) = \{y \in M; d(X_{-t}(y), X_{-t}(p)) < \varepsilon : \forall t \geq 0\}$$

respectivamente. Em palavras, o conjunto estável local de um ponto $p \in M$ é formado pelos pontos cuja órbita futura está sempre próxima da órbita futura de x , e similarmente para o conjunto instável.

Poderíamos pensar também no conjunto dos pontos cuja órbita se aproxima arbitrariamente da órbita de x . Isto nos leva a definir os conjuntos *estável/instável*

$$W^{ss}(p) = \{y \in M; d(X_t(y), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\},$$

e

$$W^{uu}(p) = \{y \in M; d(X_t(y), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}.$$

Podemos também considerar os conjuntos estável/instável de uma órbita via $W^\sigma(O(p)) = \bigcup_{x \in O(p)} W^{ss}(x)$ (análogo para $W^\sigma(O(p))$), $\sigma = s, u$.

Tais conjuntos são definidos apenas dinamicamente e, em princípio, não possuem nenhuma estrutura especial.

Um fato não-trivial é o Teorema da Variedade Estável, que diz que na presença da hiperbolicidade, os conjuntos estável e instável são, na realidade, subvariedades imersas. Mais que isto, estes conjuntos são tangentes aos espaços estável/instável de p pelo mapa de Poincaré.

Para maiores detalhes sobre a teoria de variedades invariantes, o leitor pode consultar o apêndice A deste livro.

O fluxo Linear de Poincaré

Como a variedade M^d é Riemanniana, para todo x não singular podemos definir $N_x := \langle X(x) \rangle^\perp$ como o subespaço $d - 1$ -dimensional ortogonal a reta gerada por $X(x)$ em $T_x M$. Isto gera o fibrado normal N sobre o conjunto $M^* = M - \text{Sing}(X)$.

Obviamente, DX_t não deixa N invariante, porém podemos forçar a invariância através das projeções ortogonais $\pi_x : T_x M \rightarrow N_x$, e definir o *fluxo linear de Poincaré* P do campo X :

$$P_X^t(x) : N_x \rightarrow N_{X_t(x)} \text{ via } P_X^t(x) = \pi_{X_t(x)} \circ DX_t(x).$$

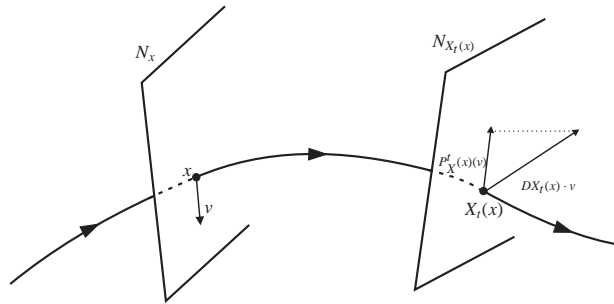


Figura 1.2: Fluxo Linear de Poincaré

O fluxo linear de Poincaré é muito útil no estudo de propriedades hiperbólicas de fluxos sem singularidades e será estudado no capítulo 4. De fato lá daremos uma definição equivalente, porém um pouco mais precisa.

Agora vamos relacionar o fluxo linear de Poincaré com o mapa de Poincaré. A primeira observação é que podemos definir, de modo inteiramente análogo, o mapa de Poincaré para uma órbita *não-periódica*. Com efeito, seja $x \in M - \text{Sing}(X)$, e fixe um tempo $t \in \mathbb{R}$, de modo que $X_t(x) \neq x$. Considerando seções transversais pequenas em x e em $X_t(x)$, respectivamente Σ_x e $\Sigma_{X_t(x)}$, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, a aplicação $P : \Sigma_x \rightarrow \Sigma_{X_t(x)}$, que a cada $y \in \Sigma_x$ associa o primeiro ponto em que a órbita de y intersecta $\Sigma_{X_t(x)}$ é um difeomorfismo de classe C^1 (de fato, P possui a mesma classe de diferenciabilidade que o campo X). A esta apli-

ção, damos o nome de *mapa de Poincaré* de x a $X_t(x)$. Para detalhes, recomendamos ao leitor [21].

Uma observação importante é que se as seções transversais são escolhidas de um modo conveniente, então a derivada do mapa de Poincaré é o fluxo linear de Poincaré, como mostra o exercício a seguir. Aqui $\exp : TM \rightarrow M$ denota o mapa exponencial de M (veja [23]).

Exercício 1.3. *Sejam $x \in M - \text{Sing}(X)$ e $y = X_t(x)$ como acima. Definindo $N_x(\delta) = B(0, \delta) \cap N_x$, temos seções transversais $\Sigma_x = \exp N_x(\delta)$ e $\Sigma_y = \exp N_y(\delta)$. Nestas condições, prove que se $P : \Sigma_x \rightarrow \Sigma_y$ é o mapa de Poincaré e $P'_x(x) : N_x \rightarrow N_y$ é o fluxo linear de Poincaré, então temos*

$$DP(x) = P'_x(x).$$

Recorrência, Futuro e Passado

Um conjunto que carrega a informação assintótica do sistema é o conjunto não errante. Por definição, o conjunto não-errante de X , denotado por $\Omega(X)$ é definido da seguinte maneira. Dizemos que $x > y$ se para toda vizinhança U de x e V de y existe $T > 0$ tal que $X_T(U) \cap V \neq \emptyset$. Desta forma definimos $\Omega(X) = \{x; x > x\}$.¹

Podemos olhar a informação assintótica dada por um único ponto. Definimos o conjunto ω -limite de x como

$$\omega(x) = \{y \in M; \text{ existe } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } X_{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

Analogamente, o conjunto α -limite é

$$\alpha(x) = \{y \in M; \text{ existe } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } X_{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

A topologia C^1

Sejam X e $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, defina²

$$d(X, Y) = \sup_{x \in M} \|X(x) - Y(x)\| \text{ e } d(DX, DY) = \sup_{x \in M} \|DX(x) - DY(x)\|.$$

¹Observe que não é claro que $>$ seja transitiva, de fato este é um ponto interessante na teoria da dinâmica genérica.

²Na verdade a definição usa cartas locais. Para maiores detalhes veja [21]

Dizemos que dois campos X e $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ estão $C^1 - \epsilon$ - próximos se

$$\max\{d(X, Y), d(DX, DY)\} < \epsilon.$$

Em particular, em todo o livro, a notação $X_n \rightarrow X$ significa que os campos $X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$ convergem a $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ na topologia C^1 .

Um subconjunto de um espaço topológico é residual se é a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos. Um espaço topológico é de Baire se todo subconjunto residual é denso.

Considere o espaço $C^1(M, \mathbb{R}^s)$ de aplicações de classe C^1 definidas na variedade compacta M . Sendo $C^1(M, \mathbb{R}^s)$ um espaço métrico completo temos que este é um espaço de Baire. Mais ainda, $C^1(M, \mathbb{R}^s)$ é separável, isto é, possui uma base enumerável de abertos (Ver [21]).

Lembrando que sendo $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção natural, um campo C^1 é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ é a identidade em M , a partir disso vemos que $\mathfrak{X}^1(M)$ é subconjunto fechado de $C^1(M, \mathbb{R}^s)$, logo $\mathfrak{X}^1(M)$ é um espaço de Baire separável.

O leitor pode verificar que a topologia C^1 é invariante por *scaling*. Isto é fundamental, pois permite realizar perturbações locais. Estas são usadas no *closing lemma*, *connecting lemma* etc. Em topologias mais altas estes resultados estão em aberto. Por este motivo neste livro sempre consideramos a topologia C^1 .

1.2 Fluxos Kupka-Smale

Uma classe de fluxos muito usada na teoria são os fluxos Kupka-Smale.

Definição 1.4. *Um campo X é Kupka-Smale se todo elemento crítico é hiperbólico e além disso se σ_1 e σ_2 são elementos críticos de X , então $W^s(O(\sigma_1))$ é transversal a $W^u(O(\sigma_2))$.*

Sua importância vem dos seguintes fatos. Por definição eles são fontes de hiperbolicidade local, já que todo elemento crítico é hiperbólico, o teorema de Hartman-Grobman diz então que numa vizinhança de qualquer elemento crítico a dinâmica é linear. Isto também leva a estabilidade local do sistema próximo a tais pontos. Tais fluxos também não possuem comportamentos homoclínicos ou heteroclínicos não-transversais, isto é bem útil, como ficará mais claro no decorrer do texto. Além disso, é conhecido que tais fluxos são abundantes, como afirma o próximo teorema.

Teorema 1.5 (O teorema de Kupka-Smale (teorema 3.1 de [21], p.118)).
Existe um residual KS de $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que todo $X \in \text{KS}$ é um campo Kupka-Smale.

1.3 Estabilidade Estrutural e Ω -Estabilidade

Uma das principais noções em sistemas dinâmicos é a de estabilidade. A grosso modo, dizer que um sistema é estável é dizer que qualquer sistema suficientemente próximo deste tem a mesma dinâmica (ou estrutura de órbitas) que o original. Em particular, o estudo da dinâmica de um implica o estudo da dinâmica do outro. Isto é extremamente útil, pois ao modelar um problema, arredondamentos dos dados experimentais, ou truncamento de certas quantidades são feitos, o que geram fluxos próximos do fluxo original. A estabilidade permite então estudar o fluxo gerado a partir do estudo do ideal.

De qualquer maneira, matematicamente, o significado preciso de estabilidade (do ponto de vista topológico) é o seguinte.

Definição 1.6. *Um campo de vetores X é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando as orientações das trajetórias, isto é, se $p \in M$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$, $h(X_t(p)) = Y_{\bar{t}}(h(p))$ para algum $0 < \bar{t} < \epsilon$.*

Podemos restringir o estudo a parte assintótica do sistema.

Definição 1.7. *Um campo de vetores X é Ω -estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando as orientações das trajetórias, isto é, se $p \in \Omega(X)$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$, $h(X_t(p)) = Y_{\bar{t}}(h(p))$ para algum $0 < \bar{t} < \epsilon$.*

Em ambos os casos, a aplicação h é dita uma conjugação.

1.4 Fluxos Estrela

O teorema de Kupka-Smale diz que a hiperbolicidade de *todos* os elementos críticos ocorre em um residual. Fica natural então o estudo dos sistemas

cujos elementos críticos são todos hiperbólicos de maneira robusta e isto leva a noção central abordada neste livro.

Definição 1.8. Dizemos que um campo X é estrela se existe uma vizinhança \mathcal{U} de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$ e $y \in \text{Crit}(Y)$ então y é hiperbólico.

O real motivo de definir fluxos estrela não é apenas uma extensão da definição de fluxos Kupka-Smale e sim de toda uma teoria ao redor da chamada conjectura da estabilidade. Tais motivos ficarão claros até o fim deste capítulo.

Uma classe de exemplos de fluxos estrela é gerada por campos Axioma A sem ciclos. Para isto iremos relembrar rapidamente os conceitos relacionados a hiperbolicidade de conjuntos.

Definição 1.9. Um conjunto compacto invariante Λ é dito hiperbólico se existe uma decomposição contínua do espaço tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus (X) \oplus E^u$ e constantes $C > 0$ e $\lambda > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ vale:

$$\|DX_t(x)E^s(x)\| \leq Ce^{-\lambda t} \text{ e } \|DX_{-t}(x)E^u(x)\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Observação 1.10. Uma observação muito importante na definição de hiperbolicidade é que ela implica que toda singularidade que o conjunto Λ possua tem que ser isolada no conjunto. Isto é devido à continuidade da decomposição, que implica na continuidade das dimensões dos fibrados. Assim, a dimensão de cada fibrado tem que ser localmente constante, e isto claramente é falso se houver uma singularidade aproximada por órbitas periódicas (ou mesmo regulares) dentro do conjunto hiperbólico.

Seguindo Smale [68], dizemos que um campo é Axioma A se o conjunto não errante $\Omega(X)$ é hiperbólico e vale

$$\Omega(X) = \overline{\text{Crit}(X)}.$$

Os campos Axioma A formam uma classe de exemplos de campos estrela ao adicionarmos a condição de não-ciclos (ver apêndice A).

Exercício 1.11. Todo campo Axioma A sem ciclos é estrela.

1.5 O Lema de Franks

Resulta que o estudo de fluxos estrela esta intimamente ligado com a estabilidade. Isto depende do chamado *Lema de Franks*.

Em geral, o conjunto $B_r(x) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$ denotará a bola de centro em x e raio r , onde d é a métrica induzida pela métrica Riemanniana de M . As vezes, usaremos a notação $B(x, r)$ para tal bola.

Por compacidade, podemos assumir que a aplicação exponencial $exp_p : T_p M(1) \rightarrow M$ está bem definida para todo $p \in M$ (veja [23]), onde

$$T_p M(1) = \{v \in T_p M : \|v\| \leq 1\}.$$

O objetivo desta seção é mostrar que Ω -estabilidade implica estrela. A solução deste problema no caso de difeomorfismos foi dada por Franks em [27]. Para resolvê-lo, Franks criou um lema que consegue uma perturbação do difeomorfismo original a partir de uma perturbação da sua derivada, mas de um modo especial: a perturbação obtida é linear nas coordenadas exponenciais de M .

No entanto como o Lema de Franks é um resultado um pouco técnico, sua prova será postergada até o apêndice B. Aqui vamos enunciar as versões para singularidades e para órbitas periódicas no caso de fluxos, de um modo conveniente. Os enunciados precisos o leitor irá encontrar no apêndice B.

Começamos com a versão para singularidades.

Lema 1.12 (Lema de Franks para singularidades). *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\sigma \in \text{Sing}(X)$. Então para toda C^1 -vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X , existem $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que se $L : T_p M \rightarrow T_p M$ é uma aplicação linear satisfazendo $\|L - DX(\sigma)\| < \delta$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ de modo que:*

$$Y(x) = (D_{exp_p^{-1}(x)} exp_p \sigma) \circ L \circ exp_p^{-1}(x), \text{ se } x \in B_\epsilon(\sigma)$$

e $Y(x) = X(x)$ no complementar de $B_r(\sigma)$ para algum $r > \epsilon$.

No enunciado da versão para órbitas periódicas vamos usar a seguinte linguagem: dado um ponto p que não é singularidade, chamamos de *tubo de raio ϵ centrado na órbita de p* a imagem de $B_\epsilon(p) \cap \Sigma$ pelo fluxo, onde Σ é uma seção transversal em p . O objeto possui bem o significado que o nome sugere: pegamos a bola de raio ϵ ao redor de p dentro da seção transversal e a levamos pelo fluxo, gerando assim um tubo. Veja a figura 1.4 no caso em que a órbita de p é periódica.

A versão para órbitas periódicas de fluxos do Lema de Franks diz que dada uma perturbação linear da derivada do mapa de Poincaré da órbita, existe um campo próximo que realiza este isomorfismo linear como mapa de Poincaré, em coordenadas exponenciais. Além disso, o campo obtido coincide com o original fora de um tubo centrado na órbita periódica.

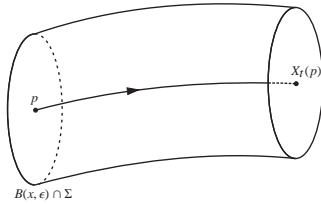


Figura 1.3:

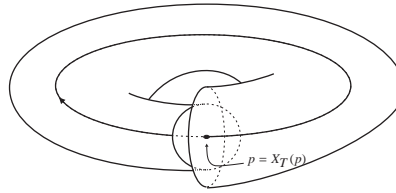


Figura 1.4:

Lema 1.13 (Lema de Franks para órbitas periódicas). *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $p \in \text{Per}(X)$ e $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a correspondente aplicação de Poincaré, onde Σ é uma seção transversal conveniente. Considere \mathcal{U} uma C^1 -vizinhança de X . Então, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ com a seguinte propriedade. Se $L : N_p \rightarrow N_p$ é um isomorfismo linear com $\|L - DP(p)\| < \delta$, então existe um campo $Y \in \mathcal{U}$ que satisfaz:*

- $Y(x) = X(x)$, se x não pertence ao tubo de raio ϵ centrado na órbita de p ,
- $p \in \text{Per}(Y)$ e
- se $P_Y : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é o mapa de Poincaré para Y , então

$$P_Y(x) = \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}(x), \text{ se } x \in B_\epsilon(p) \cap \Sigma$$

e $P_Y(x) = P(x)$ se $x \notin B_r(p) \cap \Sigma$, para algum $r > \epsilon$ tão próximo quanto queiramos.

Na verdade, o Lema de Franks é uma coleção vários resultados diferentes com a mesma filosofia: produzir perturbações não-lineares de um dado sistema, a partir de perturbações da sua linearização (a derivada).

De fato, veremos (e usaremos) outras versões, algumas mais fortes, do lema de Franks nos próximos capítulos, enunciaremos precisamente tais versões quando for necessário. Em particular, usaremos a versão original (encontrada em [27]) para difeomorfismos no apêndice C deste livro.

Com as duas versões enunciadas nesta seção, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.14. *Se X possui um elemento crítico não hiperbólico então X não é estruturalmente estável.*

Demonstração. Faremos o caso em que o elemento crítico é uma órbita periódica. O caso de uma singularidade é análogo.

Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $p \in \text{Per}(X)$ não hiperbólico com período π . Sejam $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ vizinhança C^1 de X e $\epsilon > 0$. Considere $\delta > 0$ dado pelo Lema de Franks (para órbitas periódicas). Seja o mapa de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, de X em p . Se a seção transversal é conveniente, como observamos acima, a derivada do mapa de Poincaré é dada pelo fluxo linear de Poincaré, $P^\pi : N_p \rightarrow N_p$. A rigor, para esta demonstração não é necessário falar do fluxo linear de Poincaré e poderíamos usar uma seção transversal qualquer. Porém, como ele será de fundamental importância nos capítulos que seguem, vamos acostumar o leitor com o seu uso desde já. Como p não é hiperbólico, P^π possui um autovalor no círculo unitário do plano complexo.

Nesse caso, existe $L : N_p \rightarrow N_p$ linear, δ próxima de P^π possuindo autovalor λ que é uma j -ésima raiz da unidade, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Pelo lema de Franks, existe um campo $Y \in \mathcal{U}$ tal que $p \in \text{Per}(Y)$ cujo mapa de Poincaré $P_Y : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é conjugado ao mapa linear L pela aplicação exponencial numa pequena vizinhança de p em Σ .

Logo, tomando v um autovetor de $L : N_p \rightarrow N_p$ associado ao autovalor λ , temos que:

$$P_Y^j(\exp_p(sv)) = \exp_p(L^j sv) = \exp_p(sv),$$

desde que $|s|$ seja pequeno, de forma que $\exp_p sv$ esteja na vizinhança de p onde vale a equação de conjugação.

Segue que o mapa de Poincaré de Y , e portanto o fluxo Y_t , possuem uma curva de pontos periódicos de período j em órbitas distintas. Em particular, Y possui infinitas órbitas periódicas de período j .

Por outro lado, pelo teorema de Kupka-Smale, existe um campo Z próximo de Y com finitas órbitas periódicas de período j .

Isso prova que X não é estruturalmente estável. \square

O que a proposição 1.14 diz é que um campo estruturalmente estável possui somente elementos críticos hiperbólicos. Como estabilidade estrutural é uma propriedade aberta, isso implica que todo campo estruturalmente estável é estrela. No entanto, observe que durante a prova, a conjugação com campos suficientemente próximos somente foi usada para mostrar que um campo com infinitas órbitas periódicas de um certo período não pode ser conjugado a um campo que possui finitas órbitas periódicas

com tal período (analogamente no caso de singularidades). No entanto, isto claramente impede que os referidos campos sejam Ω -conjugados, pois todos os elementos críticos fazem parte do conjunto não-errante. Desse modo temos o seguinte resultado:

Teorema 1.15. *Todo campo Ω -estável é estrela.*

1.6 A conjectura da Estabilidade

Vamos resumir o que vimos até agora. Primeiramente, vimos que os sistemas Axioma A sem ciclos são Ω -estáveis. Isto gera naturalmente o seguinte problema, que ficou conhecido como a conjectura da estabilidade:

“Todo sistema Ω -estável é Axioma A sem ciclos?”

Problema semelhante foi resolvido por Mañé, no colossal trabalho [45], no caso de difeomorfismos³ e usando a noção de estabilidade estrutural. Mais precisamente, Mañé mostrou que um difeomorfismo estruturalmente estável que satisfaz a condição de transversalidade forte é hiperbólico (recomendamos [45] ao leitor, para as definições precisas).

A força dos métodos usados por Mañé permitiu a Palis, em [56], resolver o problema acima no caso de difeomorfismos.

De qualquer forma, Mañé já acreditava que a propriedade estrela fosse suficiente para obter hiperbolicidade. Isto de fato é verdade e foi mostrado por Hayashi em [33], veja também [3]. Precisamente, Hayashi mostrou que se um difeomorfismo não é aproximado por difeomorfismos com pontos periódicos não hiperbólicos então ele é Axioma A sem ciclos.

Naturalmente, tentou-se atacar a conjectura da estabilidade para fluxos, porém levaram-se 9 anos até que Hayashi em [32] resolveu o problema ao mostrar seu poderoso *connecting lemma*. Uma das dificuldades é mostrar que as singularidades não são acumuladas por órbitas não-errantes, para este fim entra o *connecting lemma*. Outra dificuldade versa sobre o modo como uma órbita periódica é destruída, no caso de difeomorfismos, a órbita deixa de ser hiperbólica antes de desaparecer, já no caso de fluxos isto não é mais verdade. Isto será discutido no capítulo 5. Mais ainda, apresentaremos a prova da conjectura no capítulo 6.

³Lembramos que estamos sempre usando a topologia C^1 , todos os problemas desta seção estão em aberto para topologias maiores, isto é, C^r com $r \geq 2$.

Apresentada então a dificuldade extra no caso de fluxos, fica a pergunta se a propriedade estrela é suficiente para que um campo seja Axioma A. Acontece que o famoso *atrator de Lorenz* é um contra-exemplo para isto. O motivo e mais exemplos serão vistos no capítulo 10.

De qualquer maneira, tais exemplos sempre apresentam singularidades, portanto uma pergunta mais sensata é se a propriedade estrela implica hiperbolicidade para fluxos sem singularidades. A resposta é afirmativa e foi dada por Gan e Wen.

Teorema 1.16 (Gan-Wen). *Todo fluxo estrela sem singularidades é Axioma A sem ciclos.*

A prova deste teorema será dada no capítulo 9. Como vimos no teorema 1.15, naturalmente o resultado de Gan e Wen (com uma ligeira modificação) implica o resultado de Hayashi. O leitor pode se perguntar por que não dar apenas a prova deste resultado final. Os motivos são os seguintes: por opção didática tentamos apresentar resultados cada vez mais fortes, culminando no teorema de Gan e Wen, para mostrar e localizar aos poucos as dificuldades que aparecem no problema; além disso veremos como as idéias originais de Mañé e as de Liao aparecem no decorrer da teoria.

De qualquer forma, é de interesse investigar o que ocorre com campos estrela com singularidades, tal problema continua em aberto, porém algumas respostas parciais existem e serão vistas no capítulo 10.

Outros Cenários

A conjectura da estabilidade ou mesmo o problema de saber se a propriedade estrela implica hiperbolicidade faz sentido em outros cenários.

Por exemplo, podemos nos restringir ao contexto de fluxos incompressíveis. Como M é uma variedade Riemanniana podemos lidar apenas com campos tais que sua divergência seja nula, isto é, $\text{div } X \equiv 0$. O fluxo gerado por tal campo é dito incompressível pelo seguinte fato.

Exercício 1.17. *Seja X um campo com divergência nula e Leb a medida de Lebesgue gerada pela métrica Riemanniana, então para todo boreleano A e para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\text{Leb}(X_t(A)) = \text{Leb}(A).$$

Vamos denotar por $\mathfrak{X}_m^1(M)$ o espaço de campos com divergência nula, munido da topologia C^1 . Podemos definir a versão da propriedade estrela neste cenário.

Definição 1.18. *Seja X um campo em $\mathfrak{X}_m^1(M)$. Dizemos que X é incompressivelmente estrela se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}_m^1(M)$ de X tal que toda órbita crítica de $Y \in \mathcal{U}$ é hiperbólica.*

A diferença entre esta definição e a definição geral da propriedade estrela é que neste caso, em princípio, o campo pode ser aproximado por um que possua uma órbita crítica não hiperbólica, porém o campo que aproxima não terá divergência nula.

Fica claro que uma das dificuldades de estender os resultados se deve ao fato de que as perturbações devem ser feitas de tal forma que o campo final ainda tenha divergência nula.

Por outro lado, veremos que a incompressibilidade implica em algumas simplificações em certos argumentos e também torna certos resultados mais fortes. Por exemplo, uma vez mostrado que um fluxo incompressível é Axioma A, então automaticamente ele é Anosov. Isto simplesmente pelo fato, que será visto na próxima seção, que para todo fluxo incompressível temos que $\Omega(X) = M$.

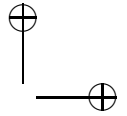
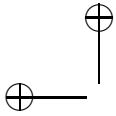
No texto, comentaremos brevemente como se dá a extensão dos resultados para o contexto de fluxos incompressíveis.

Outros contextos podem ser considerados, mas não trataremos neste livro. Existe o contexto de campos Hamiltonianos. Neste caso, os campos a serem considerados vem da seguinte construção. Fixe ω uma 2-forma diferencial fechada e não degenerada em M . Dada uma função diferenciável $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, assim como fazemos para encontrar o campo gradiente usando a métrica Riemanniana, podemos encontrar o campo Hamiltoniano X_H como o único campo que satisfaz a fórmula:

$$\omega(X_H(x), v) = DH(x)v \text{ para todo } v \in T_x M.$$

Podemos então definir a propriedade estrela de maneira análoga usando apenas estes campos na definição. Mais informações, ver [16]

Outro possível cenário são as ações de grupos. Seja G um grupo de Lie, dizemos que uma ação de G sobre a variedade M é uma aplicação diferenciável da forma $A : G \times M \rightarrow M$. Neste caso, para cada $g \in G$, podemos ver a aplicação $A_g : M \rightarrow M$ como um difeomorfismo, onde A_g é



definido por:

$$A_g(x) := A(g, x) \text{ para todo } x \in M.$$

Observe que o caso em que o grupo $G = \mathbb{Z}$ obtemos a teoria para difeomorfismos, enquanto que se $G = \mathbb{R}$ obtemos o caso de fluxos.

Pode-se definir diversos conceitos dinâmicos para ações de grupos e a conjectura da estabilidade faz sentido neste cenário, mesmo que ainda esteja em aberto. Maiores detalhes ver [8].

1.7 Breves palavras sobre a Teoria Ergódica

No decorrer do livro usaremos alguns resultados básicos de teoria ergódica que iremos apresentar nesta seção. As demonstrações destes resultados são *standard* e referimos o leitor ao livro [41] para mais detalhes.

Dado $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo, dizemos que uma medida de probabilidade μ é f -invariante se para todo conjunto mensurável $A \subset M$ temos que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Se X é um campo, então dizemos que a medida μ é X -invariante se ela for X_t -invariante para todo t real. Lembrando que X_t é o fluxo gerado.

A presença de uma medida invariante acaba gerando recorrência, e isto é o conteúdo do teorema de recorrência de Poincaré.

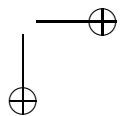
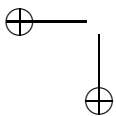
Teorema 1.19. *Se X é um campo (resp. f é um difeomorfismo) com μ uma medida X -invariante (resp. f -invariante) então μ -quase todo ponto x é um ponto recorrente isto é $x \in \omega(x)$.*

Uma boa fábrica de medidas invariantes são as medidas orbitais. Denotamos por δ_x a medida de Dirac associada ao ponto x , isto é, $\delta_x(A) = 1$ se $x \in A$, caso contrário temos $\delta_x(A) = 0$.

Teorema 1.20. *Dado um ponto $x \in M$, qualquer ponto de acumulação do conjunto de medidas de probabilidade*

$$\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{X_s(x)} ds \right\}_{T>0},$$

é uma medida X -invariante.



De fato, variando ligeiramente a prova deste teorema e usando a compacidade de M , pode-se mostrar que dado $m > 0$, os pontos de acumulação de

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \delta_{X_{mi}(x_n)} \right\}_{n>0},$$

onde x_n é uma sequência de pontos em M , ou mesmo de

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \delta_{(Y^n)_{mi}(x_n)} \right\}_{n>0},$$

onde $Y^n \rightarrow X$ são medidas X_m -invariantes.

As medidas obtidas por tais processos são chamadas de *medidas orbitais*.

Outra construção útil é a seguinte, dado uma medida μ e um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ podemos definir outra medida $f_*(\mu)$, dita o *push-forward* de μ por f , através da fórmula $f_*(\mu)(A) := \mu(f^{-1}(A))$ para todo A mensurável. Observe que nesta linguagem, dizer que μ é f -invariante equivale a dizer que $f_*(\mu) = \mu$.

Uma medida invariante μ é dita *ergódica* se dado qualquer conjunto A invariante pelo fluxo, isto é, $X_t(A) = A$ para todo t , temos que $\mu(A) = 1$ ou 0 .

Podemos caracterizar as medidas ergódicas da seguinte forma, se toda função μ -invariante pelo fluxo, isto é, uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ X_t(x) = f(x)$ para μ -quase todo x , é constante fora de um conjunto de medida μ -nula.

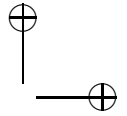
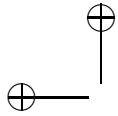
Finalmente temos o teorema de Birkhoff, central em teoria ergódica.

Teorema 1.21. *Seja μ uma medida de probabilidade invariante para $f : M \rightarrow M$. Então para μ -quase todo ponto $x \in M$ e toda função contínua ϕ o seguinte limite existe:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)).$$

Se μ for ergódica então este limite é igual a $\int \phi d\mu$.

O leitor pode encontrar uma prova deste teorema em [41].



Capítulo 2

Poços e Singularidades

2.1 O Teorema de Pliss

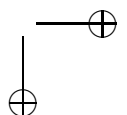
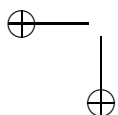
Por decomposição espectral, uma obstrução para ser Axioma A é ter infinitos poços (ou fontes). Mesmo assim poderia não ser obstrução para Ω -estabilidade. Mas de fato é. Vamos ver nesta seção um resultado dado por Pliss, em [59], que nos diz que um campo estrela tem finitos poços.

Teorema 2.1 (Pliss). *Se X é estrela então X tem finitos poços e fontes.*

O resultado é intuitivo. De fato, caso um campo tenha infinitos poços podemos intuir que estes poços vão perdendo hiperbolicidade, ou seja, há poços com autovalores (dos respectivos mapas de Poincaré) que vão se aproximando do círculo unitário. Então, pelo lema de Franks, seria possível obter um campo Y próximo do campo original com um ponto periódico não-hiperbólico e isto violaria a propriedade estrela.

De fato, veremos mais adiante (capítulo 4) que a propriedade estrela impedirá a presença dos tais autovalores fracos. Então mudamos um pouco o problema e iremos mostrar que qualquer campo com força uniforme nos seus poços não pode ter infinitos poços.

Como ferramenta para mostrar a finitude de poços, Pliss introduz um importante resultado numérico, que se mostrou muito útil em outras situações, ver [2], [77], e também [11].



Lema 2.2 (Lema de Pliss). *Dados $\epsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, então existe $K > 0$ tal que se $H : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e satisfaz $H(0) = 0$, $H(T) < cT$ e $\inf H' > a$, então o conjunto*

$$P_\epsilon = \{t \in [0, T] \mid H(s) - H(t) \leq (c + \epsilon)(s - t) \text{ para todo } s \in [t, T]\},$$

tem medida de Lebesgue maior do que KT .

Demonstração. Defina $G(s) = H(s) - (c + \epsilon)s$. Temos que $G(0) = 0$ e por hipótese $G(T) < -\epsilon T$. Podemos então, já que a função tem que decrescer, definir dois tipos de sequências, ambas podendo ser finitas.

Seja $\{a_i\}$ uma sequência de pontos críticos de G tal que se $x > a_i$ então $G(x) < G(a_i)$, caso existam apenas finitos pontos com tal propriedade, definimos o último termo da sequência como $a_j = T$. De qualquer maneira, como a função tem partes em que tem que decrescer temos que $a_i \rightarrow T$.

Seja também $\{b_i\}$ uma sequência tal que b_i é o primeiro número tal que $b_i > a_i$ e $G(b_i) = G(a_{i+1})$.

Seja $B = -\inf G'$, como G tem que acabar decrescendo, este B é estritamente positivo. Pelo Teorema do valor médio obtemos que:

$$\frac{G(a_i) - G(b_i)}{B} \leq b_i - a_i.$$

Afirmamos que $\bigcup_i (a_i, b_i) \subset P_\epsilon$. De fato isso é verdade pela seguinte observação:

$$\begin{aligned} H(s) - H(t) &= H(s) - (c + \epsilon)s - (H(t) - (c + \epsilon)t) + (c + \epsilon)(s - t) \\ &= G(s) - G(t) + (c + \epsilon)(s - t). \end{aligned}$$

Assim,

$$G(s) - G(t) + (c + \epsilon)(s - t) < (c + \epsilon)(s - t) \text{ se, e só se } G(s) < G(t).$$

Agora tome $t \in (a_i, b_i)$, para algum i . Se para algum $s > t$ tivermos que $G(s) = G(t)$, observe que isto implicará a existência de um ponto crítico que satisfaz a_{i+1} , logo por definição de b_i , temos que $t = b_i$. Mas isto gera uma contradição com $t \in (a_i, b_i)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Leb}(P_\epsilon) &> \sum_i (b_i - a_i) \geq \sum_i \frac{G(a_i) - G(b_i)}{B} = \\ &= \sum_i \frac{G(a_i) - G(a_{i+1})}{B} = \frac{G(a_1) - G(T)}{B}. \end{aligned}$$

Como $G(a_1) \geq 0$, uma vez que é o máximo global de G , temos que

$$\text{Leb}(P_\epsilon) \geq \frac{-G(T)}{B} \geq \frac{\epsilon T}{B},$$

Para completar a prova basta observar que $G'(t) = H'(t) - (c + \epsilon)$, e como $B = -\inf G' \geq (c + \epsilon) - A$, temos que

$$\frac{\text{Leb}(P_\epsilon)}{T} \geq \frac{\epsilon}{c + \epsilon - A} = K,$$

onde K é uma constante. E isto conclui a prova. \square

Aplicaremos este lema, substituindo a função H pela norma da inversa da derivada de um poço periódico em que enxergamos contração no período. O que esse lema nos diz é que existem muitos intervalos de tempo ao longo da órbita, tal que enxergamos contração uniforme, possivelmente um pouco pior, nesses pedaços de órbita.

O próximo lemma nos diz que os poços de um fluxo estrela apresentam contração uniforme. Isto será apresentado mais a frente, no teorema 4.13¹ num contexto muito mais geral. Obviamente, por reversão no tempo, um resultado análogo vale para fontes.

Lema 2.3. *Se X é estrela então existem constantes $m \in \mathbb{N}$, $\sigma < 0$ e uma vizinhança \mathcal{U} de X na topologia C^1 tal que se $Y \in \mathcal{U}$ então todo poço periódico de Y com período maior que m apresenta contração uniforme no período dada por σ .*

Prova do teorema 2.1. A demonstração será feita para poços, de maneira análoga pode-se mostrar a finitude de fontes.

Sejam p_n os poços periódicos. Pelo teorema de Hartman-Grobman, o período deles não pode ser limitado. Fixe σ e m dados pelo lema anterior. Tome n grande o suficiente tal que $\pi(p_n) > m$ e seja $\sigma_1 = \sigma + \epsilon < 0$. Pelo lema 2.2, existem muitos t 's em $[0, \pi(p_n)]$ com contração uniforme em arcos de órbitas, isto é,

$$\|DX_s(X_t(p_n))\| < \sigma_1(s - t); \text{ para todo } s \in [t, \pi(p_n)].$$

Por continuidade da derivada, existe $r > 0$ tal que se z está na bola $B := B(X_t(p_n), r)$ então $\|DX_s(z)\| < \sigma_2 < 0$. Assim, isto nos diz que $X_{s-t}(B) \subset B$,

¹Como lidamos com poços, e por compacidade, a estimativa dada pelo teorema 4.13 para P_X^t pode ser usada para DX_t .

mas então pelo teorema do ponto fixo de Brouwer [49] existe uma órbita periódica em B , ou seja, $q \in \text{Per}(X)$ tal que $O(q) \subset B$. Mas então B é uma bacia para $O(q)$ e $O(p_n) \cap B \neq \emptyset$. Mas uma órbita periódica não pode estar na bacia de uma outra órbita periódica. Esta contradição conclui a demonstração. \square

2.2 Explosões

Nesta seção observamos que a presença de ciclos entre a variedade estável e instável de singularidades é uma obstrução para a Ω -estabilidade no caso Axioma A. Ou seja, se mostrarmos que Ω -estabilidade implica que o campo é Axioma A, então de fato, temos que o campo é Axioma A sem ciclos.

Teorema 2.4. *Se $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é Axioma A Ω -estável, então não existem ciclos entre as peças básicas de sua decomposição espectral.*

Demonstração. A demonstração será dividida em dois casos. Mas a idéia toda da demonstração está em mostrar que dado um n -ciclo, com $n \geq 2$, então existe um $n-1$ -ciclo após uma pequena perturbação. Com isso iremos gerar pontos que em princípio não deveriam estar no não errante, mas de fato estão. Ou seja de certa forma estamos “explodindo” o não-errante.

No primeiro caso vamos supor que $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ é um n -ciclo formado apenas por singularidades. Sejam $x \in W^u(\sigma_0) \cap W^s(\sigma_1)$ e $y \in W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$. O ingrediente principal para criar o $n-1$ -ciclo é o λ -lema. Para isso basta observar que qualquer disco pequeno transversal a $W^s(\sigma_1)$ em x acumula em y no futuro, ou seja, se D é um disco pequeno transversal a $W^s(\sigma_1)$ em x então $y \in \bigcup_{t \geq 0} X_t(D)$.

Fazendo uma pequena perturbação com suporte em x e y obtemos Y próximo de X com uma interseção entre $W^u(\sigma_0)$ e $W^s(\sigma_2)$, criando um $n-1$ -ciclo, pois teremos pontos arbitrariamente próximos da variedade instável de σ_0 que acumulam em y .

Fazendo esse processo um número finito de vezes conseguimos obter Y com um 1-ciclo, ou seja, $W^u(\sigma_0) \cap W^s(\sigma_0) \neq \emptyset$. Mas primeiro observe que pela Ω -estabilidade os conjuntos não-errantes de X e Y são conjugados, porém se x está nessa interseção do 1-ciclo, então x faz parte do não-errante, isso segue do λ -lemma, porém ele não deveria estar, pela Ω -estabilidade. Isso também justifica o termo de Ω -explosão.

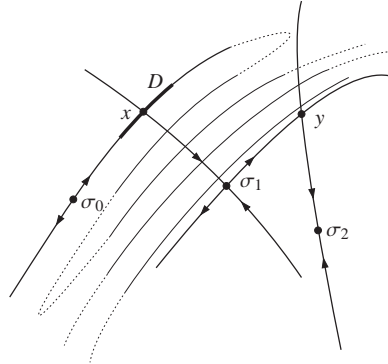


Figura 2.1:

Vamos investigar agora o caso geral, ou seja, em que há conjuntos que não são singularidades no n -ciclo. Seja $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ um n -ciclo de conjuntos hiperbólicos. Primeiro notemos que, no caso de fluxos, se $z \in \Omega_i$ temos que

$$\dim W^s(O(z)) + \dim W^u(O(z)) = \dim M + 1,$$

já que $W^\omega(O(z)) = \bigcup_t W^\omega(X_t(z)); \omega = s, t$. Observe que devido a isso podemos supor que para o índice $i = 1$ temos que

$$\dim W^s(O(z_1)) + \dim W^u(O(z_2)) \geq \dim M + 1,$$

onde $z_1 \in \Omega_1$ e $z_2 \in \Omega_2$.

Se $x \in W^s(\Omega_0) \cap W^u(\Omega_1)$ e $y \in W^s(\Omega_1) \cap W^u(\Omega_2)$, como estamos no caso Axioma A, então existem $z_0 \in \Omega_0, z_1, q_1 \in \Omega_1$ e $z_2 \in \Omega_2$ tais que $x \in W^s(O(z_0)) \cap W^u(O(z_1))$ e $y \in W^s(O(q_1)) \cap W^u(O(z_2))$. Pela observação acima, temos dimensão suficiente para tornar a interseção em y transversal, caso ela não seja. Usando a densidade das órbitas periódicas e transitividade, podemos supor que $\gamma = O(q_1)$ é uma órbita periódica e que $O(z_1)$ está próxima de γ . Pelo λ -lema, uma vez que a interseção em y é transversal, temos que $W^s(\gamma) \subset \overline{W^u(O(z_2))}$. E pela variação contínua de partes compactas das variedades invariantes, temos então que x é próximo de $\overline{W^u(O(z_2))}$, e, pelo mesmo argumento do caso anterior, fazendo uma pequena perturbação perto de x temos que $\overline{W^s(O(z_0))} \cap \overline{W^u(O(z_2))} \neq \emptyset$.

Criamos então um $n - 1$ -ciclo, fazendo isso um número finito de vezes obtemos um 1-ciclo o que gera um ponto longe de Ω que é não-errante, mais uma vez “explodindo” o não-errante. O que conclui a prova. \square

2.3 O Connecting Lemma de Hayashi

Nesta seção introduziremos o *connecting Lemma* de Hayashi, que desempenhará um papel importante ao longo do texto.

Seja Λ um conjunto hiperbólico isolado e $U = \text{viz}(\Lambda)$ uma vizinhança isoladora. Denotaremos por

$$W_\epsilon^*(\Lambda) = \bigcup_{p \in \Lambda} W_\epsilon^*(p) \text{ onde } * = s, u;$$

as variedades estável e instável local de Λ . Consideraremos os seguintes domínios fundamentais:

$$D^s = \overline{W_\epsilon^s(\Lambda) - X_1(W_\epsilon^s(\Lambda))} \text{ e } D^u = \overline{W_\epsilon^u(\Lambda) - X_{-1}(W_\epsilon^u(\Lambda))}.$$

Definição 2.5. *Uma sequência de órbitas finitas $\{\gamma_k\}$ de X é chamada uma sequência quase-homoclínica associada a Λ se γ_k acumula em D^s e D^u , e $\gamma_k \cap U^c \neq \emptyset$ para todo k .*

O *connecting lemma* trata da criação de um ponto homoclínico por uma pequena perturbação, na presença de uma sequência quase-homoclínica.

Teorema 2.6 (Connecting Lemma de Hayashi [32]). *Dados $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, uma C^1 -vizinhança \mathcal{U} de X e um conjunto hiperbólico isolado Λ . Se X tem uma sequência quase-homoclínica associada a Λ então existe $Y \in \mathcal{U}$ que coincide com X em uma vizinhança de Λ e que possui um ponto homoclínico associado a Λ .*

Ilustramos o Connecting Lemma na figura abaixo supondo que o conjunto hiperbólico isolado Λ é apenas uma singularidade σ .

Versões um pouco mais gerais do *connecting lemma* apareceram depois em [76], [75], entre outros. O enunciado que apresentamos aqui aparece em [30]. Para diferenciá-lo, damos outro nome.

Teorema 2.7 (Connecting Lemma Tunado). *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, e $z \in M - \text{Crit}(X)$. Então para qualquer $\mathcal{U} = \text{viz}^1(X)$, existem constantes $\rho > 1, T >$*

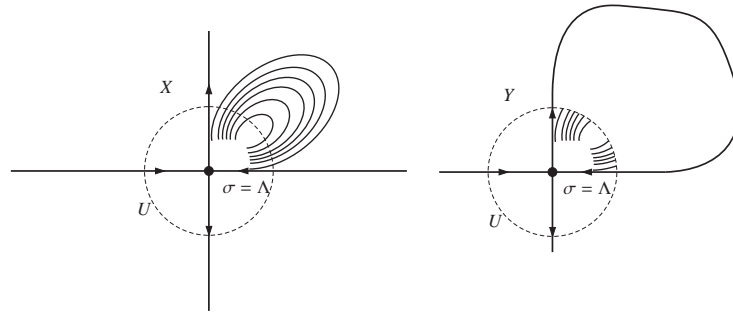


Figura 2.2: Connecting Lemma

1 e $\delta_0 > 0$ tais que para qualquer $0 < \delta \leq \delta_0$ e qualquer par de pontos x, y que estão fora de um tudo $\Delta(\delta) = \bigcup_{t \in [0, T]} B(X_t(z), \delta)$. Se a órbita positiva de x e a órbita negativa de y ambas atingem $B(z, \frac{\delta}{\rho})$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y \equiv X$ fora de $\Delta(\delta)$, y está na órbita positiva de x e a Y -órbita de x até y atinge $B(z, \delta)$.

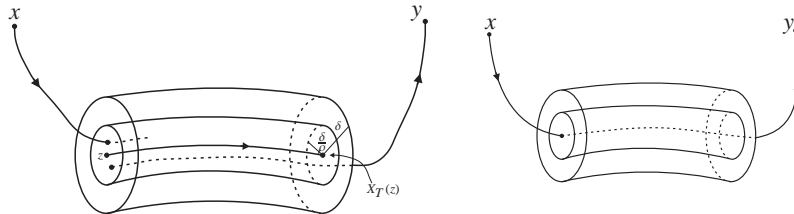


Figura 2.3: Antes da perturbação

Figura 2.4: Após a perturbação

O que essa versão do Connecting Lemma nos diz é que podemos juntar a órbita de dois pontos contanto que as órbitas deles passem um tempo suficientemente grande próximas uma da outra. Para ilustrar que este enunciado é um pouco mais geral, vamos mostrar que ele implica o *connecting lemma* de Hayashi para pontos periódicos.

Proposição 2.8. *Seja $O(p) \in \text{Per}(X)$ uma órbita periódica hiperbólica de um campo X e dois pontos $x \in \overline{W^s(O(p))} - (\{O(p)\} \cup \text{Crit}(X))$ e $y \in$*

$\overline{W^u(O(p))} - (\{O(p)\} \cup \text{Crit}(X))$. Se existirem pontos $x_n \in M - \text{Crit}(X)$ e tempos $t_n > 0$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $X_{t_n}(x) \rightarrow y$. Então para toda vizinhança \mathcal{U} de X existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y \equiv X$ em uma vizinhança de $O(p)$ e existe um ponto homoclínico z de $O(p)$ com respeito a Y .

Demonstração. A demonstração inteira é basicamente verificar que as condições do *connecting lemma* são satisfeitas e controlar o tamanho dos tubos para que possamos obter o que queremos sem modificar outras regiões.

Como por hipótese $x, y \notin \mathfrak{X}^1(M)$, então existem constantes $\rho_x, \rho_y > 1; T_x, T_y > 1; \delta_x, \delta_y > 0$ dados pelo Connecting Lemma aplicados a x e y . Tomemos então $\rho = \max \rho_x, \rho_y, T = \max T_x, T_y$ e $\delta_0 = \min \delta_x, \delta_y$.

Vamos supor que x e y não estão na mesma órbita, pois caso contrário teríamos que $x \in \overline{O(p)}$ e isso nos diz que a variedade instável acumula na variedade estável, e apenas com uma perturbação com um pequeno suporte em x nos daria o ponto homoclínico desejado. Temos então que os pedaços de órbitas $A_x = X_{[0, -T]}(x), A_y = X_{[0, T]}(y)$ e $O(p)$ são todos disjuntos uns dos outros. Agora tomemos $\delta \leq \delta_0$ e $\eta > 0$ pequenos tais que os tubos $\bigcup_{t \in [0, -T]} B(X_t(x), \delta), \bigcup_{t \in [0, T]} B(X_t(y), \delta), W_\eta^s(O(p)) - O(p)$ e $W_\eta^u(O(p)) - O(p)$ são disjuntos.

Seja U uma vizinhança de x pequena. Agora tomemos $\delta_1 \leq \delta$ pequeno suficiente tal que $B(x, \delta_1) \subset U$ e seja

$$\Delta_x(\delta_1) = \bigcup_{t \in [0, -T]} B(X_t(x), \delta_1),$$

Note que como $x \in \overline{W^s(O(p))}$ existe $q_x \in W_\eta^s(O(p))$ tal que a sua órbita negativa de atinge $B(x, \frac{\delta_1}{\rho})$ em $h = X_{-t_1}(q_x)$. Observe que $O^+(q_x) \subset W_\eta^s(O(p))$, essa observação nos diz que ao fazermos a perturbação q_x ainda estará na variedade estável. Agora repare que pela mesma observação feita no início da demonstração, se o pedaço de órbita de h até q_x , chamaremos de J , tiver y então conseguimos criar o ponto homoclínico. Então assuma que $y \notin J$, como assumimos, temos que $A_y \cap J = \emptyset$.

Para y procedemos da mesma forma. Tome $0 < \delta_2 \leq \delta$ tal que o tubo $\Delta_y(\delta_2) = \bigcup_{t \in [0, T]} B(X_t(y), \delta_2)$ é disjunto de J . Como antes, encontramos $q_y \in W_\eta^u(O(p))$ tal que a órbita positiva de q_y atinge $B(y, \frac{\delta_2}{\rho})$ em $X_{t_2}(q_y)$. Observe que temos também $O^-(q_y) \subset W_\eta^u(O(p))$. Agora temos tudo pronto para terminar a demonstração.

Por hipótese temos que existem sequências $x_n \rightarrow y$ e $s_n > 0$ tal que $y_n = X_{s_n}(x_n) \rightarrow x$. Agora tome n grande suficiente tal que $x_n \in B(y, \frac{\delta_2}{\rho})$ e

$y_n \in B(x, \frac{\delta_1}{\rho})$. Note que y_n e q_y ambos estão fora do tubo $\Delta_y(\delta_2)$. Logo pelo Connecting Lemma obtemos que existe $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = X$ fora de $\Delta_y(\delta_2)$ e y_n está na órbita futura de q_y , mas pela observação feita acima, q_y ainda está na variedade estável de $O(p(Z))$. Agora note que q_x e q_y estão fora de $\Delta_x(\delta_1)$ e tanto a órbita futura de q_y como a órbita passada de q_x atingem $B(x, \frac{\delta_1}{\rho})$, aplicando o Connecting Lemma mais uma vez, obtemos $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y = Z$ fora de $\Delta_x(\delta_1)$, logo $Y = X$ fora de $\Delta_x(\delta_1) \cup \Delta_y(\delta_2)$, e q_x está na órbita futura de q_y . Porém temos que q_y está na variedade instável de $O(p(Y))$ e q_x está na variedade estável de $O(p(Y))$, logo criamos uma interseção homoclínica, o que conclui a prova. \square

Como aplicação do *connecting lemma* veremos que um fluxo Ω -estável não pode ter singularidades aproximadas por órbitas não-errantes, ou seja, as singularidades tem que estar afastada das órbitas periódicas.

Teorema 2.9. *Se $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é Ω -estável então $Sing(X) \cap \overline{Per(X)} = \emptyset$.*

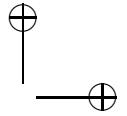
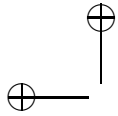
Demonstração. Suponha que existe $\sigma \in Sing(X) \cap \overline{Per(X)}$. Seja $\{\gamma_k\} \subset Per(X)$ tal que γ_k acumula em σ . Primeiramente, usando o teorema 1.15, temos que σ é hiperbólico. Note que pelo teorema de Hartman-Grobman $\{\gamma_k\}$ fornece uma sequência quase-homoclínica.

Seja \mathcal{U} a C^1 -vizinhança de X dada pela Ω -estabilidade. Pelo *connecting lemma* existe $Y \in \mathcal{U}$ com um ponto homoclínico p associado a σ .

Não pode haver interseção homoclínica associada a uma singularidade quando o campo é Ω -estável. Com efeito, Y também é Ω -estável. Pelo λ -lema temos que $p \in \Omega(Y)$. Seja \mathcal{V} uma vizinhança de Y dada pela Ω -estabilidade. Tome $Z \in \mathcal{V} \cap KS$ e denote por $h : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(Z)$ a Ω -conjugação. Daí $h(p)$ é um ponto homoclínico associado a $h(\sigma) \in Sing(Z)$. Porém como $Z \in KS$, Z não possui interseção homoclínica associada a uma singularidade². Portanto $\overline{Per(X)} \cap Sing(X) = \emptyset$. \square

Esse corolário nos diz também que, ao longo desse livro, quando estivermos estudando os campos Ω -estáveis, basta estudarmos as órbitas periódicas. De fato o Connecting Lemma desempenha um papel fundamental na demonstração de que Ω -estabilidade implica em Axioma A.

²Pois a direção do campo estaria na interseção do espaço estável com o instável, nessa interseção homoclínica, e portanto não haveria dimensão suficiente para gerar o espaço tangente.



Capítulo 3

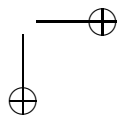
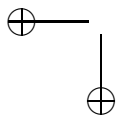
Índices, Limites Fundamentais, Interseções Heteroclínicas e outras coisas da vida

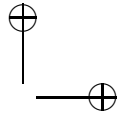
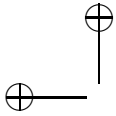
Neste capítulo introduzimos diversos objetos que aparecem no estudo de propriedades hiperbólicas de sistemas dinâmicos. Isto envolve o conceito de índices de elementos críticos, conjuntos pré-periódicos, a topologia de Hausdorff, limites fundamentais e interseções heteroclínicas.

3.1 Índices

Definição 3.1. *Seja p um ponto periódico hiperbólico para um campo X . Então ele é um ponto fixo hiperbólico para seu mapa de Poincaré P . O índice de p é a dimensão do espaço estável de p com respeito a P .*

Segue da definição que todo ponto q na órbita $O(p)$ tem o mesmo índice de p . Uma outra observação simples que decorre do teorema de decomposição espectral é que para um campo Axioma A, os pontos periódicos de uma peça básica tem mesmo índice.





Lema 3.2. *Seja Λ uma peça básica da decomposição espectral de X , um campo axioma A , então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que todo ponto periódico $p \in \Lambda$ tem índice i .*

Demonstração. É suficiente provar que se $E^s \oplus E^u$ é a decomposição hiperbólica de Λ então $\dim E^s$ é constante, onde, como de costume s denota a parte estável (contratora) da decomposição e u a parte instável (expansora). Mas isto é fácil uma vez que Λ é transitivo. Com efeito, seja $a \in \Lambda$ tal que $\omega(a) = \Lambda$. Por um lado, como cada X_t é um difeomorfismo, e a decomposição $E^s \oplus E^u$ é invariante, temos que $\dim E^s$ é constante ao longo da órbita de a . Como a órbita de a é densa e os subespaços E^s variam continuamente, segue que para todo $x \in \Lambda$, $\dim E^s(x) = \dim E^s(a)$. Isto prova o lema. \square

Como o índice é um número inteiro, então é de se esperar que ele seja localmente constante, em relação a variação da órbita periódica hiperbólica.

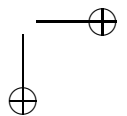
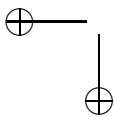
Lema 3.3. *Seja $O(p)$ uma órbita periódica hiperbólica de X com índice i então o índice de $O_Y(p_Y)$ é i , onde $O_Y(p_Y)$ denota a Y -órbita da continuação analítica de p_Y .*

Demonstração. Como $O(p)$ é um órbita periódica hiperbólica de índice i , é, em particular, um conjunto hiperbólico de índice i . O Lema, então, é uma consequência automática da robustez de conjuntos hiperbólicos. \square

Por razões semelhantes, vale o seguinte, os índices das peças básicas de um campo Axioma A são robustos, ou seja, se Y é um campo C^1 suficientemente próximo de um campo Axioma A , com uma peça básica Λ de índice i , então Y também possui um conjunto hiperbólico isolado e transitivo de índice i , digamos Λ_Y , que está contido numa vizinhança que contém Λ .

3.2 Conjuntos Pré-Periódicos

Obviamente as órbitas periódicas são importantes na descrição da dinâmica de um sistema. Também são importantes certas órbitas que são “quase”-periódicas. Aqui apresentamos tais órbitas e nos próximos capítulos ficará claro a relação que estas tem com os fluxos estrela.



Definição 3.4. Dizemos que um ponto p é pré-periódico se existem sequências $X_n \rightarrow X$ e pontos periódicos $p_n \in \text{Per}(X_n)$ tais que $p_n \rightarrow p$. Se além disso todos os pontos periódicos tem índice i então dizemos que p é um ponto i -pré-periódico. O conjunto dos pontos pré-periódicos de X é denotado por $\text{Per}^*(X)$ e o dos i -pré-periódicos de X é denotado por $\text{Per}_i^*(X)$

Outra maneira de definir um ponto pré-periódico p é dizer que dada uma vizinhança U de p e uma C^1 -vizinhança \mathcal{U} de X , sempre existem $Y \in \mathcal{U}$ e $q \in \text{Per}(Y) \cap U$. O caso i -pré-periódico requer ainda que q tenha índice i . Note que se dimensão de M é d então $\text{Per}^*(X) = \bigcup_{i=0}^{d-1} \text{Per}_i^*(X)$.

Com consequência imediata da definição temos que $\text{Per}(X) \subset \text{Per}^*(X)$. Note também que $\text{Per}^*(X)$ é invariante. Com efeito, se $x \in \text{Per}^*(X)$ e T é fixo, então, por continuidade, dada $V = \text{viz}(X_T(x))$ existe $U = \text{viz}(x)$ e $\mathcal{U} = \text{viz}(X)$ tais que se $Y \in \mathcal{U}$ e $y \in U$ então $Y_T(y) \in V$.

No caso Axioma A, teríamos por definição que o não-errante estaria contido no conjunto pré-periódico. Uma pergunta natural é se isso ocorre com alguma generalidade. A resposta foi dada por Pugh em [60] e é conhecido como o *closing lemma*.

Teorema 3.5 (Closing Lemma). *Seja X um campo e $p \in \Omega(X)$. Então para toda C^1 -vizinhança \mathcal{U} de X e U uma vizinhança de p existe $Y \in \mathcal{U}$ e um ponto periódico $q \in \text{Per}(Y) \cap U$.*

Assim, obtemos a inclusão:

$$\Omega(X) \subset \text{Per}^*(X).$$

Vale a pena lembrar que Pugh usou o *closing lemma* para demonstrar seu Teorema de Densidade Geral, que diz que C^1 -genericamente $\Omega(X) = \overline{\text{Per}(X)}$, ver [61].

Uma pergunta natural é se vale a inclusão contrária. Porém isto é falso.

Exercício 3.6. *Se X é um campo Axioma A com ciclos então existe um ponto pré-periódico porém errante.*

O leitor mais experiente pode notar que talvez a igualdade seja válida genericamente, devido aos trabalhos de Carballo-Morales-Pacífico [20], uma vez que não há ciclos genericamente (em um contexto mais geral). Outra pergunta natural é se a primeira inclusão se mantêm se trocarmos periódicos por i -periódicos. Isto segue de um resultado devido a Wen [74].

Proposição 3.7. *Genericamente temos que $\text{Per}_i^*(X) = \overline{\text{Per}_i(X)}$. Em particular $\Omega(X) = \text{Per}^*(X)$.*

A prova desta proposição usa um argumento clássico na teoria genérica. Além de prová-lo, iremos comentar no decorrer da prova o método pois ele pode ser (e é) útil para demonstrar outros resultados.

Demonstração. Primeiro localizamos o problema, no caso, tomamos uma base enumerável de abertos $\{U_n\}$ de M (por compacidade).

Depois, em cada peça local definimos o conjunto que contém a propriedade que nos interessa, no caso, definimos A_n como o conjunto de campos Y que possuem um ponto periódico de índice i em U_n . Observe que o conjunto A_n é aberto por hiperbolicidade, isto é muito importante.

Em seguida, definimos o conjunto que robustamente não possui a propriedade que queremos na peça local. Neste caso, definimos B_n como o conjunto dos campos Y tais que existe uma vizinhança \mathcal{U} tal que todo $Z \in \mathcal{U}$ não possui um ponto periódico de índice i em U_n . Observe que outra maneira de escrever este conjunto é

$$B_n = \mathfrak{X}^1(M) - \overline{A_n}.$$

Agora, como A_n é aberto, então temos que $A_n \cup B_n$ é aberto e denso em $\mathfrak{X}^1(M)$! E é isto que vai fazer o argumento funcionar. Pois então o seguinte conjunto é residual:

$$\mathcal{R} = \bigcap_n (A_n \cup B_n).$$

Seja então $X \in \mathcal{R}$ e suponha que $x \in \text{Per}_i^*(X)$. Dada uma vizinhança V de x sempre existe n tal que $U_n \subset V$ ainda é vizinhança de x e por definição $X \in A_n \cup B_n$.

Mas por definição de ponto i -pré-periódico, temos que $X \notin B_n$. Logo $X \in A_n$ e por definição de A_n isto diz que X tem um ponto periódico de índice i em U_n . Como V é qualquer, $x \in \text{Per}_i(X)$. Isto mostra que $\text{Per}_i^*(X) \subset \overline{\text{Per}_i(X)}$. E como a inclusão contrária é óbvia, a primeira parte da proposição está demonstrada. A segunda parte segue do *closing lemma*. \square

3.3 A Topologia de Hausdorff e Aplicações

Nesta seção analisamos a variação que o conjunto de pontos periódicos (ou uma decomposição espectral) sofre na presença da propriedade estrela.

Defina o espaço métrico $\mathcal{K}(M)$ como o conjunto de todos os subconjuntos compactos de M munido com a métrica de Hausdorff:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}.$$

Dados espaços métricos X e Y . Uma aplicação $F : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$, é semicontínua inferiormente em $x \in X$ se, para todo aberto V de Y intersectando $F(x)$, podemos encontrar uma vizinhança U de x em X tal que $V \cap F(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in U$. Dizemos que F é semicontínua inferiormente se F é semicontínua inferiormente em todo $x \in X$.

Já uma aplicação do tipo $s : X \rightarrow \mathbb{N}$ é semicontínua inferiormente em $x \in X$ se existe uma vizinhança U de x tal que $s(y) \geq s(x)$ para todo $y \in U$. A aplicação s é semicontínua inferiormente se o é para todo $x \in X$.

Lema 3.8 (Continuidade Genérica). *Sejam X e Y espaços métricos completos e uma aplicação $F : X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$. Se F é semicontínua inferiormente então existe um residual \mathcal{R} de X tal que todo ponto em \mathcal{R} é ponto de continuidade para F . O mesmo vale para a aplicação $s : X \rightarrow \mathbb{N}$.*

Definição 3.9. *Dizemos que uma vizinhança \mathcal{U} de um campo estrela X satisfaz a hipótese (H_j) se todo campo $Z \in \mathcal{U}$ é Ω -conjugado a X . Além disso existe um residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ tal que para todo campo $Y \in \mathcal{R}$ o conjunto $\bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)}$ é hiperbólico.*

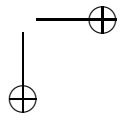
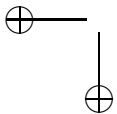
Note que se \mathcal{U} satisfaz a hipótese (H_j) então todo campo $Z \in \mathcal{U}$ é estrela pelo teorema 1.15. Além disso, pelo teorema de decomposição espectral, para cada $Y \in \mathcal{R}$ temos que:

$$\bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)} = \Lambda_1(Y) \cup \dots \cup \Lambda_{s(Y)}(Y)$$

onde cada $\Lambda_i(Y)$, $1 \leq i \leq s(Y)$, é uma peça básica hiperbólica. Em particular, isto define uma aplicação $s : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$.

Considere então a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{K}(M) \\ Y &\mapsto \bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)} \end{aligned}$$



Lema 3.10. *Se a vizinhança \mathcal{U} de X satisfaz a hipótese (H_j) então existe um residual $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{U}$ tal que todo Y em \mathcal{R}_j é ponto de continuidade de F .*

Demonstração. Pelo Lema 3.8 basta provar que F é semicontinua inferiormente em \mathcal{R} .

Definimos os mapas $F_N : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}(M)$ assim: $F_N(Y)$ é a união dos pontos periódicos de índice menor que $j + 1$ e período menor que N .

Pela hiperbolicidade dos pontos periódicos em \mathcal{U} , para cada $Y \in \mathcal{U}$, $F_N(Y)$ é uma união finita de órbitas periódicas. Logo, o índice dessas órbitas periódicas se mantêm. Assim, cada F_N é uma função contínua.

Finalmente, observe que $F(Y)$ é o fecho da união (crescente) dos $F_N(Y)$. Basta então usar o seguinte exercício:

Exercício 3.11. *Se $F(Y) = \overline{\cup_{N \in \mathbb{N}} F_N(Y)}$ para todo $Y \in \mathcal{U}$ e F_N é contínua para todo N , então F é semicontínua inferiormente.*

E isto termina a prova do lema. □

Com este lema, obtemos informação sobre a função s .

Lema 3.12. *Seja \mathcal{U} uma vizinhança de X que satisfaz a hipótese (H_j) e \mathcal{R}_j o residual dado pelo lema anterior. Então, a aplicação $s|_{\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}} : \mathcal{R}_j \cap \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$ é semicontinua inferiormente.*

Demonstração. Como \mathcal{R} e \mathcal{R}_j são residuais, sua interseção é residual e, por abuso de notação, vamos denotar esta interseção por \mathcal{R}_j . Basta mostrar que fixado $Y \in \mathcal{R}_j$ e um número real $r < s(Y)$ existe uma vizinhança \mathcal{V} de Y tal que para todo $Z \in \mathcal{V} \cap \mathcal{R}_j$ temos que $r < s(Z)$.

Por hiperbolicidade e continuidade do mapa F em Y temos que para cada i existe U_i uma vizinhança de $\Lambda_i(Y)$ e \mathcal{U}_i uma vizinhança de Y tais que se $Z \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{R}_j$ então a continuação de $\Lambda_i(Y)$, digamos Γ_i , para Z está contida em U_i e além disso todos os pontos periódicos com índice menor que $j + 1$ de Z estão contidos na união dos U_i 's.

Por estabilidade, temos que Γ_i possui pontos periódicos densos de índice $l \leq j$. Ou seja $\Gamma_i \subset \bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Z)}$. Em particular, por transitividade, existe um único m tal que $\Lambda_m(Z)$ contém Γ_i .

Seja $\mathcal{V} = \bigcap \mathcal{U}_i$, e escolha U_i 's 2-2 disjuntos. Assim, cada Γ_i está contido em um único $\Lambda_{m(i)}(Z)$ e $m(i) \neq m(j)$ se $i \neq j$, uma vez que cada $\Lambda_l(Z)$ é conexo. De fato, senão existiria um aberto V disjunto dos U_i 's possuindo um ponto periódico. Isto é um absurdo com a continuidade de F no ponto Y . Em particular, $r < m(Z)$. □

O próximo resultado segue como corolário imediato do lema anterior.

Teorema 3.13. *Suponha que a vizinhança \mathcal{U} de X satisfaz a hipótese (H_j) , então existe um residual \mathcal{R}' em \mathcal{U} tal que a restrição $s|_{\mathcal{R}'} : \mathcal{R}' \rightarrow \mathbb{N}$ é constante.*

3.4 Limites Fundamentais

Em seguida analisaremos certos conjuntos obtidos por limites na topologia de Hausdorff. A teoria hiperbólica nos diz que as órbitas periódicas são uma espécie de tijolinhos para obter algum tipo de hiperbolicidade mais geral. É bem conhecido que o limite na topologia de Hausdorff de uma sequência de órbitas periódicas é um conjunto invariante. Porém, nem todo conjunto invariante pode ser obtido dessa forma. Para distinguir tais conjuntos, aparece a noção de limite fundamental.

Definição 3.14. *Um conjunto compacto e invariante Λ é um limite fundamental se existe uma sequência de órbitas periódicas $O(p_n)$ de campos Y_n , tais que $Y_n \rightarrow X$ na topologia C^1 , e $O(p_n) \rightarrow \Lambda$ na topologia de Hausdorff.*

O *closing lemma* pode ser usado para gerar limites fundamentais. De fato vale o seguinte exercício.

Exercício 3.15. *Todo conjunto compacto, invariante e transitivo é um limite fundamental.*

Por outro lado, como vimos na seção passada, o índice de um ponto periódico desempenha um papel importante, e nada mais justo que passar tal noção para os limites fundamentais.

Definição 3.16. *Um limite fundamental Λ é dito ser um i -limite fundamental se as órbitas P_n da definição anterior tem todas índice i .*

O conceito de limite fundamental aparecerá em diversos pontos neste livro. Em particular ao estender resultados sobre $\overline{\text{Per}(X)}$ para limites fundamentais.

3.5 Interseções Heteroclínicas

Nos próximos capítulos enfrentaremos o problema de descartar a existência de ciclos heterodimensionais em um fluxo estrela, tais são formados por interseções heteroclínicas. Portanto precisamos estudar tais interseções. Iremos obter alguns resultados nesta linha nesta seção.

Definição 3.17. *Sejam X um campo e p, q pontos periódicos hiperbólicos. Dizemos que eles são homoclinicamente relacionados se $W^s(O(p))$ intersecta transversalmente $W^u(O(q))$ e $W^u(O(p))$ intersecta transversalmente $W^s(O(q))$.*

Exercício 3.18. *Podemos definir uma relação entre pontos periódicos hiperbólicos dizendo que p é relacionado a q se p e q são homoclinicamente relacionados. Prove que isso define uma relação de equivalência.*

O próximo resultado lida com o problema de criar interseções entre órbitas periódicas próximas a um conjunto hiperbólico. Antes de enunciá-lo vamos lembrar uma definição importante.

Definição 3.19. *Dado um campo X qualquer, um compacto $\Gamma \subset M$ invariante pelo fluxo é dito transitivo por cadeias se, para todo $\epsilon > 0$ e quaisquer $x, y \in \Gamma$ existe uma ϵ -cadeia ligando x a y , i.e, sequências $\{x_i\}_{i=1}^n \subset M$, $\{t_i\}_{i=1}^{n-1} \subset [1; +\infty)$, com $x_1 = x$, $x_n = y$ e $d(X_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$.*

O exercício a seguir é bastante elementar, mas fornece exemplos de conjuntos transitivos por cadeias.

Exercício 3.20. *Um compacto Λ invariante pelo fluxo é dito transitivo se possui um ponto cuja órbita positiva é densa em Λ . Prove que a seguinte condição é suficiente para transitividade: dados quaisquer dois abertos U, V em Λ , existe um tempo $t > 0$ tal que $X_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Conclua daí que, para todo $x \in M$, $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são conjuntos transitivos. Finalmente, prove que todo conjunto transitivo é transitivo por cadeias.*

Proposição 3.21. *Seja Λ um conjunto hiperbólico transitivo por cadeias para X . Vamos supor que ele não tem singularidades e que não é poço nem fonte, isto é, $1 \leq \text{Ind}(\Lambda) \leq d - 2$. Então existe uma vizinhança \mathcal{U} de X e uma vizinhança U de Λ tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ e duas órbitas periódicas de Y inteiramente contidas em U então elas são hiperbólicas e homoclinicamente relacionadas.*

Demonstração. Começamos fazendo duas observações elementares da teoria hiperbólica básica: para conjuntos hiperbólicos, quaisquer dois pontos suficientemente próximos são homoclinicamente relacionados, isto segue do Teorema da Variedade Estável (basta usar transversalidade e continuidade das variedades invariantes e notar que estas possuem um tamanho uniformemente limitado por baixo). A segunda é que quaisquer dois pontos de uma mesma órbita periódica são homoclinicamente relacionados.

Por um lado, a robustez de conjuntos hiperbólicos nos permitirá obter interseções transversais (relativamente a qualquer campo Y próximo de X) para pontos próximos, e perto de Λ , devido a primeira observação acima. Por outro lado, pelo *shadowing lemma*, iremos obter uma órbita periódica “densa” (digamos, β densa, com β pequeno) em Λ . Assim, duas órbitas periódicas de Y suficientemente próximas de Λ terão interseções transversais com pontos da órbita “densa”, e portanto serão homoclinicamente relacionadas com a órbita “densa” e como a relação homoclínica é transitiva, obteremos que as referidas órbitas devem ser homoclinicamente relacionadas. Vamos aos detalhes.

Primeiro usamos robustez de conjuntos hiperbólicos, e obtemos \mathcal{U}_0 vizinhança C^1 de X e $\delta > 0$ tais que para todo campo $Y \in \mathcal{U}_0$, o invariante maximal da δ -vizinhança V de Λ , por Y , $\Gamma = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(V)$ é um conjunto hiperbólico. Logo, pela primeira observação acima, existe $0 < \varepsilon < \delta$ tal que para todo $Y \in \mathcal{U}_0$, se $d(x, y) < \varepsilon$ e $\overline{O}(x)$ e $\overline{O}(y)$ estão contidos em V , então $W^s(O_Y(x))$ e $W^u(O_Y(y))$ bem como $W^s(O_Y(y))$ e $W^u(O_Y(x))$ se intersectam transversalmente.

Em segundo lugar, por compacidade podemos cobrir Λ com finitas bolas de raio $\varepsilon/6$, e com os centros pertencentes a Λ . Como Λ é transitivo por cadeias (para X), podemos criar uma pseudo-órbita periódica que visita todos os centros dessas bolas. Pelo *shadowing lemma*, obteremos uma órbita periódica A de X que visita todas essas bolas. Desse modo teremos Λ está contido na $\varepsilon/3$ -vizinhança de A . Pela continuação das órbitas periódicas hiperbólicas, existe uma C^1 -vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ de X tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ possui uma órbita periódica hiperbólica A_Y , $\varepsilon/6$ -próxima de A . Em particular, Λ está contido na $\varepsilon/2$ -vizinhança de A_Y .

Finalmente, tomamos U como a ε -vizinhança de Λ . Se $Y \in \mathcal{U}$ e $O(p)$ e $O(q)$ são órbitas periódicas de Y contidas em U , então, de novo por compacidade, existe um ponto de Λ $\varepsilon/2$ -próximo de p . Como Λ está contido na $\varepsilon/2$ -vizinhança de A_Y , obtemos um ponto $a \in A_Y$, ε -próximo de p , donde, pelo que obtivemos acima, segue que $O(p)$ é homoclinicamente relacionada

com A_Y . De modo análogo, vemos que $O(q)$ é homoclinicamente relacionada com A_Y . Como a relação homoclinica é transitiva, isso mostra que $O(p)$ e $O(q)$ são homoclinicamente relacionados e conclui a prova. \square

Lembre que para um campo Axioma A, não Anosov, existem várias órbitas fora do não-errante, que acabam morrendo numa peça básica (ou nascem de uma peça básica). A teoria diz que existem órbitas periódicas que acompanham o comportamento assintótico de tais órbitas (via *shadowing lemma*). O próximo resultado examina isto num contexto mais geral.

Proposição 3.22. *Seja $x \in M$ tal que $x \notin \omega(x)$. Se $\Lambda := \omega(x)$ é um conjunto hiperbólico sem singularidades com índice $1 \leq \text{Ind}(\Lambda) \leq d - 2$ então para qualquer vizinhança U de Λ existe uma órbita periódica $O(p) \subset U$ de índice $\text{Ind}(\Lambda)$ tal que $x \in \overline{W^s(O(p))}$.*

Obviamente um resultado análogo vale se considerarmos $\alpha(x)$.

Demonstração. Primeiro observamos que é suficiente estabelecer a seguinte afirmação: existem $y \in U$ com $\overline{O(y)} \subset U$ e $t > 0$, tais que $X_t(x) \in W^{ss}(y)$ e existe uma sequência de órbitas periódicas $O(p_n) \in U$, com $p_n \rightarrow y$.

De fato, supondo que a afirmação vale, pela proposição anterior, podemos supor que quaisquer duas órbitas periódicas em U são homoclinicamente relacionadas reduzindo U se necessário. Tome $O(p) = O(p_1)$. Dada qualquer vizinhança V de $X_t(x)$, tomando n grande, pela variação contínua das partes compactas da variedade estável, temos que $W^s(O(p_n)) \cap V \neq \emptyset$. Como p_n é homoclinicamente relacionada com p , iterando para trás a variedade estável de $O(p)$, por λ -Lema, vemos que ela acumula na $W^s(O(p_n))$, e portanto intersecta V . Isso prova que $X_t(x) \in \overline{W^s(O(p))}$, o que, por invariância, implica o resultado.

Agora vamos provar a afirmação. Tome uma vizinhança U_0 de Λ , $\overline{U_0} \subset U$, e seja $\epsilon = d(\overline{U_0}, U)/3$. Tome $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo órbita pode ser ϵ sombreada, via o *shadowing Lema*. Tome um ponto $c \in \Lambda$ qualquer e $\tau > 0$ grande de modo que $d(X_\tau(x), c) < \delta$. É fácil ver que os pedaços de órbita $X_{(-\infty, 0]}(c)$ e $X_{[\tau, +\infty)}(x)$ formam uma δ -pseudo órbita.

Seja então y o ponto cuja órbita ϵ -sombreia esta pseudo órbita, ou seja, temos uma reparametrização positiva da reta $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ e tal que

$$d(X_{g(s)}(y), X_{\tau+s}(x)) < \epsilon, \quad s \geq 0,$$

$$d(X_{g(s)}(y), X_s(c)) < \epsilon, \quad s \leq 0.$$

Isto prova que $x \in W^s(O(y))$, e portanto existe um $t > 0$ tal que $X_t(x) \in W^{ss}(y)$. Com isso, obtemos que $\omega(x) = \omega(y)$. De modo similar, a segunda das desigualdades acima mostra que $y \in W^u(c)$, e portanto $\alpha(y) = \alpha(c)$. Como $\alpha(c) \subset \omega(x)$, pois $c \in \omega(x)$, segue que $\alpha(y) = \omega(y)$. Além disso, o sombreamento também mostra que $\overline{O(y)} \subset U$.

Isso nos dá um ponto em $\alpha(y) \cap \omega(y)$ e permite criar criar δ -pseudo-órbitas periódicas, contendo y , para qualquer $\delta > 0$.

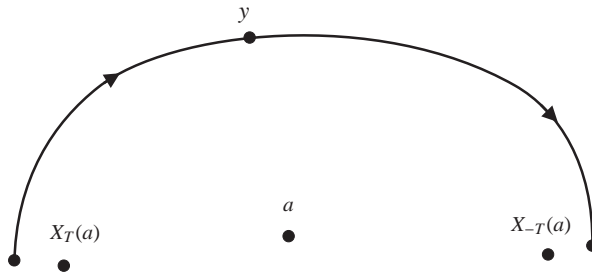


Figura 3.1:

Como essas pseudo-órbitas estão contidas em U , pois são criadas usando a órbita de y e um ponto em $\omega(y) = \omega(x)$, podemos aplicar o *shadowing Lemma* e concluir que existem órbitas periódicas $O(p_n) \subset U$ (portanto possuem índice i) com $p_n \in P_n$, $p_n \rightarrow y$. Isto estabelece a afirmação e conclui a prova. \square

Observação 3.23. Observe que no meio da prova obtemos que $x \in W^{ss}(y)$, onde $y \in U$, $\overline{O(y)} \subset U$ e y é acumulado por órbitas periódicas de mesmo índice que o conjunto hiperbólico $\omega(x)$. Similarmente para $\alpha(x)$.

Observação 3.24. Suponha por exemplo que, nas condições do Lema 3.22 $i = d - 2$. Nesse caso $\omega(x)$ se reduz órbita $O(p)$ de um poço periódico, o que implica $x \in W^s(O(p))$, pois $x \in W^s(\omega(x))$. Ou seja, o lema é trivial nesse caso. Se $i = 0$, temos o resultado análogo para $\alpha(x)$.

É possível mostrar um resultado semelhante ao anterior, porém com informação dinâmica mais localizada.

Exercício 3.25. Sejam $O(q_n)$ uma sequência de órbitas periódicas e K um compacto invariante tal que $O(q_n) \rightarrow K$, na topologia de Hausdorff. Seja

$\Lambda \subset K$ um subconjunto próprio hiperbólico, transitivo por cadeias, sem singularidades com índice $\text{Ind}(\Lambda)$. Dada U uma vizinhança de Λ , existe um ponto $x \in K \cap U - (\Lambda \cup \text{Crit}(X))$ tal que a órbita futura de x está inteiramente contida em U e existe um outro ponto periódico p tal que $O(p) \subset U$ com índice $\text{Ind}(\Lambda)$ tal que $x \in \overline{W^s(O(p))}$. Um resultado análogo vale se considerarmos $W^u(O(p))$.

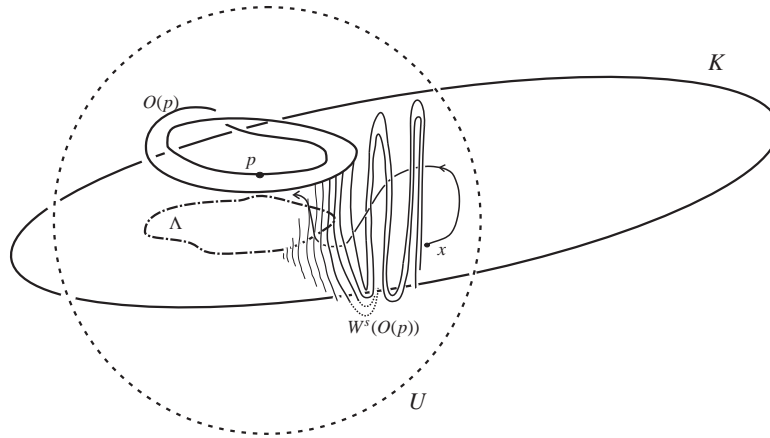


Figura 3.2:

O próximo resultado dá o índice de pré-periodicidade de um ponto acumulado por órbitas periódicas. Note que ele vale para *qualquer* campo.

Teorema 3.26. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $x \in \overline{\text{Per}(X)}$. Se $\omega(x)$ for um conjunto hiperbólico sem singularidades de índice i então x é um ponto i -pré-periódico.*

Observação 3.27. *O mesmo vale considerando o passado. Isto é se $x \in \overline{\text{Per}(X)}$ e $\alpha(x)$ for um conjunto hiperbólico sem singularidades de índice i então x é um ponto i -pré-periódico.*

Demonstração. Se x for periódico então obviamente ele tem índice i , em particular é i -préperiódico. Podemos supor que ele é um ponto recorrente não periódico. Por recorrência podemos criar ε -pseudo-órbitas periódicas

começando em x para todo $\varepsilon > 0$. O *shadowing Lemma* implica que x é acumulado por órbitas periódicas próximas de $\omega(x)$, que é um conjunto hiperbólico de índice i . Logo estas órbitas periódicas têm índice i .

Vamos supor então que $x \notin \omega(x)$. Em particular, x não é um elemento crítico. Além disto, temos que $0 \neq i \neq d - 1$. Com efeito, como $\omega(x)$ é hiperbólico, se, por exemplo, $i = d - 1$ então $\omega(x)$ é um poço e isto impediria que x fosse aproximado por órbitas periódicas.

Sejam então $O(x_n)$ órbitas periódicas de X tal que $x_n \rightarrow x$. Como a topologia de Hausdorff é compacta, podemos supor que $O(x_n) \rightarrow K$, onde K é um compacto invariante. Além disso, como $x \in K$ então $\omega(x) \subset K$.

Por outro lado, podemos tomar uma vizinhança pequena U de $\omega(x)$, tal que: $x \notin U$, o maximal invariante $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(\overline{U})$ é hiperbólico com índice i e duas órbitas periódicas contidas em U são homoclinicamente relacionadas.

Pela proposição 3.22, temos que existe uma órbita periódica $O(p) \subset U$ de índice i tal que $x \in \overline{W^s(O(p))}$.

Agora, pelo exercício 3.25 (na versão para variedade instável), temos que existe um ponto $y \in K \cap U - (\omega(x) \cup \text{Crit}(X))$ e um ponto periódico q tais que: a órbita negativa de y permanece em U e $y \in \overline{W^u(O(q))}$.

Agora, como $O(p)$ e $O(q)$ são homoclinicamente relacionadas, pelo λ -lemma temos que $y \in \overline{W^u(O(p))}$. Como $x, y \in K$ existem sequências $x_n \in M$ e $t_n > 0$ tais que

$$x_n \rightarrow y \text{ e } X_{t_n}(x_n) \rightarrow x.$$

Pela proposição 2.8, dadas vizinhanças \mathcal{U} de X e V de x , existe $Y \in \mathcal{U}$ com um ponto homoclínico da continuação de $O(p)$ pertencente a V . Obviamente, podemos supor que essa interseção é transversal. Portanto, esta interseção homoclínica é aproximada por um ponto periódico com índice i (pois a interseção cria uma ferradura).

Como as vizinhanças \mathcal{U} e V são arbitrárias temos que x é um ponto i -pré-periódico. \square

Uma Aplicação

Nesta pequena seção iremos apresentar uma aplicação dos conceitos vistos neste capítulo. Além disso, o objeto que iremos utilizar aqui aparecerá de forma crucial nos próximos capítulos e na prova de um dos teoremas principais do livro.

Vamos supor que temos dois pontos periódicos hiperbólicos p e q com índices i e j respectivamente. Vamos supor que $1 \leq i < j \leq d - 2$. Vamos assumir também que existem pontos x e y tais que $\omega(x) = O(q)$, $\alpha(x) = O(p)$, $\omega(y) = O(p)$ e $\alpha(y) = O(q)$.

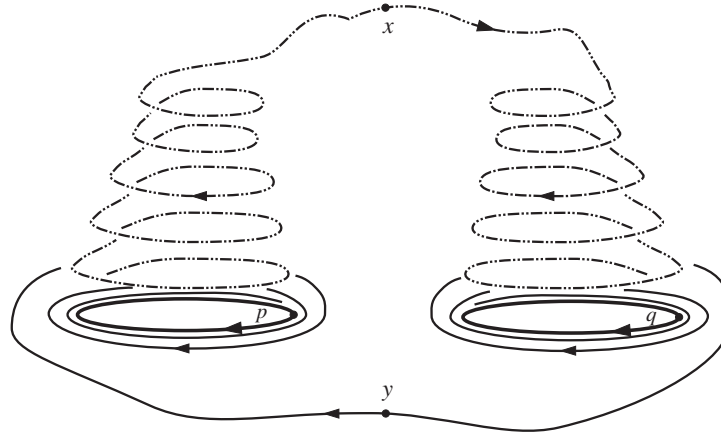


Figura 3.3: $O(p) \cup O(x) \cup O(q) \cup O(y)$

Veremos que tipo de pré-periodicidade a união destes conjuntos têm.

Proposição 3.28. *O Conjunto $\Lambda := O(p) \cup O(x) \cup O(q) \cup O(y)$ está contido em $\text{Per}_i^*(X) \cap \text{Per}_j^*(X)$.*

Demonstração. Por definição de Λ temos que $x \in W^s(O(q))$ e $y \in W^u(O(q))$, assim pelo λ -lema temos a existência de uma corda A indo de um ponto a próximo de x até um ponto b próximo de y passando por $O(q)$.

Assim, via uma perturbação local podemos criar um ponto homoclínico associado a continuação de $O(p)$ que passa por x , $O(q)$ e y .

Mais ainda, podemos supor que a interseção homoclínica é transversal. Mas então temos um conjunto hiperbólico de índice i (que de fato é uma classe homoclínica).

Assim, esta órbita homoclínica é aproximada por órbitas periódicas de índice i para a perturbação do campo original. Logo, $x, y, q \in \text{Per}_i^*(X)$ e portanto $\Lambda \subset \text{Per}_i^*(X)$. Analogamente, mostra-se que $\Lambda \subset \text{Per}_j^*(X)$. \square

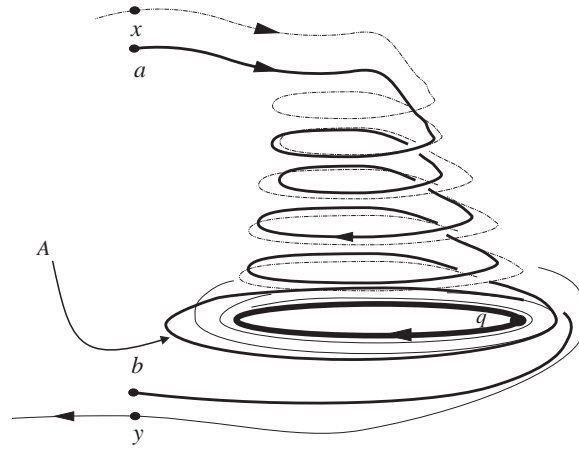


Figura 3.4: Corda A

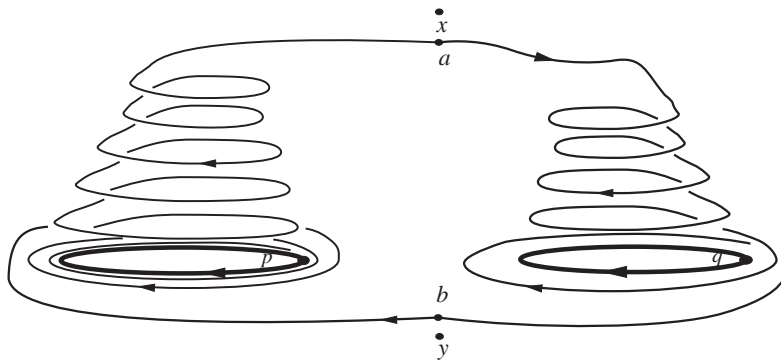
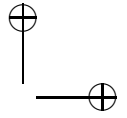
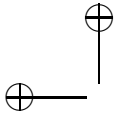


Figura 3.5: Criação de um ponto homoclínico associado a continuação de $O(p)$



Capítulo 4

Dominação

Neste capítulo vamos estudar com mais propriedade o Fluxo Linear de Poincaré. Em particular investigamos sua relação com a hiperbolicidade de conjuntos livres de singularidades e introduzimos a noção de dominação que será central no resto do livro.

4.1 Hiperbolicidade do Fluxo Linear de Poincaré

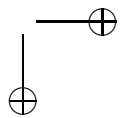
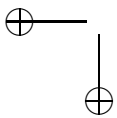
Lembrando a notação usada na seção 1.1, temos que $M^* = M - \text{Sing}(X)$ é o conjunto de pontos regulares de X

Seja $\Lambda \subset M^*$. Definimos $[X]_\Lambda$ e N_Λ como os subfibrados de $T_\Lambda M$, cujas fibras são $\mathbb{R} \cdot X(x)$ e $N_x = (\mathbb{R} \cdot X(x))^\perp$, respectivamente (lembre que M é uma variedade Riemanniana). Vamos considerar $\tilde{T}\Lambda = T_\Lambda M/[X]$ é o fibrado vetorial quociente, com a norma ortogonal

$$\|v + \mathbb{R} \cdot X(x)\| := \inf\{\|v + tX(x)\| : t \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } x \in M^* \text{ e } v \in T_x M.$$

Consideramos também o isomorfismo isométrico $\eta : N_\Lambda \rightarrow \tilde{T}\Lambda$, dado pela restrição da aplicação quociente $p : T_\Lambda M \rightarrow \tilde{T}\Lambda$. Além disso, $\tilde{D}X_t$ é um fluxo de automorfismos induzido pela restrição $DX_t|_\Lambda$.

Com estes fibrados, daremos uma definição equivalente do fluxo linear de Poincaré daquela dada no capítulo 1. Apesar de um pouco mais técnica, será mais adequada para nossos propósitos. De fato nossa exposição segue [32], [24] e [25].



Definição 4.1. *Seja $\Lambda \subset M^*$ um subconjunto X -invariante. O fluxo linear de Poincaré de X em Λ , $P_X^t : N_\Lambda \rightarrow N_\Lambda$, com $t \in \mathbb{R}$, é o fluxo de automorfismos de N_Λ , sobre $X_t|_\Lambda$, tal que o diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} N_\Lambda & \xrightarrow{P_X^t} & N_\Lambda \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \tilde{T}\Lambda & \xrightarrow{\tilde{D}X_t} & \tilde{T}\Lambda \end{array}$$

Em seguida apresentamos as noções de hiperbolicidade e dominação para o fluxo linear de Poincaré que serão muito importantes no decorrer da teoria. Dado um subfibrado F a notação $P_X^t(x)|_F$ denota a restrição de $P_X^t(x)$ à fibra F_x .

Definição 4.2. *Seja $\Lambda \subset M^*$ um subconjunto compacto e X -invariante. Dizemos que o fluxo linear de Poincaré P_X^t é hiperbólico em Λ se existe uma decomposição $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ que é P_X^t -invariante e existem constantes positivas C, λ tais que, para todo $t > 0$ e $x \in \Lambda$ temos que*

$$\|P_X^t(x)|_{N^s}\| \leq C e^{-\lambda t} \quad e \quad \|P_X^{-t}(x)|_{N^u}\| \leq C e^{-\lambda t}.$$

A seguir introduzimos a noção de dominação.

Definição 4.3. *Seja $\Lambda \subset M^*$ um subconjunto X -invariante, porém não necessariamente compacto. Dizemos que o fluxo linear de Poincaré P_X^t tem uma decomposição dominada em Λ se existe uma decomposição $N_\Lambda = N_\Lambda^s \oplus N_\Lambda^u$, P_X^t -invariante e existem constantes positivas C, λ tais que, para todo $t > 0$ e $x \in \Lambda$ temos que*

$$\|P_X^t(x)|_{N^s}\| \|P_X^{-t}(X_t(x))|_{N^u}\| \leq C e^{-\lambda t}.$$

Além disso, se a dimensão do fibrado N^s for constante e igual a l , diremos que esta decomposição dominada tem índice l .

Observação 4.4. *Em alguns lugares deste livro, nas estimativas acima, as vezes iremos usar constantes $0 < \beta < 1$ no lugar de $e^{-\lambda}$.*

A seguir, apresentamos uma definição equivalente para o conceito de dominação que as vezes se mostra útil. Lembramos que se A é uma aplicação linear então $m(A) := \|A^{-1}\|^{-1}$ denota a co-norma de A .

Exercício 4.5. *Seja $\Lambda \subset M^*$ como na definição acima possuindo uma decomposição $N_\Lambda = E \oplus F$, P_X^t -invariante. Mostre que, existem constantes positivas C, λ , tais que, para todo $t > 0$ e $x \in \Lambda$*

$$\|P_X^t(x)|_E\| \leq C e^{-\lambda t} \cdot m(P_X^t(x)|_F),$$

se, e somente se, o $E \oplus F$ é uma decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré.

O próximo resultado diz que a hiperbolicidade do fluxo pode ser traduzida a partir da hiperbolicidade do fluxo linear de Poincaré.

Proposição 4.6. *Seja $\Lambda \subset M^*$ um conjunto compacto e invariante. Λ é hiperbólico se, e só se, o fluxo linear de Poincaré sobre Λ é hiperbólico.*

Demonstração. Primeiramente, vamos supor que $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^x \oplus E_\Lambda^u$ é a decomposição hiperbólica para $DX_t|_{T_\Lambda M}$. Defina $\tilde{E}^s = p(E_\Lambda^s)$, $\tilde{E}^u = p(E_\Lambda^u)$ e note que $\tilde{T}\Lambda = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u$ é uma decomposição hiperbólica para $\tilde{D}X_t$. Como η é um isomorfismo temos que esta induz uma decomposição em N_Λ dada por $N_\Lambda = N_\Lambda^s \oplus N_\Lambda^u$. Provemos que esta decomposição é hiperbólica para P_X^t (lembre que η preserva norma).

Se $v \in N_x^s$ então

$$\begin{aligned} \|P_X^t(x) \cdot v\| &= \|\eta^{-1} \circ \tilde{D}X_t \cdot \eta(v)\| = \|\tilde{D}X_t \cdot \eta(v)\| \\ &\leq C e^{-\lambda t} \|\eta(v)\| = C e^{-\lambda t} \|v\|. \end{aligned}$$

Um argumento análogo para $v \in N_x^u$ mostra a hiperbolicidade do fluxo linear de Poincaré.

Reciprocamente, suponha agora que $N_\Lambda = N_\Lambda^s \oplus N_\Lambda^u$ é a decomposição hiperbólica para $P_X^t|_{N_\Lambda}$. Note que

$$0 \longrightarrow [X]_\Lambda \xrightarrow{i} [X]_\Lambda \oplus N^u \xrightarrow{\pi} N^u \longrightarrow 0,$$

e

$$0 \longrightarrow [X]_\Lambda \xrightarrow{i} [X]_\Lambda \oplus N^s \xrightarrow{\pi} N^s \longrightarrow 0,$$

onde i é a inclusão e π é a projeção na segunda variável, são sequências exatas curtas de fibrados vetoriais, onde uma sequência exata curta é formada por quatro aplicações entre grupos

$$0 \xrightarrow{i_0} A \xrightarrow{i_1} B \xrightarrow{i_2} C \xrightarrow{i_3} 0$$

tal que $Im(i_j) = Ker(i_{j+1})$, $j = 0, 1, 2$. Note também que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & [X]_\Lambda & \xrightarrow{i} & [X]_\Lambda \oplus N^u & \xrightarrow{\pi} & N^u & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow DX_t|_{[X]_\Lambda} & & \downarrow DX_t|_{[X]_\Lambda \oplus N^u} & & \downarrow P^t|_{N^u} & & \\
 0 & \longrightarrow & [X]_\Lambda & \xrightarrow{i} & [X]_\Lambda \oplus N^u & \xrightarrow{\pi} & N^u & \longrightarrow & 0. \\
 \\
 0 & \longrightarrow & [X]_\Lambda & \xrightarrow{i} & [X]_\Lambda \oplus N^s & \xrightarrow{\pi} & N^s & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow DX_{-t}|_{[X]_\Lambda} & & \downarrow DX_{-t}|_{[X]_\Lambda \oplus N^s} & & \downarrow P^{-t}|_{N^s} & & \\
 0 & \longrightarrow & [X]_\Lambda & \xrightarrow{i} & [X]_\Lambda \oplus N^s & \xrightarrow{\pi} & N^s & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Usando o lema 2.18 de [34], temos que se $P^t_X|_{N^u}$ é invertível e $m(P^t_X(x)) > \|DX_t(x)|_{[X]_\Lambda}\|$ para todo $x \in \Lambda$ então $[X]_\Lambda$ tem um único complemento $DX_t|_{[X]_\Lambda \oplus N^u}$ invariante, em $[X]_\Lambda \oplus N^u$.

De forma análoga, se $P^{-t}_X|_{N^s}$ é invertível e $m(P^{-t}_X(x)) > \|DX_{-t}(x)|_{[X]_\Lambda}\|$ para todo $x \in \Lambda$ então $[X]_\Lambda$ tem um único complemento $DX_{-t}|_{[X]_\Lambda \oplus N^s}$ invariante, em $[X]_\Lambda \oplus N^s$.

As aplicações $P^t|_{N^u}$ e $P^{-t}|_{N^s}$ são claramente invertíveis, assim nos resta mostrar as desigualdades acima. Da hiperbolicidade temos que existem $C, \lambda > 0$ tais que para todo $t \geq 0$ e $x \in \Lambda$ temos que

$$\|P_X^{-t}(X_t(x))|_{N^u}\| \leq C e^{-\lambda t} \text{ e } \|P_X^t(X_{-t}(x))|_{N^s}\| \leq C e^{-\lambda t}.$$

Assim

$$m(P_X^t(x)|_{N^u}) \geq C^{-1} e^{\lambda t} \text{ e } m(P_X^{-t}(x)|_{N^s}) \geq C^{-1} e^{\lambda t}.$$

Da compacidade de Λ existe $A \in \mathbb{R}$ onde $A = \max_{x \in \Lambda} \|X(x)\|$, então

$$\|DX_{\pm t}(x)|_{[X]_\Lambda}\| = \|DX_{\pm t} \cdot \frac{X(x)}{\|X(x)\|}\| = \frac{1}{\|X(x)\|} \|X(X_{\pm t}(x))\| \leq \frac{A}{\|X(x)\|}$$

Note que existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq \bar{t}$,

$$C^{-1} e^{\lambda t} > \frac{A}{\|X(x)\|}.$$

Sendo assim para $t > 0$ suficientemente grande temos que

$$m(P^t|_{N^u}) > \frac{A}{\|X(x)\|} \geq \|DX_t|_{[X]_\Lambda}\| \text{ e } m(P^{-t}|_{N^s}) > \frac{A}{\|X(x)\|} \geq \|DX_{-t}|_{[X]_\Lambda}\|.$$

Com isso provamos que existe um único subfibrado E^u de $[X]_\Lambda \oplus N^u$, $DX_t|_{[X]_\Lambda \oplus N^u}$ -invariante tal que $[X]_\Lambda \oplus E^u = [X]_\Lambda \oplus N^u$ e existe um único subfibrado E^s de $[X]_\Lambda \oplus N^s$, $DX_t|_{[X]_\Lambda \oplus N^s}$ -invariante tal que $[X]_\Lambda \oplus E^s = [X]_\Lambda \oplus N^s$ para t suficientemente grande. Disto segue que os diagramas abaixo também comutam e, portanto, $\|DX_{-t}|_{E^u}\| \leq Ce^{-\lambda t}$ e $\|DX_t|_{E^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}$

$$\begin{array}{ccc} [X]_\Lambda \oplus E^u & \xrightarrow{\pi} & N^u \\ \downarrow DX_t|_{[X]_\Lambda \oplus E^u} & & \downarrow P^t|_{N^u} \\ [X]_\Lambda \oplus E^u & \xrightarrow{\pi} & N^u \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} [X]_\Lambda \oplus E^s & \xrightarrow{\pi} & N^s \\ \downarrow DX_{-t}|_{[X]_\Lambda \oplus E^s} & & \downarrow P^{-t}|_{N^s} \\ [X]_\Lambda \oplus E^s & \xrightarrow{\pi} & N^s \end{array}$$

□

4.2 Sequências Periódicas de Isomorfismos

Considere X um campo estrela. Por definição existe uma vizinhança \mathcal{U} de X onde todas as órbitas periódicas de um campo $Y \in \mathcal{U}$ são hiperbólicas. Observe que isso não parece (em princípio) implicar em nenhuma uniformidade na força de contração e expansão dos pontos periódicos. Contudo, surpreendentemente, a propriedade estrela é suficiente para garantir isto e, mais ainda, para garantir dominação no fecho das órbitas periódicas. Este resultado culminou, no final dos anos 70, dos trabalhos de Pliss (ver [58]), Liao (ver [40]) e Mañé (ver [47]). Aqui seguiremos o artigo [44] de Mañé.

Seja $GL(N)$ o grupo dos isomorfismos lineares de \mathbb{R}^N . Se $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow GL(N)$ é uma sequência de isomorfismos de \mathbb{R}^N , denote $E_j^s(\xi)$ e $E_j^u(\xi)$, respectivamente, os subespaços dos vetores $v \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$s_j(v) = \sup \left\{ \left\| \left(\prod_{i=0}^n \xi_{j+i} \right) v \right\| \mid n \geq 0 \right\} < \infty$$

e

$$u_j(v) = \sup \left\{ \left\| \left(\prod_{i=0}^n (\xi_{j-1-i})^{-1} \right) v \right\| \mid n \geq 0 \right\} < \infty.$$

Com isto podemos definir a noção de hiperbolicidade para sequências de isomorfismos.

Definição 4.7. Dizemos que uma sequência ξ é hiperbólica se $E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^N$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4.8. *Mostre que basta checar essa condição para apenas um j . Isto é, ξ é hiperbólica se, e somente se, para algum $j \in \mathbb{Z}$ temos $E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^N$.*

De maior interesse no nosso estudo são as sequências periódicas de isomorfismos, que passamos a definir: ξ é dita *periódica* se existe $n_0 \geq 1$ tal que $\xi_{j+n_0} = \xi_j$, para todo j .

Exemplo 4.9. *Considere a sequência dada por:*

$$\xi_{2n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} e \xi_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, na base canônica de \mathbb{R}^2 . É fácil ver que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $s_0(v)$, $u_0(v) < \infty$, e portanto não temos $E_0^s(\xi) \oplus E_0^u(\xi) = \mathbb{R}^2$. Isso mostra que mesmo que todas as aplicações ξ_j sejam hiperbólicas, a sequência pode não ser hiperbólica. Por outro lado, uma sequência hiperbólica pode possuir termos não-hiperbólicos, como mostra o seguinte exemplo:

$$\xi_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e \xi_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

No caso periódico, a relação correta entre a hiperbolicidade de uma sequência e a hiperbolicidade dos seus termos é dada pelo seguinte lema.

Lema 4.10. *Uma sequência periódica de isomorfismos $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow GL(N)$ é hiperbólica se, e só se, a aplicação linear $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ é hiperbólica, onde n_0 é o período da sequência.*

Demonstração. De fato, suponha que $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ é hiperbólica. Diremos que $v \in \mathbb{R}^N$ é um vetor estável (resp. instável) se pertence ao subespaço estável (resp. instável) de $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$, e denotaremos os subespaços de \mathbb{R}^N formados por esses vetores, respectivamente, por $F^s(\xi)$ e $F^u(\xi)$.

Daí, por definição, se v é um vetor estável $\|(\prod_{i=0}^{k(n_0-1)} \xi_i)v\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Como a sequência é periódica, isso implica $s_0(v) < \infty$, donde $v \in E_0^s(\xi)$. Similarmente, se u é um vetor instável então $u \in E_0^u(\xi)$.

Por outro lado, como os vetores estáveis/instáveis decompõem \mathbb{R}^N em soma direta, e como um vetor $v \in E_0^s(\xi)$ não pode ter componente em

$F^u(\xi)$, temos que $E_0^S(\xi) \subset F^s(\xi)$. Portanto, $E_0^S(\xi) = F^s(\xi)$, e similarmente $E_0^u(\xi) = F^u(\xi)$, donde segue que ξ é uma sequência hiperbólica.

Reciprocamente, se o mapa $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ possui um autovalor de módulo 1 então um autovetor v associado cumpre $s_0(v), u_0(v) < \infty$, por periodicidade. Portanto não temos $E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^N$, e a sequência não é hiperbólica. \square

O leitor que não teve contato com o trabalho de Mañé, [44], certamente está se perguntando o que isso tudo tem haver com a propriedade estrela, ou (pior ainda) com dinâmica! Observe que todos os conceitos introduzidos nesta seção envolvem apenas Álgebra Linear. Acontece que temos uma maneira muito simples de gerar uma sequência periódica de isomorfismos, a partir de um sistema dinâmico, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.11. *Considere um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Suponha que temos $p \in \text{Per}(f)$, hiperbólico, de período n . Adotando bases ortonormais em $T_{f^i(p)}M$, $1 \leq i \leq n$, podemos identificar $Df(f^i(p)) : T_{f^i(p)}M \rightarrow T_{f^{i+1}(p)}M$ com isomorfismos lineares de \mathbb{R}^N . Então, usando o lema 4.10 a sequência $\xi_j = Df(f^j(p))$ é hiperbólica.*

Podemos obter um exemplo idêntico, no caso de campos de vetores, usando o fluxo linear de Poincaré da órbita periódica. O que esses exemplos nos ensinam é que essa noção de sequências periódicas, na verdade é uma forma de tentar obter informações sobre órbitas periódicas usando apenas Álgebra Linear. E qual a sua relação com a propriedade estrela? Ora, como a propriedade estrela envolve robustez na hiperbolicidade dos pontos periódicos, é razoável pensar que isso será traduzido como robustez na hiperbolicidade das *sequências*.

De modo a tornar isso rigoroso, considere agora uma família $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de sequências periódicas de isomorfismos lineares. Dizemos que ela é *hiperbólica* se toda sequência da família é uma sequência hiperbólica e

$$\sup\{\|\xi_n^{(\alpha)}\| | \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

Se $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ e $\{\eta^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ são famílias de sequências periódicas de isomorfismos lineares de \mathbb{R}^N , definimos a distância entre elas por

$$d(\xi, \eta) = \sup\{\|\xi_n^{(\alpha)} - \eta_n^{(\alpha)}\| | \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dizemos que duas famílias são *periodicamente equivalentes*, se para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ o período mínimo de $\xi^{(\alpha)}$ e $\eta^{(\alpha)}$ coincide.

Dizemos que uma família hiperbólica de sequências periódicas $\{\xi^{(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ é *uniformemente hiperbólica* se existe $\varepsilon > 0$ tal que toda família η periodicamente equivalente e suficientemente próxima, isto é, $d(\xi, \eta) \leq \varepsilon$, também é hiperbólica.

O leitor atento já deve suspeitar que a propriedade estrela é uma fonte de famílias uniformemente hiperbólicas de sequências periódicas: basta definir cada sequência como no exemplo 4.11 acima. Ou seja, a família é formada pelos campos estrela e cada uma de suas órbitas periódicas, e as respectivas sequências são definidas como no exemplo 4.11. E a grande utilidade disto está no seguinte teorema.

Teorema 4.12 (Lema II.3 [44]). *Se $\{\xi^{(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ é uma família uniformemente hiperbólica de sequências periódicas de isomorfismos de \mathbb{R}^N , então existem constantes $K > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

1. *Se $\alpha \in \mathcal{A}$ e $\xi^{(\alpha)}$ possui período minimal $n \geq m$, então*

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{m+j+i}^{(\alpha)} \right) |E_{m+j}^s(\xi^{(\alpha)})\right\| \leq K\lambda^k$$

e

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{m+j+i}^{(\alpha)} \right)^{-1} |E_{m(j+1)}^u(\xi^{(\alpha)})\right\| \leq K\lambda^k,$$

onde $k = \lfloor n/m \rfloor$.

2. *Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{Z}$:*

$$\left\| \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{j+1+i}^{(\alpha)} |E_j^s(\xi^{(\alpha)})\right\| \cdot \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{j+i}^{(\alpha)} \right)^{-1} |E_{j+m}^u(\xi^{(\alpha)})\right\| \leq \lambda$$

3. *Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{m+j+i}^{(\alpha)} \right) |E_{m+j}^s(\xi^{(\alpha)})\right\| < 0$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{m+j+i}^{(\alpha)} \right)^{-1} |E_{m(j+1)}^u(\xi^{(\alpha)})\right\| < 0.$$

Lembre que, dada uma sequência periódica e hiperbólica de isomorfismos, temos contração e expansão em direções complementares. No caso de uma família hiperbólica de sequências periódicas, as taxas de contração e expansão de cada sequência da família não têm porque serem as mesmas. O que o item 1 do Teorema 4.12 diz é que, se a família for *uniformemente hiperbólica*, então (ao menos para sequências com período suficientemente grande) as taxas de contração e expansão são uniformes. Já o item 2, diz que as sequências da família gozam de uma propriedade do tipo dominação, mas (e isto é fundamental nas aplicações) com uma constante de dominação λ uniforme. O item 3 diz que assintoticamente em média, todas as sequências tem contração/expansão *exponencial*. Como um campo estrela dá origem a uma família uniformemente hiperbólica (provaremos isso adiante) de sequências periódicas, obteremos essas propriedades (uniformes) para todas as órbitas periódicas numa vizinhança de X , e isso graças a um teorema de Álgebra Linear!

Bem, apesar disto, o leitor não deve se enganar achando que a prova do Teorema 4.12 é fácil. De fato, é longa e intrincada. Não a apresentaremos neste livro, mas o leitor pode encontrá-la em [44]. Por outro lado, no apêndice B apresentamos uma prova, pelo menos do item 2 do teorema, no caso de difeomorfismos em superfícies, para ilustrar as idéias envolvidas.

4.3 Dominação para o fluxo Linear de Poincaré

Agora vamos ver rigorosamente como a propriedade estrela é uma fonte de famílias uniformemente hiperbólicas de sequências periódicas. Considere X um campo estrela e \mathcal{U} uma vizinhança de X formada por fluxos estrela. Considere ainda $\mathcal{A} = \{\alpha = (x, Y); Y \in \mathcal{U}, x \in Per(Y)\}$. Usando bases ortonormais em N_y , podemos identificar o fluxo linear de Poincaré de Y , $P_Y^t : N_y \rightarrow N_{Y_t(y)}$, com isomorfismos lineares de \mathbb{R}^N , onde $y \in M^*$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ vamos definir uma sequência hiperbólica $\xi^{(\alpha)}$ de isomorfismos lineares.

Seja π o período de x , denote também por $[\pi]$ a parte inteira de π . Se $\pi < 2$, defina $\xi_j^{(\alpha)} = P_Y^{\pi j}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Se $\pi \geq 2$, a sequência é definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(\alpha)} &= P_Y^1(x), \quad \xi_2^{(\alpha)} = P_Y^1(Y_1(x)), \quad \dots, \quad \xi_{[\pi]-1}^{(\alpha)} = P_Y^1(Y_{[\pi]-2}(x)) \\ \xi_{[\pi]}^{(\alpha)} &= \xi_0^{(\alpha)} = P_Y^{\pi-[\pi]+1}(Y_{[\pi]-1}(x)) \quad \text{e} \quad \xi_j^{(\alpha)} = \xi_j^{(\alpha)} \end{aligned}$$

se $j - j' = n[\pi]$, i.e. os demais termos da sequência são obtidos repetindo-se periodicamente os $[\pi]$ primeiros.

Como $\prod_{j=1}^{[\pi]} \xi_j^{(\alpha)} = P_Y^\pi$, segue que cada $\xi^{(\alpha)}$ é uma sequência hiperbólica.

Afirmamos que ξ é uma família uniformemente hiperbólica. De fato, suponha que não seja. Então, tão perto quanto se queira de ξ , é possível encontrar uma família η periodicamente equivalente a ξ , possuindo uma de suas sequências não hiperbólicas.

Logo, existe $\alpha = (x, Y)$ tal que $\eta^{(\alpha)}$ não é hiperbólica. Dado $\delta > 0$, tomando η suficientemente próxima de ξ , vemos, usando a desigualdade triangular, que

$$\left\| \prod_{j=1}^{[\pi]} \eta_j^{(\alpha)} - P_Y^\pi(x) \right\| < \delta.$$

Considerando $\delta > 0$ do Lema de Franks aplicado a Y e \mathcal{U} , segue que existe $\bar{Y} \in \mathcal{U}$ com $x \in \text{Per}(\bar{Y})$ e período igual π , mas tal que $P_{\bar{Y}}^\pi(x) = \prod_{j=1}^{[\pi]} \eta_j^{(\alpha)}$, portanto x não é hiperbólico para \bar{Y} . Como \mathcal{U} é formado por campos estrela, isso é um absurdo, e prova que ξ é uniformemente hiperbólica.

Traduzindo o teorema 4.12 nesse contexto particular, e denotando os subespaços estável e instável de um ponto periódico respectivamente por $E^s(x)$ e $E^u(x)$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.13. *Se X é um campo estrela, então existe uma vizinhança \mathcal{U} de X e existem constantes $K > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo campo $Y \in \mathcal{U}$ valem:*

1. *Se $Y \in \mathcal{U}$ com $p \in \text{Per}(Y)$ possui período mínimo $\tau \geq m$ então*

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|P_Y^m(Y_{mj}(p))|_{E^s}\| \leq K\lambda^k$$

e

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|P_Y^{-m}(Y_{m(j+1)}(p))|_{E^u}\| \leq K\lambda^k,$$

onde $k = [\tau/m]$.

2. *Para todo $Y \in \mathcal{U}$ e todo $p \in \text{Per}(Y)$, temos*

$$\|P_Y^m(p)|_{E^s}\| \|P_Y^{-m}(Y_m(p))|_{E^u}\| \leq \lambda.$$

3. Para todo $Y \in \mathcal{U}$ e todo $p \in \text{Per}(Y)$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|P_Y^m(Y_{m_j}(p))|_{E^s}\| < 0$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|P_Y^{-m}(Y_{m(j+1)}(p))|_{E^u}\| < 0$$

O ítem 2 do teorema 4.13 diz que para todo $Y \in \mathcal{U}$ e todo $p \in \text{Per}(Y)$ obtemos uma decomposição $N_{M^*|_{\text{Per}_j(Y)}} = E^s \oplus E^u$ do fibrado normal nos pontos periódicos de índice j , que satisfaz:

$$\|P_Y^m(x)|_{E^s}\| \cdot \|P_Y^{-m}(Y_m(x))|_{E^u}\| \leq \lambda.$$

Ou seja, temos uma decomposição dominada sobre $\text{Per}_j(Y)$. Observe que, para cada órbita periódica de índice j do campo Y temos uma decomposição dominada, dada pela decomposição hiperbólica de tal órbita. A novidade agora, é que a constante de dominação é a mesma para todas as órbitas periódicas, e é isso que permite dizer que temos uma decomposição dominada sobre $\text{Per}_j(Y)$. Como o índice dessa decomposição está fixado, podemos passá-la ao fecho, obtendo, em particular o seguinte resultado:

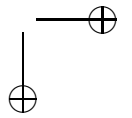
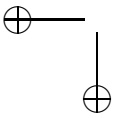
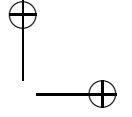
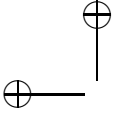
Teorema 4.14. *Se X é um campo estrela então X admite uma decomposição dominada $E^s \oplus E^u$ para o fluxo linear de Poincaré sobre $\overline{\text{Per}_j(X)}$. Mais ainda, $\dim E^s \equiv j$.*

Mais ainda, como a força da dominação sobre órbitas periódicas é uniforme na vizinhança \mathcal{U} , temos o seguinte corolário no caso pré-periódico.

Corolário 4.15. *Se X é estrela e $1 \leq j \leq d-2$ então qualquer subconjunto compacto invariante e sem singularidades $\Lambda \subset \text{Per}_j^*(X)$ possui uma decomposição dominada $E \oplus F$ para o fluxo linear de Poincaré. Mais ainda, $\dim E \equiv j$.*

Finalizamos esta seção reenunciando o teorema 4.13 para referências futuras (de fato, no fundo tomamos logaritmos, maiores detalhes em [39]). Para não confundir as constantes vamos dar um outro nome a estas.

Teorema 4.16. *Seja X estrela. Existe uma vizinhança \mathcal{U} de X e existem números $\tilde{\eta} > 0$ e $\tilde{T} > 0$ tais que para todo $p \in \text{Per}(Y)$, com $Y \in \mathcal{U}$, temos que:*



- $\|P_Y^t(p)|_{E^s}\| \|P_Y^{-t}(Y_t(p))|_{E^u}\| \leq e^{-2\tilde{\eta}t}$ para qualquer $t \geq \tilde{T}$.
- Se τ é o período de p , k é um número natural e $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j = k\tau$ é partição de $[0, k\tau]$ com $t_{i+1} - t_i \geq \tilde{T}$.

Então

$$\frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^{j-1} \log \|P_Y^{t_{i+1}-t_i}(Y_{t_i}(p))|_{E^s}\| < -\tilde{\eta}$$

$$\frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^{j-1} \log \|P_Y^{-(t_{i+1}-t_i)}(Y_{t_{i+1}}(p))|_{E^u}\| < -\tilde{\eta}.$$

4.4 Mais um critério para hiperbolicidade

Se x é um ponto regular então definimos os conjuntos $D^s(x)$ e $D^u(x)$ da seguinte forma:

$$D^s(x) = \{v \in N_x; \|P_X^t(x).v\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

$$D^u(x) = \{v \in N_x; \|P_X^t(x).v\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

Para treinar a relação entre estes conjuntos e a noção de dominação, recomendamos o seguinte exercício para o leitor.

Exercício 4.17. *Seja $E \oplus F$ uma decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré sobre um conjunto Λ e $x \in \Lambda$.*

- Se $\dim E(x) \leq \dim D^s(x)$ então $E(x) \subset D^s(x)$.
- Se $\dim E(x) \geq \dim D^s(x)$ então $D^s(x) \subset E(x)$.

Em particular se $\dim E(x) = \dim D^s(x)$ então $E(x) = D^s(x)$.

Obviamente, um enunciado análogo vale para o fibrado F .

Para nossos propósitos, será importante notar que é possível caracterizar a hiperbolicidade, novamente usando o fluxo linear de Poincaré, porém usando estes conjuntos. Esta observação segue dos trabalhos de Selgrade, Sacker-Sell, Mañé e Liao (ver [65], [42] e [38], respectivamente) e iremos apresentá-la agora.

Teorema 4.18. *Um conjunto Λ compacto e invariante sem singularidades é hiperbólico se, e só se,*

$$N_x = D^s(x) \oplus D^u(x) \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

No que segue, daremos uma prova deste resultado, até o final desta seção, Λ é um conjunto compacto invariante e sem singularidades.

Primeiramente, usando compacidade, encontramos um critério mais fraco para a hiperbolicidade do fluxo linear de Poincaré.

Lema 4.19. *Seja $N_\Lambda = E \oplus F$ uma decomposição invariante para o fluxo linear de Poincaré. Suponha que exista $T_0 > 1$ tal que para todo $x \in \Lambda$ existem $1 < t(x), s(x) \leq T_0$ tais que*

$$\|P_X^{t(x)}(x)|_E\| < \frac{1}{2} \text{ e } \|P_X^{-s(x)}(x)|_F\| < \frac{1}{2}.$$

Então o fluxo linear de Poincaré sobre Λ é hiperbólico.

Demonstração. Observe que para todo T temos:

$$\|P_X^T(x)|_E\| \leq \|P_X^{t(x)}(x)|_E\| \|P_X^{T-t(x)}(X_t(x))|_E\| < \frac{1}{2} \|P_X^{T-t(x)}(X_t(x))|_E\|.$$

Assim, por indução, temos que

$$\|P_X^T(x)|_E\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{T}{T_0} \rfloor} \|P_X^{T-l}(X_l(x))|_E\|$$

onde $l > 0$, $T - l < T_0$ e $[a]$ denota a parte inteira de a . Por outro lado, usando compacidade temos que

$$C := \max\{\|P_X^s(x)|_E\|; \text{ onde } x \in \Lambda \text{ e } s \in [0, T_0]\} < \infty.$$

Assim, temos

$$\|P_X^t(x)|_E\| \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{t}{T_0} \rfloor} =: C e^{-\lambda t}.$$

Estimativa semelhante é obtida para o fibrado F . A prova está terminada. \square

A partir deste lema poderíamos tentar mostrar o teorema 4.18 com o seguinte argumento ingênuo porém, não inteiramente correto.

Note que por definição a decomposição $D^s \oplus D^u$ é invariante por P_X^t . Vamos supor que a decomposição também é contínua.

Caso a decomposição não fosse hiperbólica para o fluxo linear de Poincaré, pelo lema anterior poderíamos supor que para todo N natural existe $x_N \in \Lambda$ tal que para todo $0 < t \leq N$ temos que

$$\|P_X^t(x_N)|_{D^s}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Caso contrário, usando o fato que N é soma direta entre D^s e D^u , teríamos uma desigualdade semelhante para o fibrado D^u .

Por compacidade, podemos supor que $x_N \rightarrow x$ e $D^s(x_N) \rightarrow D^s(x)$. Mas então para todo $t > 0$ teríamos que

$$\|P_X^t(x)|_{D^s}\| \geq \frac{1}{2}.$$

E isto é um absurdo pela definição de D^s .

Assim o fluxo linear de Poincaré é hiperbólico, e pela Proposição 4.6, Λ é hiperbólico. O problema agora é conseguir mostrar a continuidade da decomposição. Isto se resumiria a mostrar que se existe uma sequência $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v)$ tal que $P_X^t(x_k)v_k \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ então $P_X^t(x)v \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isto não é muito simples de provar pois não temos controle na velocidade da convergência em t , quando $k \rightarrow \infty$. O ponto crucial para contornar este problema é lembrar que a decomposição é feita em soma direta, como será visto na prova abaixo.

Moralmente estamos usando o princípio: “Em sistemas dinâmicos, se alguma coisa vai pra zero então, com grande chance, ela vai exponencialmente rápido pra zero”.

Prova do teorema 4.18

Reduzimos a prova do teorema 4.18 em mostrar que a hipótese do lema acima é satisfeita.

Guiados pela dificuldade apresentada acima (para tentar mostrar a continuidade da decomposição), vamos mostrar que sob uma condição de compacidade nós “podemos passar o limite”. É na prova deste lema que a hipótese de que a soma é direta é usada. Por simplicidade, uma vez que

o campo X está fixado, até o fim desta seção usaremos a notação P^t para denotar o fluxo linear de Poincaré P^t_X .

Lema 4.20. *Seja $K \subset T_\Lambda M$ um compacto. Dados $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v)$ e $t_k \rightarrow +\infty$ tais que $\{P^{[0, t_k]}(x_k)v_k\} \subset K$ então temos que $v \in D^s(x)$. Um resultado análogo vale para D^u .*

Demonstração. Note que $N_\Lambda = D^s \oplus D^u$ implica que, se $u \in N_x$ é tal que $\sup\{\|P^t(x)u\|; t \in \mathbb{R}\} < \infty$, então $u = 0$. Pois, se $u \neq 0$ então ele possui uma componente não-nula em $D^s(x)$ ou em $D^u(x)$, e portanto $\|P^t(x)u\|$ explode quando $t \rightarrow +\infty$ ou quando $t \rightarrow -\infty$, logo $\sup\{\|P^t(x)u\|; t \in \mathbb{R}\} = \infty$.

Para provar que $v \in D^s(x)$ é suficiente mostrar que se $u = \lim P^{t_n}(x)v$, onde $y = \lim X_{t_n}(x)$ e $t_n \rightarrow +\infty$, então $u = 0$.

Como para k suficientemente grande temos que $P^t(x_k)v_k \in K$ e $P^t(x)v = \lim P^t(x_k)v_k$ temos que $P^t(x)v \in K$ para todo $t \geq 0$, uma vez que K é fechado. Deste modo, u pertence a K .

Analogamente, para todo $t \in \mathbb{R}$, se n é grande o bastante, $P^{t+t_n}(x)v \in K$. Assim, temos que $P^t(y)u \in K$, uma vez que $P^t(y)u = \lim P^{t+t_n}(x)v$. Como K é compacto, isso implica que a órbita de u pelo Fluxo Linear de Poincaré é limitada, logo

$$\sup\{\|P^t(y)u\|; t \in \mathbb{R}\} < +\infty,$$

e, como vimos, isto nos leva a concluir que $u = 0$. □

Pretendemos encontrar tal compacto que nos auxiliará a mostrar que a hipótese do Lema 4.19 é satisfeita pela decomposição $D^s \oplus D^u$. Com esse intuito, definimos o seguinte conjunto: $A = \{(x, v); v \in D^s(x) \text{ e } \|P^t(x)v\| \leq 1, \forall t \geq 0\}$ que é positivamente invariante pelo Fluxo Linear de Poincaré.

Se mostramos que A é fechado então ele será compacto. Para este fim, tome $(x_k, v_k) \in A$ tal que $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v)$. Como o fluxo linear de Poincaré é contínuo, fixado $t \geq 0$ temos

$$\|P^t(x)v\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P^t(x_k)v_k\| \leq 1,$$

pois $(x_k, v_k) \in A$. Pela mesma razão, segue que para todo $0 \leq s \leq k$ temos $\|P^s(x_k)v_k\| \leq 1$. Daí, como M é compacta, decorre do lema 4.20 que $v \in D^s(x)$. Portanto, $(x, v) \in A$.

Mais adiante veremos como A pode nos ajudar. Porém, adiantamos que a idéia é a seguinte: caso A não fosse apropriado (no sentido do Lema 4.20), então para cada $(x, v) \in A$ em algum tempo futuro $P^t(x)v$ escaparia dele e

portanto, mediante um argumento tipo teorema da alfândega, obteríamos uma situação de bordo. O lema a seguir explicita isto.

Lema 4.21. *Seja $(x, v) \in A$ tal que $(x, \theta v) \notin A$ sempre que $\theta > 1$. Então existe um tempo $\tau \geq 0$ de modo que $\|P^\tau(x)v\| = 1$.*

Demonstração. Como A é compacto e $v \in D^s(x)$, existe $\tau \geq 0$ tal que

$$\|P^\tau(x)v\| = \sup\{\|P^t(x)v\|; t \geq 0\}.$$

Mais ainda, por definição de A , temos que $\|P^\tau(x)v\| \leq 1$.

Por linearidade,

$$\sup\{\|P^t(x)\theta v\|; t \geq 0\} = \theta \sup\{\|P^t(x)v\|; t \geq 0\},$$

para todo $\theta > 1$. Pela hipótese, $\sup\{\|P^t(x)\theta v\|; t \geq 0\} > 1$, logo

$$\sup\{\|P^t(x)v\|; t \geq 0\} > \frac{1}{\theta}.$$

Assim $\|P^\tau(x)v\| = \sup\{\|P^t(x)v\|; t \geq 0\} \geq 1$, e portanto $\|P^\tau(x)v\| = 1$. \square

O próximo lema proíbe cotas inferiores para certas sequências em A .

Lema 4.22. *Fixe um $0 < \lambda \leq 1$. Então, não existe uma sequência $(x_k, v_k) \in A$ com tempos $t_k \rightarrow +\infty$ e de forma que $\|P^{t_k}(x_k)v_k\| \geq \lambda$.*

Demonstração. Suponha que exista uma sequência em A com essa propriedade. Então, podemos definir $(\xi_k, \eta_k) = (X_{t_k}(x_k), P^{t_k}(x_k)v_k)$, e, a menos de tomar subsequências, teremos $(\xi_k, \eta_k) \rightarrow (\xi, \eta)$. Como $(\xi_k, \eta_k) \in A$, para todo k , temos $(\xi, \eta) \in A$. Em particular, $\eta \in D^s(\xi)$.

Por hipótese $\|\eta_k\| \geq \lambda$. Assim, $\|\eta\| \geq \lambda$.

Por outro lado, como A é positivamente invariante pelo fluxo linear de Poincaré, temos $\{P^{[0, t_k]}(x_k)v_k\} \subset A$, o que é equivalente a $\{P^{[-t_k, 0]}(\xi_k)\eta_k\} \subset A$, e portanto $\eta \in D^u(\xi)$, via o Lema 4.20. Como $N_\xi = D^s(\xi) \oplus D^u(\xi)$ temos que $\eta = 0$. Absurdo, pois $\|\eta\| \geq \lambda$. \square

Estamos prontos para mostrar o teorema 4.18. Nosso objetivo é obter um $T > 0$ tal que $\|P^T(x)v\| \leq \frac{1}{2}\|v\|$, para todo $v \in D^s(x)$ com $x \in \Lambda$, pois isto obviamente implica que a hipótese do Lema 4.19 é satisfeita.

Se isto não ocorre então, para todo $n > 0$, existe um ponto x_n e $v_n \in D^s(x_n)$ com $\|v_n\| = 1$ tal que $\|P^n(x_n)v_n\| > \frac{1}{2}$. Em princípio não sabemos se $(x_n, v_n) \in A$, para obter uma contradição com o lema 4.22. O próximo lema, que será provado mais tarde, nos ajuda a garantir isso.

Lema 4.23. *Existe um $a \in (0, 1]$ tal que se $v \in D^s(x)$ e $\|v\| \leq a$ então $(x, v) \in A$.*

Tomando av_n no lugar de v_n , podemos supor que $\|v_n\| = a$. Daí, como $v_n \in D^s(x_n)$ e $\|v_n\| = a$, pelo lema 4.23 $(x_n, v_n) \in A$. Além disso, (x_n, v_n) satisfaz $\|P^n(x_n)v_n\| > \frac{1}{2}a$.

Contudo, uma sequência (x_n, v_n) com tais propriedades viola o lema 4.22, o que termina a prova do teorema 4.18.

Prova do lema 4.23. Suponha que isso é falso. Então, podemos obter uma sequência $v_k \in D^s(x_k)$, $x_k \in \Lambda$, satisfazendo $\|v_k\| \leq \frac{1}{k}$, mas tal que $(x_k, v_k) \notin A$, para todo k .

Começamos observando que, por v_k pertencer a $D^s(x_k)$, $\sup\{\|P^t(x_k)v_k\|; t \geq 0\}$ é finito. Isto nos permite definir λ_k , tal que

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup\{\|P^t(x_k)v_k\|; t \geq 0\}.$$

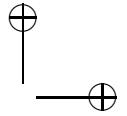
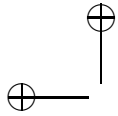
Como $(x_k, v_k) \notin A$, $0 < \lambda_k < 1$.

Pela definição de λ_k , é claro que $(x_k, \lambda_k v_k) \in A$. Como A é compacto, existe um tempo $\tau \geq 0$ tal que $\|P^\tau(x_k)v_k\| = \sup\{\|P^t(x_k)v_k\|; t \geq 0\}$. Portanto, pela definição de λ_k temos que $\|P^\tau(x_k)\lambda_k v_k\| = 1$. Assim, para todo $\theta > 1$, $(x_k, \theta\lambda_k v_k) \notin A$.

Usando o Lema 4.21, retornamos a situação de bordo, isto é, existem tempos t_k tais que $\|P^{t_k}(x_k)\lambda_k v_k\| = 1$.

Como $\|\lambda_k v_k\| \leq \|v_k\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, se a sequência de tempos t_k fosse limitada, a continuidade do Fluxo Linear de Poncaré implicaria $\|P^{t_k}(x_k)\lambda_k v_k\| \rightarrow 0$. Portanto temos que $t_k \rightarrow +\infty$.

Finalmente, chegamos a conclusão que a sequência $(x_k, \lambda_k v_k) \in A$ satisfaz $\|P^{t_k}(x_k)\lambda_k v_k\| = 1$, com $t_k \rightarrow +\infty$, o que é absurdo pelo Lema 4.22. \square



Capítulo 5

O Caso Separado Não Singular

Neste capítulo estudamos a hiperbolicidade de $\overline{\text{Per}(X)}$ de um campo estrela desde que pontos periódicos de índices diferentes não se acumulem.

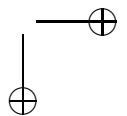
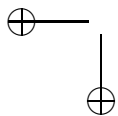
5.1 O Argumento de Mañé

Em [44], Mañé mostra a seguinte caracterização para difeomorfismos Axioma A, na presença da propriedade estrela.

Teorema 5.1. *Seja f um difeomorfismo estrela. f é Axioma A se, e só se, para $i \neq j$ temos $\overline{\text{Per}_i(f)} \cap \overline{\text{Per}_j(f)} = \emptyset$.*

Onde, como sempre $\text{Per}_i(f)$ denota os pontos periódicos com índice i . Como mostrado nos capítulos anteriores, usando o teorema 4.12 e o lema de Franks, temos uma decomposição dominada $E \oplus F$ em $\overline{\text{Per}_i(f)}$. Primeiramente, Mañé mostra que esta decomposição é de fato hiperbólica. Por reversão no tempo, basta mostrar que o fibrado E contrai.

O argumento é o seguinte, caso o fibrado E não fosse contrator, então seria possível criar um ponto periódico próximo de $\text{Per}_i(f)$ com índice menor. Para obter este índice, não basta obter um ponto periódico próximo de um ponto com má contração, e sim precisamos de que a órbita periódica



inteira esteja próxima da órbita onde há má contração. Ou seja, precisamos de uma espécie de *shadowing*. Para este fim, Mañé cria seu famoso *ergodic closing lemma* que será apresentado na próxima seção. No decorrer do capítulo iremos mostrar como usar o *ergodic closing lemma* para obter hiperbolicidade no caso de fluxos.

Para terminar a prova do teorema acima, precisamos mostrar que, $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. Neste ponto, Mañé argumenta da seguinte forma: caso existisse um ponto $x \in \Omega(f) - \overline{\text{Per}(f)}$, pelo *closing lemma* e a semi-continuidade de órbitas periódicas (devido a propriedade estrela), um novo ponto periódico seria criado próximo a x . Mas a criação de um ponto periódico se dá através de um ponto periódico não hiperbólico. Com efeito, se temos um arco f_t , com $0 \leq t \leq 1$, de difeomorfismos tal que em uma vizinhança U de x f_0 não tem pontos periódicos de período n e f_1 tem, então, por argumentos de conexidade, existiria algum t_0 tal que f_{t_0} possui um ponto periódico não-hiperbólico em U , contradição com a propriedade estrela (maiores detalhes veja lema 3.1 de [46]).

No caso de fluxos não podemos argumentar desta forma, pois é possível que a órbita periódica desapareça ao longo do arco, sem perder hiperbolicidade, pelo simples motivo de seu período tender a infinito. Assim, o fato de que $\Omega(X) = \overline{\text{Per}(X)}$ precisa de outro tratamento que será feito nos próximos capítulos.

5.2 O Ergodic Closing Lemma de Mañé

Nesta seção enunciaremos aqui uma versão do importante *ergodic closing lemma* de Mañé. A versão apresentada aqui será para aplicações de tempo 1 de fluxos, e pode ser encontrada em [32], por exemplo.

Para $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ seja $B_\varepsilon(X, x) = \{y \in M; d(X_t(x), y) \leq \varepsilon \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\}$ a ε -vizinhança da órbita de x .

Vamos definir $\Sigma(X)$ como o conjunto de pontos $x \in M$ tal que para toda vizinhança \mathcal{U} de X e para todo $\varepsilon > 0$, existe $Y \in \mathcal{U}$, $y \in \text{Per}(Y)$ com período $T_0 > 0$ e números reais t_0, t_1 com $t_0 < t_1$, tais que

- $X = Y$ em $M - B_\varepsilon(X, x)$,
- $d(Y_t(y), X_t(x)) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq t \leq T_0$,
- $\{X_t(x); t_0 \leq t \leq t_1\} \subset \{Y_t(y); t \geq 0\}$ e $(t_1 - t_0)/T_0 > 1 - \varepsilon$.

O primeiro ítem diz que Y pode ser visto como uma perturbação local de X próximo a órbita de x . O segundo ítem, talvez o mais expressivo, diz que a órbita periódica y de Y sombreia a órbita de x por um bom tempo. E o terceiro ítem diz que grande parte da X -órbita de x e da Y -órbita de y coincidem. Note que $\Sigma(X)$ é X_1 -invariante.

Lema 5.2 (Ergodic Closing Lemma). *Se $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ então para qualquer medida de probabilidade e Boreleana μ que é X_1 -invariante temos*

$$\mu(\Sigma(X) \cup \text{Sing}(X)) = 1.$$

5.3 O Argumento de Redução do Índice

Nesta seção iremos dar uma prova da versão para fluxos sem singularidades do teorema de separação de Mañé, devido a Toyoshiba em [71]. Como a propriedade de separação é importante para outros assuntos iremos formalizar sua definição.

Definição 5.3. *Um campo X é dito separado se para quaisquer $0 \leq i \neq j \leq d - 1$ temos que*

$$\overline{\text{Per}_i(X)} \cap \overline{\text{Per}_j(X)} = \emptyset.$$

O principal resultado desta seção é o seguinte.

Teorema 5.4. *Seja X um campo estrela separado sem singularidades então $\overline{\text{Per}(X)}$ é hiperbólico.*

Antes de começar a prova iremos dar uma idéia geral do argumento.

Idéia da Prova

Primeiramente, pela propriedade de separação, basta provar que cada $\overline{\text{Per}_l(X)}$ é hiperbólico.

Como vimos nos capítulos anteriores, o fato de ser estrela e não ter singularidades implica que temos uma decomposição dominada $E^s \oplus E^u$ sobre $\overline{\text{Per}_l(X)}$ (de fato, temos que usar o Fluxo Linear de Poincaré, mas deixa pra lá, isto é só uma idéia). Mais ainda $\dim(E) = l$.

Vimos também que existem finitos poços e fontes, e portanto os casos $l = 0$ e $l = d - 1$ estão resolvidos.

Muito bem, a menos de reverter o tempo basta provar que E^s é contrator. Relembrando a idéia de Mañé, temos que se E^s não contrai, então é por que existe alguma órbita p tal que em média, possui expansão (ou uma contração muito fraca) e podemos supor que esta órbita pode ser fechada via o *ergodic closing lemma*.

Daí, você pode fechar e encontrar uma órbita periódica próxima. Mas, e aqui está uma observação importante, o índice desta órbita periódica não pode ser maior que l , pois, moralmente, $P_X^{n(p)}$ expande na direção E^s . Por dominação, na direção E^u tem que haver uma expansão mais forte ainda, e isso nos diz que E^u está contido no subespaço instável da órbita periódica, e portanto a dimensão do subespaço instável da órbita periódica é maior ou igual que a dimensão de E^u , logo o índice da órbita não supera l .

Se o índice desta órbita for l então temos uma contradição com o teorema 4.13, pois ele diz que a força de contração das órbitas periódicas numa zizinhaça de X , é uniformemente limitada, porém, a órbita periódica que encontramos possui força de contração arbitrariamente fraca.

Por outro lado, se o índice for menor que l , digamos i então iremos encontrar uma outra decomposição dominada $E' \oplus F'$, com $\dim(E') = i$ e outro ponto $y \in \overline{\text{Per}_l(X)}$. Se E' contrai, podemos sombrear essa órbita e encontrar um órbita periódica próxima (só que agora o que vai rolar não é o ergodic closing lemma, e sim um Shadowing Lemma generalizado para decomposições dominadas, devido a Liao). Mas como a órbita de y expande na direção E^u isso é carregado para a órbita periódica e concluímos o índice dela é menor do que ou igual a i .

Desse modo, pontos de $\overline{\text{Per}_l(X)}$ são acumulados por pontos periódicos de índice menor, violando a propriedade de separação.

Logo, E' não contrai. Daí, podemos repetir tudo de novo e *reduzir o índice* da decomposição dominada até que este seja zero. Mas isto geraria uma fonte contida na órbita de p (que é recorrente), o que é absurdo.

Demonstração

Pelo Teorema de Pliss, teorema 2.1, já sabemos que $\text{Per}_0(X)$ e $\text{Per}_{d-1}(X)$ são finitos, logo são iguais a seus fechos e portanto hiperbólicos. Dessa forma é suficiente provar que $\overline{\text{Per}_l(X)}$ é hiperbólico para cada $0 < l < d - 1$.

Como vimos no Teorema 4.14, o fato de ser estrela e não ter singularidades implica que temos uma decomposição dominada $E^s \oplus E^u$ sobre o

fibrado normal de $\overline{\text{Per}_l(X)}$ para o fluxo linear de Poincaré P_X^t associado ao campo X . Mais ainda, $\dim E = l$.

Desejamos provar que tal decomposição é hiperbólica e para isso basta, a menos de reverter o tempo, provar que E^s é contrator. Isto se resume a obter a hipótese do seguinte exercício, cuja solução segue do lema 4.19.

Exercício 5.5. *Se existe um inteiro $N > 0$ tal que*

$$\|P_X^{mN}(x)|_{E^s}\| < \frac{1}{2},$$

para todo $x \in \overline{\text{Per}_l(X)}$, onde $m > 0$ é o inteiro dado pelo Teorema 4.13 então E^s contrai.

Para provar o Teorema 5.4 iremos supor que E^s não contrai, e chegar a conclusão de que X não é separado.

Vamos começar com um lema um pouco mais geral, que se encaixa nesse contexto. Lembre que $\Sigma(X)$ é o conjunto dado pelo *ergodic closing lemma*.

Lema 5.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ um compacto invariante pelo fluxo. Suponha que o subfibrado normal em Λ admita uma decomposição dominada para o Fluxo linear de Poincaré $N_\Lambda = E^s \oplus E^u$ de índice constante igual a l . Suponha ainda que o subfibrado E^s não é contrator. Então, existe um ponto recorrente $z \in \Lambda \cap \Sigma(X)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|P_X^m(X_{mi}(z))|_{E^s}\| \geq 0$$

Demonstração. Se E^s não contrai, então, usando o exercício 5.5, para todo $n > 0$ existe um ponto $x_n \in \Lambda$ tal que

$$\|P_X^{mn}(x_n)|_{E^s}\| \geq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{1}{n} \log \|P_X^{mn}(x_n)|_{E^s}\| \geq \frac{-\log 2}{n}.$$

Considere as medidas orbitais, por X_m , dos pontos x_n , dadas por $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{X_{mi}(x_n)}$. Podemos supor, a menos de tomar subsequências, que x_n

converge a um ponto $x \in \Lambda$ e que as medidas μ_n convergem a uma medida X_m -invariante μ . Em particular, isso implica que μ é suportada em Λ . Logo,

$$\int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu_n.$$

Mas, como

$$\begin{aligned} \int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|P_X^{mi}(X_i(x))|_{E^s}\| \\ &\geq \frac{1}{n} \log \|P_x^{mn}(x)|_{E^s}\| \geq \frac{-\log 2}{n}, \end{aligned}$$

segue que

$$\int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu \geq 0. \quad (5.1)$$

Pelo Teorema da Decomposição Ergódica [41] podemos supor que existe uma medida invariante e ergódica para X_m (a qual, por simplicidade também será chamada de μ) tal que a desigualdade 5.1 vale. Assim, pelo teorema de Birkhoff, para toda função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e μ quase todo ponto $x \in M$ vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(X_{im}(x)) = \int \varphi d\mu \quad (5.2)$$

Para obter o ponto z iremos aplicar 5.2 à função $\varphi = \log \|P_X^m|_{E^s}\|$. Para garantir que $z \in \Sigma(X)$ argumentamos da seguinte forma. Definimos uma medida X_1 invariante, ν , pondo

$$\nu = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (X_i)_*(\mu),$$

onde $(X_i)_*$ é o operador de *push-forward* no espaço das medidas. Como $\Sigma(X)$ é um conjunto X_1 -invariante, pelo *ergodic closing lemma* temos que

$$1 = \nu(\Sigma(X)) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu((X_i)(\Sigma(X))) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(\Sigma(X)) = \mu(\Sigma(X)).$$

Logo, existe um ponto recorrente $z \in \Lambda \cap \Sigma(X)$ (pois μ é suportada em Λ) de modo que 5.2 valha. Portanto temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|P_X^m(X_{mi}(z))|_{E^s}\| = \int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu \geq 0.$$

□

Antes de passar ao argumento de redução do índice, vamos apresentar uma outra versão do lema de Franks. Ela nos permite realizar perturbações de um campo a partir de perturbações do fluxo linear de Poincaré, só que agora ao longo de uma *órbita regular*, e deixando o campo original intacto fora de um tubo arbitrariamente pequeno que contenha a órbita regular.

Lema 5.7 (Lema de Franks). *Considere $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e um pedaço finito de órbita, isto é, um ponto $x \in M - \text{Sing}(M)$ e números $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Denotemos $s_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, \dots, n$. Então, para toda C^1 vizinhança \mathcal{U} de X existe um $\varepsilon > 0$ de modo que se $L_i : N_{X_{t_i}(x)} \rightarrow N_{X_{t_{i+1}}(x)}$, $i = 1, \dots, n$, são mapas lineares tais que*

$$\|L_i - P_X^{s_i}(X_{t_i}(x))\| < \varepsilon,$$

então existem $r > 0$ e um campo $Y \in \mathcal{U}$ satisfazendo:

- $Y_{s_i}(X_{t_i}(x)) = X_{t_{i+1}}(x)$, $i = 0, \dots, n - 1$,
- $P_Y^{s_i}(X_{t_i}(x)) = L_i$, $i = 1, \dots, n$ e
- $Y(y) = X(y)$ se y está fora de um tubo de raio r centrado em $O(x)$.

No apêndice C o leitor encontrará o enunciado preciso e uma prova do Lema de Franks.

Usando esses lemas, podemos dar o argumento de redução do índice, que está contido no seguinte resultado:

Teorema 5.8. *Seja X um campo estrela, e considere $E^s \oplus E^u$ a decomposição dominada de índice l para o Fluxo Linear de Poincaré de X sobre $\overline{\text{Per}_l(X)}$ obtida anteriormente (cf. Teorema 4.14). Se E^s não é contrator, então existe $z \in \overline{\text{Per}_l(X)}$ tal que para toda C^1 -vizinhança \mathcal{U} de X e todo $\varepsilon > 0$ existe $\bar{Y} \in \mathcal{U}$ com uma órbita periódica P de índice $r < l$, cuja \bar{Y} -órbita ε -sombreia a X -órbita de z .*

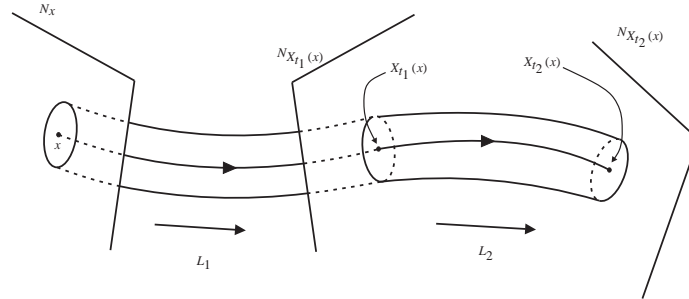


Figura 5.1:

Demonstração. Pelo lema anterior, existe $z \in \overline{\text{Per}_l(X)} \cap \Sigma(X)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|P_X^m(X_{mi}(z))|_{E^s}\| = \int \log \|P_X^m|_{E^s}\| d\mu \geq 0.$$

Considere λ do Teorema 4.13, e tome $\lambda < \lambda_0 < 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|P_X^m(X_{mi}(z))|_{E^s}\| \geq \log \lambda_0,$$

para todo $n \geq n_0$. Isso implica que

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|P_X^m(X_{mi}(z))|_{E^s}\| \geq \lambda_0^n, \quad (5.3)$$

para todo $n \geq n_0$.

Como $z \in \Sigma(X)$, podemos encontrar um campo Y C^1 -próximo de X possuindo uma órbita periódica $O(p)$ com período τ de modo que $d(Y_t(p), X_t(z))$ é tão pequena quanto queiramos, para todo $0 \leq t \leq \tau$. Em particular, isso implica que o período de p pode ser tomado arbitrariamente grande, já que z não é periódico. O argumento se resume a provar que o índice desta órbita periódica é estritamente menor do que l .

Formalmente procedemos assim: como τ é grande, podemos dividir a órbita de p em pedaços de tamanho m , e um último pedaço de tamanho

$\tau - mk$, onde $k = [\tau/m]$. Usaremos então isomorfismos lineares $A_i : N_{X_{mi}(z)} \rightarrow N_{Y_{mi}(p)}$, $0 \leq i \leq k$, e $A_{k+1} : N_{X_\tau(z)} \rightarrow N_{Y_\tau(p)}$ que levam E^s e E^u isometricamente sobre subespaços de $N_{Y_{mi}(p)}$, e cujas imagens inversas de E^s e E^u por A_0 e por A_{k+1} coincidem.

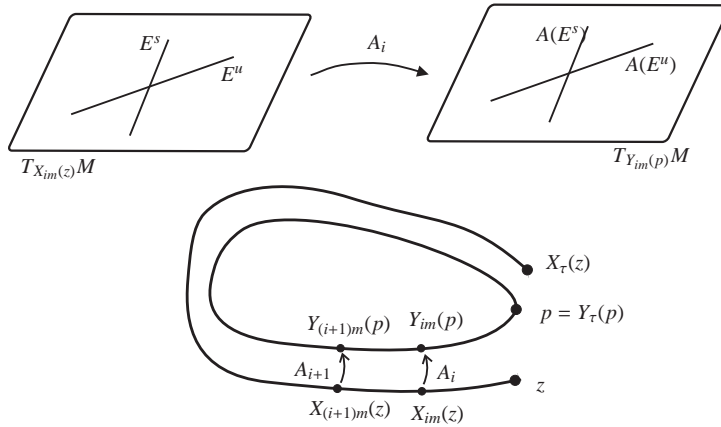


Figura 5.2:

Pelo sombreamento, a composição das isometrias com P_X^m , $L_i = A_{i+1}^{-1} \circ P_X^m(X_{mi}(z)) \circ A_i : N_{Y_{mi}(p)} \rightarrow N_{Y_{m(i+1)}(p)}$ será uma aplicação linear que aproxima $P_Y^m(Y_{mi})$. Usando o Lema de Franks obtemos um campo \bar{Y} que realiza essas aplicações lineares como fluxo linear de Poincaré. Com isso as imagens pelas isometrias da decomposição $E^s \oplus E^u$ formam uma decomposição $\bar{E}^s \oplus \bar{E}^u$ invariante pelo fluxo linear de Poincaré de \bar{Y} (deixamos como exercício para o leitor verificar isso).

Em resumo obtemos, via *ergodic closing lemma* + Lema de Franks, um campo \bar{Y} arbitrariamente próximo de X possuindo um ponto periódico p , com período tão grande quanto se queira, cuja \bar{Y} -órbita está tão próxima, quanto se queira, da X -órbita de z e tal que que o subfibrado normal N , restrito a \bar{Y} -órbita de p admite uma decomposição $\bar{E}^s \oplus \bar{E}^u$ satisfazendo:

$$\left\| P_{\bar{Y}}^{-m}(\bar{Y}_{m(j+1)}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| = \left\| P_X^{-m}(X_{m(j+1)})|_{E^u} \right\|,$$

$$\left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{mj}(p))|_{\bar{E}^s} \right\| = \left\| P_X^m(X_{mj})|_{E^s} \right\|,$$

para todo $0 \leq j \leq k$,

$$\left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_\tau(p))|_{\bar{E}^u} \right\| = \left\| P_X^{-(\tau-km)}(X_\tau(z))|_{E^u} \right\|,$$

e

$$\left\| P_{\bar{Y}}^{\tau-km}(\bar{Y}_{km}(p))|_{\bar{E}^s} \right\| = \left\| P_X^{\tau-km}(X_{km}(z))|_{E^s} \right\|.$$

Agora chegamos a um dos pontos mais importantes do argumento. Aqui, a condição 5.3 será usada para mostrarmos que o índice da órbita periódica criada via pequena perturbação de X , não supera o índice da decomposição dominada de $\text{Per}_l(X)$, o qual é igual a l . Depois, explorando a força uniforme nos pontos periódicos de período grande, dada pelo Teorema 4.13, veremos que, de fato, o índice da órbita periódica criada é estritamente menor do que l .

Para o primeiro desses objetivos, é suficiente provar que a norma de $P_{\bar{Y}}^\tau$ é menor do que 1, na direção \bar{E}^u , pois isso prova que $\bar{E}^u \subset F^u$, onde $F^s \oplus F^u$ é a decomposição hiperbólica de p para \bar{Y} . Pois, daí seguirá que, $\dim F^u \geq \dim \bar{E}^u = (\dim M - 1) - l$, donde $\dim F^s \leq l$, como desejamos.

Pelas igualdades obtidas acima, temos

$$\begin{aligned} \left\| P_{\bar{Y}}^\tau(\bar{Y}_\tau(p))|_{\bar{E}^u} \right\| &\leq \left(\prod_{i=0}^{k-1} \left\| P_{\bar{Y}}^{-m}(\bar{Y}_{\tau-mi}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| \right) \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_{\tau-km}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{\tau-m(i+1)}(p))|_{\bar{E}^s} \right\| \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-m}(\bar{Y}_{\tau-mi}(p))|_{\bar{E}^u} \right\|}{\left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{\tau-m(i+1)}(p))|_{\bar{E}^s} \right\|} \right) \\ &\quad \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_{\tau-km}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| \\ &\leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{\tau-m(i+1)}(p))|_{\bar{E}^s} \right\|} \right) \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_{\tau-km}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| \\ &= \frac{\lambda^k}{\prod_{i=0}^{k-1} \left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{\tau-m(i+1)}(p))|_{\bar{E}^s} \right\|} \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_{\tau-km}(p))|_{\bar{E}^u} \right\| \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^k \cdot \left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau-km)}(\bar{Y}_{\tau-km}(p))|_{\bar{E}^u} \right\|, \end{aligned}$$

onde, na primeira igualdade, multiplicamos e dividimos pela norma de $P_{\bar{Y}}$ restrita a direção \bar{E}^s , na segunda desigualdade usamos a dominação, e na terceira desigualdade usamos a estimativa 5.3.

Como $\tau - km = m(\tau/m - [\tau/m]) \leq m$, tomando $c = \sup \left\{ \left\| P_{\bar{Y}}^{-1}(x) \right\| ; x \in M \right\}$, obtemos

$$\left\| P_{\bar{Y}}^{-(\tau - km)}(\bar{Y}_{\tau - km}(p)) \right\|_{\bar{E}^s} \leq c^{\tau - km} \leq c^m,$$

e desse modo concluímos que $\left\| P_{\bar{Y}}^{\tau}(\bar{Y}_{\tau}(p)) \right\|_{\bar{E}^s} \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^k c^m$. Como $\lambda < \lambda_0$ se τ é grande, k também o é, e obtemos que

$$\left\| P_{\bar{Y}}^{\tau}(\bar{Y}_{\tau}(p)) \right\|_{\bar{E}^s} \leq \frac{1}{2},$$

como queríamos.

Agora lembre que o ítem 1 do Teorema 4.13 produz uma limitação uniforme para a força de contração de todos os pontos periódicos numa vizinhança de X . Sejam, $K > 0$ do referido teorema. Se tomarmos $\lambda < \lambda_0 < 1$ suficientemente próximo de 1 e τ grande o bastante, podemos supor que $K\lambda^k < \lambda_0^k$. Desse modo, caso tivéssemos $\dim F^s = l$ então pelo ítem 1 do Teorema 4.13 e pela estimativa 5.3 teríamos

$$K\lambda^k \geq \prod_{i=0}^{k-1} \left\| P_{\bar{Y}}^m(\bar{Y}_{mi}(p)) \right\|_{\bar{E}^s} = \prod_{i=0}^{k-1} \left\| P_X^m(X_{mi}(z)) \right\|_{E^s} \geq \lambda_0^k,$$

um absurdo. Portanto, o índice da órbita periódica é igual a r , com $r < l$. □

Como consequência desse teorema, podemos obter um sequência de campos $Y^n \rightarrow X$, uma sequência de órbitas periódicas $\{O(p_n)\}$, com período $\tau_n \rightarrow \infty$ e uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ satisfazendo $d(X_t(z), Y_t^n(p_n)) \leq \epsilon_n$, para todo $0 \leq t \leq \tau_n$. Além disso, podemos supor que cada $O(p_n)$ admite uma decomposição dominada (o que, em princípio, seria mera consequência trivial da hiperbolicidade de $O(p_n)$) com índice $r < l$, e (o ponto principal) constante de dominação λ , para todo n , devido ao ítem 2 do teorema 4.13. Graças a essa uniformidade, podemos passar a dominação ao limite, obtendo assim uma decomposição dominada $E^{s'} \oplus E^{u'}$ sobre $\bar{O}_X(z)$ de índice $r < l$. Ou seja, o que o Teorema 5.8 nos ensina é que se a decomposição $E^s \oplus E^u$ obtida pelo Teorema 4.14 não for hiperbólica, então podemos encontrar uma outra decomposição de índice menor! Para uso futuro, vamos destacar esse fato como o

Teorema 5.9. *Sejam X um campo estrela e $E^s \oplus E^u$ a decomposição para o Fluxo Linear de Poincaré sobre $\overline{Per_1(X)}$, obtida no Teorema 4.14. Se E^s não é contrator, então existe um ponto $z \in \overline{Per_1(X)}$ e uma decomposição dominada para o Fluxo Linear de Poincaré, $E^{s'} \oplus E^{u'}$, sobre $\overline{O_X(z)}$ de índice $r < l$.*

O próximo exercício versa sobre limites fundamentais gerados por poços ou fontes. Sua solução usa as técnicas apresentadas até agora. Ele impede que as órbitas $O_{Y_n}(p_n)$ da prova do teorema 5.9 sejam fontes.

Exercício 5.10. *Se X é estrela e Λ é um 0-limite fundamental sem singularidades então Λ é uma fonte periódica. Resultado análogo vale para $d - 1$ -limites fundamentais.*

Vamos provar a seguir um lema que é o passo essencial para finalizarmos a prova do Teorema 5.4. No que se segue m é um inteiro qualquer.

Fixe um compacto Λ invariante pelo fluxo de um campo X que admite uma decomposição $N_\Lambda = E \oplus F$ dominada para o Fluxo Linear de Poincaré, tal que E contrai, e F é não-uniformemente expansor. Uma corda $(x, X_{mn}(x))$ contida em Λ é dita uma $\gamma - F$ -corda, com $0 < \gamma < 1$ se

$$\prod_{j=1}^n \|P_X^{-m}(X_{m,j}(x))|_F\| \leq \gamma^n.$$

Dizemos que $(x, X_{mn}(x))$ é uma $\gamma - F$ -corda uniforme se $(X_{mk}(x), X_{mn}(x))$ é uma $\gamma - F$ -corda para todo $0 \leq k < n$. No que se segue deixaremos subentendido que γ -corda significa $\gamma - F$ -corda. O próximo exercício mostra que cordas suficientemente grandes produzem cordas uniformes:¹

Exercício 5.11. *Para todo $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < 1$ existem $N > 0$ e $0 < c < 1$, dependendo apenas de γ_0 e γ_1 , tais que se $(x, X_{mn}(x))$ é uma γ_0 -corda com $n \geq N$ então existem $0 < n_1 < \dots < n_\theta \leq n$, (ditos tempos hiperbólicos) com $\theta \geq nc$ e de modo que $(x, X_{m n_i}(x))$ é γ_1 -corda uniforme para todo $1 \leq i \leq \theta$.*

A utilidade disto é que cordas uniformes com recorrência produzem órbitas periódicas. Este é o conteúdo do *shadowing Lema de Liao* que apresentamos no apêndice deste livro, e cujo enunciado reproduzimos aqui para comodidade do leitor.

¹De fato esse exercício é uma versão discreta do Lema Numérico de Pliss (Lema 2.2). Por completude, colocamos uma solução completa no final do livro. Como uma dica, sugerimos ao leitor tentar provar o Lema D.1

Lema 5.12 (Liao Shadowing Lema). *Dados $0 < \gamma < 1$ e $\sigma > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que se $(x, X_{mn}(x))$ é uma γ -corda uniforme satisfazendo $d(x, X_{mn}(x)) < \epsilon$ então existe um ponto periódico p com período mn tal que $d(X_{mi}(x), X_{mi}(p)) < \sigma$, para todo $0 \leq i \leq n^2$.*

Voltando a prova do teorema 5.4, o papel do próximo lema é provar que, se $E^{s'}$ contrai, z é acumulado por órbitas periódicas de índice menor do que ou igual a r , insto implicará que o campo não pode ser separado.

Lema 5.13. *Se $E^{s'}$ contrai $\overline{O_X(z)} \cap \bigcup_{i=0}^r \overline{\text{Per}_i(X)} \neq \emptyset$*

Demonstração. Por hipótese temos uma decomposição dominada $E^{s'} \oplus E^{u'}$ sobre $\overline{O_X(z)}$. Caso $\overline{O_X(z)}$ fosse hiperbólico então, como a órbita de z é recorrente, bastaria usar o *shadowing lemma*. No caso geral, vamos usar o lema 5.12.

A idéia da prova é a seguinte: como temos força uniforme nas órbitas periódicas e a órbita de z é sombreada por órbitas periódicas, ela produz γ -cordas arbitrariamente grandes. Pelo exercício 5.11, temos cordas uniformes e recorrentes. Daí pelo lema 5.12 obtemos uma órbita periódica que sombreia a órbita de z . E o sombreamento implicará que o índice desta orbita tem que ser menor do que r .

Em primeiro lugar, vamos aplicar novamente a combinação *ergodic closing lemma* + lema de Franks usado na prova do Teorema 5.8, onde encontramos um campo \overline{Y} próximo a X tal que:

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|P_X^{-m}(X_{mj}(z))/_{E^{u'}}\| = \prod_{j=0}^{k-1} \|P_{\overline{Y}}^{-m}(\overline{Y}_{mj}(x))/_{\overline{E}^{u'}}\|,$$

onde $\overline{E}^{u'}$ é o subespaço instável da decomposição hiperbólica ao longo da órbita de x , e $k = [\pi(x)/m]$. Pela força uniforme nas órbitas periódicas de período suficientemente grande, item 1 do Teorema 4.13, o lado direito da igualdade acima é dominado por $K\lambda^k$. Portanto, fazendo $\pi(x) \rightarrow +\infty$ (o que pode ser feito porque z não é periódico) obtemos $\gamma_0 \in (0, 1)$ tal que $(z, X_{mk}(z))$ é uma γ_0 -corda.

Dado agora $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < 1$, fazendo k suficientemente grande, pelo exercício 5.11 obtemos números $n_i \rightarrow +\infty$ de modo que $(z, X_{mn_i}(z))$ são γ_1 -cordas uniformes. Por compacidade obtemos pontos $\{X_{mn_i}(z), X_{mn_j}(z)\}$, tão próximos quanto se queira, formando uma γ_1 -corda uniforme.

²Lembre que estamos supondo que E contrai e F expande não-uniformemente.

Aplicando o lema 5.12, obtemos uma órbita periódica p de X cuja órbita sombreia a órbita de z entre os pontos $X_{mn_i}(z)$ e $X_{mn_j}(z)$.

Como $\overline{O(z)}$ admite uma decomposição dominada de índice r podemos estendê-la a uma vizinhança U de $\overline{O(z)}$. Podemos também supor que a órbita periódica criada pelo lema 5.12 está em U , logo temos uma decomposição $E^{s'} \oplus E^{u'}$ do subfibrado normal N ao longo da órbita de p , dominada para Fluxo Linear de Poincaré. Como $(X_{mn_i}(z), X_{mn_j}(z))$ é uma γ_1 -corda uniforme, por continuidade, a órbita de p expande na direção $E^{u'}$ com taxa γ_2 . Isso implica que $E^{u'}$ está contido no subespaço instável da decomposição hiperbólica ao longo de $O(p)$, e portanto o índice de p não supera r . Isto termina a prova do Lema. \square

Pelo lema 5.13, se $E^{s'}$ contrai temos que

$$\bigcup_{i=0}^{l-1} \overline{\text{Per}_i(X)} \cap \overline{\text{Per}_l(X)} \supset \bigcup_{i=0}^r \overline{\text{Per}_i(X)} \cap \overline{O_X(z)} \neq \emptyset,$$

portanto X não seria separado. No entanto, se $E^{s'}$ não contrai, aplicamos o lema 5.6 e o argumento de redução de índice (do teorema 5.8) e obtemos um ponto $y \in O(z)$ que admite uma decomposição dominada $E^{s''} \oplus E^{u''}$, de índice menor do que r . Se $E^{s''}$ contrai o lema 5.13 novamente vai garantir que X não é separado. Daí, podemos repetir este processo um número finito de vezes e concluir que um pedaço de $O(z)$ é acumulado por fontes de campos próximos, o que é um absurdo pelo exercício 5.10. Isto acaba a prova do teorema 5.4.

O leitor atento pode notar que em princípio, poderíamos trocar as órbitas periódicas de X na prova do teorema acima por órbitas periódicas de campos próximos. Na verdade, podemos obter resultados análogos, via o argumento de redução de índice, para limites fundamentais. O seguinte exercício, que usa as técnicas apresentadas anteriormente, para o leitor.

Exercício 5.14. *Seja X um campo estrela e Λ é um conjunto compacto invariante sem singularidades que admite uma decomposição dominada $E \oplus F$ para o fluxo linear de Poincaré tal que $\dim(E) \equiv p$ com $1 \leq p \leq d-2$. Se E não contrai então existe um r -limite fundamental em Λ tal que $r < p$.*

Aplicação

Para ilustrar as técnicas desenvolvidas até então, vamos obter uma decomposição dominada com algumas propriedades hiperbólicas para um tipo especial de dinâmica.

Novamente, vamos supor que p e q são pontos periódicos de índices i e j respectivamente, com $1 \leq i < j \leq d - 2$. E vamos considerar o conjunto $\Lambda := O(p) \cup O(x) \cup O(q) \cup O(y)$, onde $O(q) = \omega(x) = \alpha(y)$ e $O(p) = \omega(y) = \alpha(x)$.

Teorema 5.15. *O conjunto Λ possui uma decomposição dominada³ para o fluxo linear de Poincaré da forma $E \oplus C \oplus F$, tal que E é contrator e F é expansor. Mais ainda $\dim E = i$ e $\dim F = d - j - 1$.*

A prova deste teorema segue os seguintes argumentos.

Primeiramente, pela proposição 3.28 temos que Λ é subconjunto de $\text{Per}_i^*(X)$ e $\text{Per}_j^*(X)$. Assim, pelo corolário 4.15 temos que o fluxo linear de Poincaré tem duas decomposições dominadas sobre Λ : $E \oplus C_1$ e $C_2 \oplus F$. Além disso, $\dim E = i$ e $\dim F = d - j - 1$. Definimos então $C = C_1 \cap C_2$.

Falta obter a hiperbolicidade dos fibrados E e F . Para isto, observe que qualquer medida invariante suportada em Λ é suportada ou em $O(p)$ ou em $O(q)$. Isto segue simplesmente da definição do conjunto e do teorema de recorrência de Poincaré.

É suficiente resolver o seguinte exercício usando as técnicas apresentadas anteriormente.

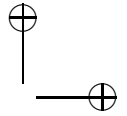
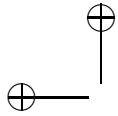
Exercício 5.16. *Seja Γ um subconjunto compacto e invariante para um difeomorfismo f . Se $E \subset T_\Lambda M$ é um subfibrado contínuo e Df -invariante. Se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer medida f^m -invariante e ergódica μ suportada em Γ tivermos que:*

$$\int \log \|Df^m|_E\| d\mu < 0.$$

Então o fibrado E é contrator.

O exercício e a observação anterior termina a prova do teorema, uma vez que como $O(p)$ é uma órbita periódica de índice i e o fibrado E está contido no subespaço estável de $O(p)$, a hipótese do exercício é satisfeita. A expansão de F é obtida de maneira análoga.

³Ou seja $E \oplus C$ e $C \oplus F$ satisfazem a desigualdade da definição de dominação.



Capítulo 6

Hiperbolicidade I

Neste capítulo iremos apresentar a prova da conjectura da estabilidade devido a Hayashi, como em [32]. Comentaremos também sobre a prova de que o interior dos campos Kupka-Smale são compostos por campos Axioma A sem ciclos, seguindo os artigos [29] e [72] e usando a teoria já desenvolvida ao longo deste livro.

6.1 O Caso Ω -estável: Densidade

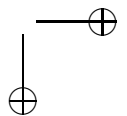
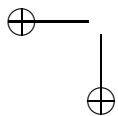
Nesta seção, fixamos X um campo Ω -estável. Já vimos no teorema 1.15 que isto implica que o campo X é estrela. Mais ainda, sabemos pelo teorema 2.9 que toda singularidade é isolada do conjunto não-errante, em particular $\text{Sing}(X) \cap \overline{\text{Per}(X)} = \emptyset$.

Seja então \mathcal{V} uma vizinhança de X onde todo $Y \in \mathcal{V}$ é Ω -conjugado a X e todas suas órbitas periódicas são hiperbólicas.

Teorema 6.1. *Existe um aberto e denso $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$ então Y é Axioma A sem ciclos.*

A densidade seguirá da existência de um residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ tal que todo $Y \in \mathcal{R}$ é Axioma A. Já a abertura segue do teorema 2.4 que diz que todo $Y \in \mathcal{R}$ é Axioma A sem ciclos.

A prova será feita por indução. Já sabemos pelo teorema de Pliss 2.1 que $\text{Per}_0(X)$ é formado por finitos elementos críticos e portanto $\text{Per}_0(X) = \overline{\text{Per}_0(X)}$ é hiperbólico.



Suponha que a vizinhança \mathcal{V} de X satisfaz a hipótese (H_j) , como na seção 3.3 do capítulo 3, provaremos que existe um residual $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{V}$ tal que se $Y \in \mathcal{R}_j$ então $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$ é um conjunto hiperbólico.

Lema 6.2. *Existe um residual $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{V}$ tal que se $Y \in \mathcal{R}_j$ então $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)} \cap \bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)} = \emptyset$.*

Demonstração. Seja \mathcal{R}_j o residual dado pelo Lema 3.10 e tome $Y \in \mathcal{R}_j$. Se, por contradição, $\text{Per}_{j+1}(Y)$ acumula em $\bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)}$, daí existe uma componente $\Lambda_l(Y)$ da decomposição espectral de $\bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)}$ na qual $\text{Per}_{j+1}(Y)$ acumula. Seja U_l uma vizinhança compacta suficientemente pequena de $\Lambda_l(Y)$ tal que $U_l \cap (D_l^s \cup D_l^u) = \emptyset$. Onde

$$D^s = \overline{W_\varepsilon^s(\Lambda_l(Y)) - X_1(W_\varepsilon^s(\Lambda_l(Y)))} \text{ e } D^u = \overline{W_\varepsilon^u(\Lambda_l(Y)) - X_{-1}(W_\varepsilon^u(\Lambda_l(Y)))}.$$

Assim temos órbitas periódicas de índice $j + 1$ acumulando em $\Lambda_l(Y)$, usando o *connecting lemma*, encontramos um campo Z arbitrariamente próximo de Y que coincide com Y em uma vizinhança de $\Lambda_l(Y)$ e possui um ponto homoclínico q associado a $\Lambda_l(Y)$. O ponto q pode ser tomado arbitrariamente próximo de D_l^u , assim podemos supor que $q \notin U_l$. Perturbando Z um pouco, se necessário, podemos supor que q é ponto homoclínico transversal e $Z \in \mathcal{R}_j$.

Como q é ponto homoclínico associado a $\Lambda_l(Y)$ sabemos que existem p_1 e $p_2 \in \Lambda_l(Y)$ tais que $q \in W^{ss}(p_1) \cap W^{uu}(p_2)$. Usando a transitividade da peça e o *shadowing lemma* encontramos $p \in \Lambda_l(Y) \cap \text{Per}(Z)$ tal que a órbita de p passa arbitrariamente próximo de p_1 e de p_2 . Pelo teorema da variedade estável, temos que partes compactas das variedades invariantes variam continuamente. Daí, encontramos q' próximo de q (e portanto fora de U_l) tal que q' é um ponto homoclínico associado ao ponto p .

Sendo q' um ponto homoclínico associado a p temos que q' está em algum $\Lambda_{l'}(Z)$ que também contém p , logo $\Lambda_l(Y) \subset \Lambda_{l'}(Z)$. Mas $Z \in \mathcal{R}_j$ implica que $\Lambda_{l'}(Z)$ é uma continuação de $\Lambda_l(Y)$ contida em U_l . Contradição pois $q' \notin U_l$. Isto demonstra o lema. \square

Seja agora $Y \in \mathcal{R}_j$. O Teorema 2.9 diz que $\text{Sing}(Y) \cap \overline{\text{Per}(Y)} = \emptyset$. Pelo teorema 4.14 concluímos que existe uma decomposição dominada $E \oplus F$ do fibrado normal para o fluxo linear de Poincaré P_Y^t restrito a $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$. Desejamos mostrar que tal decomposição é hiperbólica.

Pelo argumento de redução de índice temos que E é contrator. De fato, como feito na seção 5.3, se supusermos que E não contrai então, seguindo os passos feitos naquela seção, encontraremos um ponto $z \in \overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$ tal que, pelo Lema 5.13,

$$\overline{O_Y(z)} \cap \bigcup_{i=0}^j \overline{\text{Per}_i(Y)} \neq \emptyset.$$

Com efeito, se E não contrai, pelo teorema 5.8, a órbita de um ponto $z \in \overline{\text{Per}_{j+1}(X)}$ é sombreada por órbitas periódicas com índice menor que $j + 1$ de campos próximos. Argumentos do tipo *shadowing* usados na prova do lema 5.13 mostram que a interseção citada acima é não vazia.

Mas isto contradiz o Lema 6.2 pois $\overline{O_Y(z)} \subset \overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$ provando assim que E é contrator.

Para garantir a hiperbolicidade falta provar que F é expansor, para isso usaremos argumentos semelhantes usados por Mañé em [45]. Isto é, se nós supuséssemos que F não expande temos então garantida a existência de uma órbita periódica de Y cuja taxa de expansão é muito fraca. Isto irá contradizer o item 1 to Teorema 4.13.

Definição 6.3. Dizemos que uma vizinhança compacta U de Λ é uma vizinhança admissível se $T_{\cap Y_t(U)}M$ possui uma e exatamente uma decomposição dominada $T_{\cap Y_t(U)}M = \hat{E} \oplus \hat{F}$ estendendo a decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$.

O seguinte exercício garante a existência de vizinhanças admissíveis.

Exercício 6.4. Mostre que se $T_\Lambda M$ possui uma decomposição dominada com índice constante, então possui uma vizinhança admissível U .

No teorema a seguir, dados $\varepsilon > 0$, $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, $p \in M$ e seqüências $T_n > 0$ e $t_n > 0$ tais que $t_n = t_{n-1} + T_{n-1}$ e $|T_n - 1| \leq \varepsilon$ vamos denotar $\eta_n := P_Y^{T_n}(Y_{t_n}(p))$.

Teorema 6.5. Seja $E \oplus F$ a decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré P_Y^t considerada acima. Em particular E contrai. Então, ou F expande ou, para toda vizinhança admissível V de $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$, $0 < \bar{\lambda} < 1$ e $\varepsilon > 0$, existe um ponto periódico $p \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(V)$ com período arbitrariamente grande π e satisfazendo

$$\bar{\lambda}^{[\pi/m]} \leq \prod_{l=0}^{[\pi/m]-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \eta_{ml+i} \right)^{-1} (Y_{t_l}(p)) \Big|_{\hat{F}} \right\| < 1$$

para alguma sequência $t_l > 0$, $0 \leq l \leq [\pi/m] - 1$, com $t_{[\pi/m]-1} = \pi$.

Este lema é bem técnico e iremos apenas dar uma idéia de sua demonstração na próxima subseção.

Observação 6.6. *Se quisermos enunciar o teorema 6.5 em toda sua generalidade temos que pedir que $\Omega(X|_\Lambda) = \Lambda$, mas no nosso caso isto é garantido pois Λ é uma peça básica. Também é necessária uma expansão não uniforme na direção F , do tipo,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{j=0}^{n-1} \log m(P_X^{\tilde{T}}(X_{j\tilde{T}}(b))|_F) \geq \tilde{\eta}.$$

Mas esta hipótese não aparece aqui pois ela é obtida através do teorema 4.13 (ou 4.16).

Vamos supor por absurdo que F não expande. Pelo teorema 6.5 encontramos um ponto periódico $p \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(V)$ que é hiperbólico, pois Y é estrela, e satisfaz a conclusão do lema. Seja $T_{O(p)}M = E^s \oplus E^u$ a decomposição hiperbólica da órbita periódica de p . Como, pelo teorema 6.5, o produto é menor que 1 temos que $\hat{F}(p) \subset E^u(p)$. Disto segue que

$$\prod_{l=0}^{[\pi/m]-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \eta_{ml+i} \right)^{-1} (Y_{t_l}(p)) \Big|_{\hat{F}} \right\| \leq \prod_{l=0}^{[\pi/m]-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \eta_{ml+i} \right)^{-1} (Y_{t_l}(p)) \Big|_{E^u} \right\|$$

Fixe λ dado no teorema 4.13. Tome, no teorema 6.5, $\lambda < \bar{\lambda} < 1$ e $c > 1$ tal que $\lambda c < \bar{\lambda}$.

Usando o ítem 1 do teorema 4.13, continuidade e tomando ε do teorema 6.5 suficientemente pequeno e π suficientemente grande temos que

$$\bar{\lambda}^{[\pi/m]} \leq \prod_{l=0}^{[\pi/m]-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \eta_{ml+i} \right)^{-1} (Y_{t_l}(p)) \Big|_{\hat{F}} \right\| \leq K(c\lambda)^{[\pi/m]}.$$

De fato, os fatores na estimativa do teorema 4.13 são

$$\|P_Y^{-m}(Y_{m(j+1)}(p))|_F\|.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno, temos que T_n estão muito próximos de 1. Assim, a menos da constante c , estes fatores estão muito próximos de

$$\left\| \prod_{i=0}^{m-1} \left(\eta_{ml+i} \right)^{-1} (Y_{t_l}(p)) \Big|_{\hat{F}} \right\|.$$

E isto gera o fator $(c\lambda)^{\lfloor \pi/m \rfloor}$.

Porém, esta desigualdade contradiz o fato que $\lambda c < \bar{\lambda}$. A contradição mostra que F expande.

Provamos então que o fluxo linear de Poincaré P_Y^t restrito a $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$ é hiperbólico para todo $Y \in \mathcal{R}_j$. Pela Proposição 4.6, $\overline{\text{Per}_{j+1}(Y)}$ é um conjunto hiperbólico para Y , concluindo a indução. O teorema está demonstrado.

Sobre o teorema 6.5

Para facilitar a notação, vamos reenunciar o lema no caso de difeomorfismos, a versão para fluxos é muito similar. De fato, vamos enunciar algo mais geral, que é o teorema II.1 de [45].

Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo então $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada para f sobre o conjunto compacto e invariante Λ se existem $C > 0$ e $\lambda < 1$ tal que para todo $x \in \Lambda$ e $n \geq 0$ temos que

$$\|Df^n(x)|_E\| \|Df^{-n}(f^n(x))|_F\| < C\lambda^n.$$

A noção de vizinhança admissível citada antes é similar.

Teorema 6.7 (Teorema II.1 de [45]). *Seja $E \oplus F$ uma decomposição dominada para f sobre Λ um compacto invariante tal que $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$ e tal que $\dim E$ é constante. Vamos supor que E contrai e que F tem uma certa expansão não uniforme, isto é existe $c > 0$ tal que*

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \|(Df^{-1})(f^j(x))|_F\| \leq -c.$$

Então, ou F é expansor ou, para toda vizinhança admissível V de Λ , $0 < \gamma < 1$ e $\varepsilon > 0$, existe um ponto periódico p no invariante maximal de V , com período arbitrariamente grande N e satisfazendo

$$\gamma^N \leq \prod_{j=1}^N \|(Df^{-1})(f^j(p))|_{\hat{F}}\| < 1$$

Onde \hat{F} é dado pela extensão de F , gerada pela decomposição dominada $E \oplus F$ e a definição de vizinhança admissível.

Lembramos que uma corda $(x, f^n(x))$ é dada pelo conjunto $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$. Uma γ -corda é uma corda $(x, f^n(x))$ tal que

$$\prod_{j=1}^n \|(Df^{-1})(f^j(x))|_F\| \leq \gamma^n.$$

E uma γ -corda uniforme é uma corda tal que para todo $0 \leq k < n$ temos que $(f^k(x), f^n(x))$ é uma γ -corda.

Lembre que por hipótese o fibrado E contrai. Se F expande, então pela teoria hiperbólica teríamos o *shadowing lemma*. Acontece que, de maneira semelhante a observação por Pliss no caso de poços, uma γ -corda uniforme (junto com a contração de E e a dominação) tem “estrutura hiperbólica” o suficiente para que ocorra *shadowing*.

Lema 6.8 ([40]). *Dado $0 < \hat{\gamma} < 1$ e $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade. Se $\{(x_i, f^{n_i}(x_i))\}_{i=1}^k$ são $\hat{\gamma}$ -cordas uniformes que formam uma ε -pseudo-órbita periódica, isto é, para todo $1 \leq i < k$ temos*

$$d(f^{n_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ e } d(f^{n_k}(x_k), x_1) < \varepsilon.$$

Então existe uma “sombra” periódica p de f , com período $N = n_1 + \dots + n_k$. Isto é:

$$d(f^n(p), f^n(x_1)) \leq \delta \text{ para todo } 0 \leq n \leq n_1,$$

e definindo $N_i = n_1 + \dots + n_i$ temos

$$d(f^{N_i+n}(p), f^n(x_{i+1})) \leq \delta \text{ para todo } 0 \leq n \leq n_{i+1}.$$

Este lema obviamente irá gerar a órbita periódica desejada, desde que encontremos as tais cordas. Mais ainda, como a órbita periódica estará próximo de pontos de Λ então ela estará no invariante maximal. Basta usar $\delta > 0$ pequeno o suficiente.

O problema então é encontrar tais cordas. Primeiro, a hipótese de expansão não-uniforme dirá que ao tomar $e^{-c} < \gamma_0 < 1$ temos um subconjunto denso $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tal que para todo ponto $x \in \Lambda_0$ existem infinitos n 's tais que

$$\prod_{j=1}^n \|Df^{-1}(f^j(x))|_F\| < \gamma_0^n.$$

Por outro lado, podemos caracterizar a expansão em F da seguinte forma. Dizemos que um $\Gamma \subset \Lambda$ é um (l, γ) -conjunto se todo ponto $x \in \Gamma$ possui um

inteiro $-l < m < l$ tal que $(f^{m-n}(x), f^m(x))$ é uma γ -corda para todo $n > 0$. Então por definição, se Γ é um (l, γ) -conjunto temos que $F|_\Gamma$ é expansor.

Por outro lado, vamos dizer que uma corda $(x, f^n(x))$ é uma (N, γ) -obstrução se $(x, f^m(x))$ não é uma γ -corda para todo $N \leq m \leq n$. Para qualquer $x \in \Lambda$, definimos o conjunto $J(x)$ dado por todos os pontos da forma $\lim f^{m_n}(x_n)$, onde $m_n \rightarrow \infty$ e $x_n \rightarrow x$. A hipótese sobre o conjunto não-errante de $f|_\Lambda$ garante que $x \in J(x)$. Essencialmente, isto dará a recorrência das cordas, necessária para aplicar o lema 6.8. Agora fixamos umas constantes, $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < 1$.

A seguir iremos resumir o processo com o qual Mañé consegue obter as cordas requeridas, por motivos de apresentação mudamos um pouco o enunciado dos resultados em [45], mas referimos o leitor ao artigo original para enunciados mais precisos. O próximo lema garante uma dicotomia entre haver expansão ou não.

Lema 6.9 (Confira o lema II.6 de [45]). *Dado $\varepsilon > 0$ existem $N, M > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$: ou $J(x)$ é um (N, γ_3) -conjunto (e portanto temos expansão), ou existe $y \in J(x) \cap B(x, \varepsilon)$ tal que para todo $n > N$ a corda $(y, f^n(y))$ é uma (M, γ_2) -obstrução. Além disso, existe z , tão próximo de x quanto se queira, e $m > 0$ tal que $f^m(z) \in B(y, \varepsilon)$ e $(z, f^m(z))$ é uma γ_3 -corda uniforme.*

Com a ajuda deste lema, obtemos diversas cordas, se supuséssemos que F não contrai.

Lema 6.10 (Confira lema II.7 de [45]). *Se F não expande então para todo $\varepsilon > 0$, fixando as constantes N e M dadas pelo lema anterior, existe um subconjunto $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tal que todo $x \in \Lambda_0$ possui um ponto x_0 , arbitrariamente próximo, $n_0 \geq 0$ e $y \in \Lambda_0$ tal que $f^{n_0}(x_0) \in B(y, \varepsilon)$ e $(y, f^{n_0}(y))$ é uma (M, γ_2) -obstrução para todo $n > N$.*

Além disso, se $n_0 > 0$ então $(x_0, f^{n_0}(x_0))$ é uma γ_3 -corda uniforme.

Em suma, para provar o lema, tome Σ como a união de todos os (N, γ_3) -conjuntos, como F não expande então o conjunto procurado é $\Lambda - \Sigma \neq \emptyset$. Note que a condição $f^{n_0}(x_0) \in B(y, \varepsilon)$ serve para criar pseudo-órbitas. Vamos escolher constantes γ e k_0 tais que

$$\gamma < \gamma_0, \quad 0 < k_0 < 1, \quad \gamma < k_0^2 \gamma_1 \text{ e } k_0^{-1} \gamma_3 < 1.$$

Assim, usando este lema diversas vezes, num processo de indução, tomando ε dado pelo lema 6.8, Mañé constrói uma sequência de pontos x_i e

uma sequência $n_i \geq 0$ com as seguintes propriedades. (I) *Elas formam uma pseudo-órbita*: $d(f^{n_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon/2$. (II) *Geram cordas com hiperbolicidade controlada*: se $n_i > 0$ então $(x_i, f^{n_i}(x_i))$ é uma γ_3 -corda uniforme, porém se i é par e $n_i > 0$ temos que $(x_i, f^{n_i}(x_i))$ não é uma γ_1 -corda. (III) *Estimativa*: se $K = \min \|Df^{-1}|_F\|$ então para todo i ,

$$\gamma_1^{n_i} K^{n_i-1} \geq (k_0 \gamma_1)^{n_i+n_{i-1}}.$$

Estas cordas formam uma pseudo-órbita. Seja $\delta > 0$ tal que se $d(a, b) < \delta$ então

$$\|Df^{-1}(a)|_F\| \geq k_0 \|Df^{-1}(b)|_F\|.$$

Então o lema 6.8 gera uma órbita periódica p com período $N = n_1 + \dots + n_k$ que δ -sombreia a pseudo-órbita. Assim, definindo $N_i = n_1 + \dots + n_i$, para todo $1 \leq i < k$, pela regra da cadeia, temos que

$$\prod_{n=1}^{n_{i+1}} \|Df^{-1}(f^{N_i+n}(x))|_F\| \geq k_0^{n_{i+1}} \prod_{n=1}^{n_{i+1}} \|Df^{-1}(f^n(x_{i+1}))|_F\|.$$

Agora, pelas propriedades das cordas, para i ímpar temos

$$\prod_{n=1}^{n_{i+1}} \|Df^{-1}(f^{N_i+n}(x))|_F\| \geq k_0^{n_{i+1}} \gamma_1^{n_{i+1}}.$$

E para i par temos

$$\prod_{n=1}^{n_{i+1}} \|Df^{-1}(f^{N_i+n}(x))|_F\| \geq k_0^{n_{i+1}} K^{n_{i+1}}.$$

Assim, novamente pela regra da cadeia,

$$\prod_{n=1}^N \|Df^{-1}(f^n(x))|_F\| \geq \prod_{j=1, \text{ ímpar}}^{k-1} k_0^{n_j+n_{j+1}} \gamma_1^{n_{j+1}} K^{n_j}.$$

Agora pela, estimativa (III), temos que

$$\prod_{j=1, \text{ ímpar}}^{k-1} k_0^{n_j+n_{j+1}} \gamma_1^{n_{j+1}} K^{n_j} \geq k_0^{2N} \gamma_1^N.$$

Mas forçamos que $k_0^2 \gamma_1 > \gamma$. E isto mostra que

$$\prod_{n=1}^N \|Df^{-1}(f^n(x))|_F\| > \gamma^N.$$

De maneira análoga, levando em conta que as cordas são γ_3 -cordas temos que

$$\prod_{n=1}^N \|Df^{-1}(f^n(x))|_F\| \leq k_0^{-N} \gamma_3^N.$$

E como forçamos que $k_0^{-1} \gamma_3 < 1$, temos que

$$\prod_{n=1}^N \|Df^{-1}(f^n(x))|_F\| < 1.$$

6.2 O Caso Ω -estável: Geral

Nesta seção concluímos a prova da conjectura da Ω -estabilidade. Como veremos, uma das principais dificuldades é mostrar uma espécie de homogeneidade de índices em candidatos a serem conjuntos básicos para um campo Ω -estável não genérico.

Apresentaremos três modos de lidar com este problema. O primeiro deles é o argumento original devido a Palis [56], em sua prova para a conjectura da Ω -estabilidade no caso de difeomorfismos. O segundo é baseado no *connecting lemma*. O terceiro e último na verdade é uma observação que encontra um certo fenômeno caso existam dois pontos com índices diferentes, porém conectados de certa forma. Este último fenômeno será estudado depois.

O Argumento de Palis

Usaremos os abertos \mathcal{V} e \mathcal{U} definidos na seção anterior. Sabemos que todo $Y \in \mathcal{U}$ é Axioma A, basta provar agora que todo $Y \in \mathcal{V}$ é Axioma A também.

Note que já sabemos que para todo $Y \in \mathcal{V}$ temos que $\text{Sing}(Y) \cap \overline{\text{Per}(Y)} = \emptyset$. Além disso, para todo $Z \in \mathcal{U}$ existe uma Ω -conjugação com Y , disto

segue que Y herda a decomposição espectral de Z e portanto temos que

$$\Omega(Y) = \text{Sing}(Y) \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k,$$

onde a união é disjunta, cada Λ_i é um conjunto compacto invariante, transitivo, isolado e tem órbitas periódicas densas. De fato, se $h : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(Z)$ é a Ω -conjugação então cada $h(\Lambda_i) = \Lambda_i^Z$ é uma peça básica da decomposição espectral de Z , uma vez que Z é Axioma A.

Seguindo Palis, mostra-se a propriedade de separação para Y .

Teorema 6.11. *Para cada Λ_j existe $0 \leq i \leq d - 1$ tal que toda órbita periódica em Λ_j tem índice i .*

Demonstração. Suponha que existem duas órbitas periódicas de índices diferentes $O(p)$ e $O(q)$ em um mesmo Λ_j . Como Λ_j é a imagem pela conjugação de uma peça básica temos que as variedades invariantes destas órbitas se intersectam mutuamente.

Seguindo [56], por argumentos usados na prova do teorema de Kupka-Smale, podemos perturbar um pouco o campo Y de modo a encontrar $Y' \in \mathcal{V}$ tal que as continuações $O(p')$ e $O(q')$ de $O(p)$ e $O(q)$, respectivamente, são as únicas órbitas periódicas de diferentes índices tais que suas variedades invariantes se intersectam mutuamente.

Tendo $O(p')$ e $O(q')$ índices diferentes, assumimos que uma das interseções, digamos $W^s(O(p')) \cap W^u(O(q'))$, é transversal. O λ -lema mostra que qualquer ponto em $W^u(O(p')) \cap W^s(O(q'))$ pertence a $\Omega(Y')$. Seja $x \in W^u(O(p')) \cap W^s(O(q'))$, pela invariância do não-errante temos que $O(x) \subset \Omega(Y')$.

Temos que Y' também é Ω -conjugado a Z , então $\Omega(Y') = \text{Sing}(Y') \cup \Lambda'_1 \cup \dots \cup \Lambda'_k$, dados pela conjugação. Note que apesar de termos tomado órbitas periódicas de Y em Λ_j , nada nos garante *a priori* que suas continuações pertencem a um mesmo Λ'_j . Lembrando que x é um ponto não-errante, ele pertence a alguma peça básica.

Sejam então $U_{p'}$ e $U_{q'}$ vizinhanças isolantes das peças que contém $O(p')$ e $O(q')$ respectivamente, como $x \in W^u(O(p'))$ existe $t_1 > 0$ tal que $Y'_{-t_1}(x) \in U_{p'}$ e, da mesma forma, como $x \in W^s(O(q'))$ existe $t_2 > 0$ tal que $Y'_{t_2}(x) \in U_{q'}$. Usando isto e a invariância das peças básicas temos que $O(p')$ e $O(q')$ pertencem a um mesmo Λ'_j . Mais ainda, uma vez que Λ'_j contém duas órbitas temos que Λ'_j contém infinitas órbitas periódicas densas.

Segue da Ω -conjugação que qualquer outra órbita periódica $O(y)$ em Λ'_j tem suas variedades invariantes se intersectando com as de $O(p')$ e com as

de $O(q')$ mutuamente, mas o índice de $O(y)$ é diferente de pelo menos uma das órbitas o que contradiz a unicidade, provando o teorema. \square

A partir daí a prova segue as mesmas linhas do caso separado. Lembrando, como pontos periódicos com índice i são densos em Λ_j então temos uma decomposição dominada $E \oplus F$ para o Fluxo Linear de Poincaré. E se Λ_j não fosse hiperbólico então teríamos que E não é contrator.

Mas então teríamos um ponto recorrente $x \in \Lambda_j$ onde a contração de E degenera e portanto existiria $l < i$ tal que

$$\overline{O(x)} \cap \overline{\text{Per}_l(Y)} \neq \emptyset.$$

Portanto existiria $m \neq j$ tal que $\Lambda_m \cap \Lambda_j \neq \emptyset$. Absurdo. Um argumento análogo mostra que F expande. E isto, junto com a proposição 4.6 mostra que Λ_j é hiperbólico. Ou seja que Y é Axioma A.

Usando o *Connecting Lemma*

No capítulo 2, usamos o *connecting lemma* para mostrar que a Ω -estabilidade impede a presença de singularidades acumuladas por órbitas regulares. Na verdade, o que mostramos é que via o *connecting lemma*, isto implicava numa interseção não transversal entre a variedade estável e instável da singularidade. Com isto conseguimos uma contradição após usar o teorema de Kupka-Smale. Vamos tentar resgatar esta idéia novamente.

Seja Λ um conjunto isolado, transitivo e hiperbólico e x uma tangência homoclínica de Λ . Isto é, $x \in (W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)) - \Lambda$. Por argumentos do tipo Kupka-Smale, podemos perturbar o campo fora de uma vizinhança de $\Lambda \cup \{x\}$ de tal forma que x é uma tangência associada a órbitas periódicas.

Ou seja, podemos supor que existem órbitas periódicas $O(p)$ e $O(q)$ em Λ tal que

$$x \in (W^s(O(p)) \cap W^u(O(q))) - \Lambda.$$

Podemos perturbar novamente, longe de $\Lambda \cup \{x\}$ de tal forma que

$$\dim(W^s(O(p)) \cap W^u(O(q))) - \Lambda \geq 2.$$

Note que por hiperbolicidade, estas interseções são não-errantes. Por transitividade os pontos periódicos são imagens pela conjugação, de pontos na mesma peça básica. O que é um absurdo, pois as interseções da peça do Axioma A possuem no máximo uma órbita (da direção do campo).

Vamos tentar usar indução novamente, vamos supor então que $A = \bigcup_{j=0}^j \overline{\text{Per}_j(X)}$ é hiperbólico e $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_l$ é a decomposição espectral. Note que X **não** tem pontos homoclínicos associados a Γ_i fora de Γ_i . Do contrário, teria ferraduras e apareceria um ponto periódico de índice menor que $j + 1$ fora de A , absurdo.

Vamos supor que $\text{Per}_{j+1}(X)$ acumula em A . Pelo *connecting lemma*, podemos tomar uma vizinhança U de A e encontrar um campo próximo Y , tal que $Y|_U = X$ e a menos de renomear podemos supor que Γ_1 tem um ponto homoclínico x , fora de U . De qualquer maneira, note que cada Γ_i é hiperbólico, isolado e transitivo (não necessariamente é a decomposição espectral para $Y!$).

Por hiperbolicidade, podemos supor que existem órbitas $O(p)$ e $O(q)$ em Γ_1 tais que

$$x \in (W^s(O(p)) \cap W^u(O(q))) - \Gamma_1.$$

Como não há tangências, **a interseção é transversal**.

Assim, existe uma curva X^t tal que $X^0 = X$ e $X^1 = Y$. Mais ainda, que $X^t|_U = X$. Por conexidade, existe um campo X^{t_0} tal que Γ_1 tem uma tangência homoclínica. Absurdo com a observação anterior.

A partir daí, podemos refazer os argumentos da seção anterior e mostrar que $\overline{\text{Per}_{j+1}(X)}$ é hiperbólico. Completando a indução e mostrando que X é Axioma A.

Índices Diferentes

Como podemos observar, precisamos mostrar que os índices de órbitas periódicas da imagem de uma única peça são todos iguais. Quando isto não ocorre, pelo *connecting lemma*, um fenômeno interessante aparece.

Ou seja, como observamos antes, se $O(p)$ e $O(q)$ são tais órbitas, a Ω -conjugação diz que as variedades estáveis e instáveis destas se intersectam mutuamente, isto é:

$$W^s(O(p)) \cap W^u(O(q)) \neq \emptyset \neq W^u(O(p)) \cap W^s(O(q)).$$

A menos de uma perturbação, uma destas interseções é transversal.

Isto é conhecido como um ciclo heterodimensional e é uma das obstruções para a hiperbolicidade. Nos próximos capítulos iremos lidar com o problema da não-existência deste fenômeno para fluxos estrela. E isto daría uma terceira prova do teorema 6.11.

6.3 O Caso Kupka-Smale

Nesta seção descrevemos o seguinte teorema encontrado em [29] (veja também [72]), que apareceu após o teorema de Hayashi. De fato, ele usa um argumento mais direto que o de Hayashi (ou seja, não separa a prova em um primeiro argumento pra obter densidade de Axiomas A), porém a hipótese é mais forte. O leitor atento, pode verificar que o teorema que iremos exibir tem como corolário o fato de que fluxos estruturalmente estáveis são Axioma A, uma vez que todo fluxo estruturalmente estável é Kupka-Smale (veja [64]), mesmo assim isto segue do teorema de Hayashi.

Só vamos descrever brevemente o argumento pois, nos próximos capítulos, iremos mostrar um teorema muito mais forte.

Teorema 6.12. *Seja X um campo tal que existe uma vizinhança \mathcal{U} de X onde todo $Y \in \mathcal{U}$ é Kupka-Smale. Então X é Axioma A.*

Primeiramente, notamos que tal campo não pode ter singularidades aproximadas por órbitas não-errantes. De fato, isto segue do mesmo argumento no teorema 2.9 onde mostrou-se que a presença de tal singularidade cria, via o *connecting lemma* uma interseção entre a variedade instável e estável de uma singularidade. Mas esta interseção nunca é transversal e isto é proibido pela condição Kupka-Smale.

Note que por definição de campo Kupka-Smale, o aberto \mathcal{U} é formado por fluxos estrela. Assim, usando a indução feita na primeira seção deste capítulo podemos mostrar que existe um residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ formado por Axioma A. Porém, é possível argumentar mais diretamente.

Até o fim desta seção iremos supor que X satisfaz a hipótese do teorema 6.12.

O argumento se baseia em demonstrar o seguinte lema, usando técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

Lema 6.13. *Para qualquer ponto $x \in \Sigma(X)$, onde $\Sigma(X)$ é o conjunto de probabilidade total dado pelo ergodic closing lemma, temos que $\overline{O(x)}$ é um conjunto hiperbólico.*

Sketch da prova. Como estamos usando o *ergodic closing lemma*, temos que $\overline{O(x)}$ é um limite fundamental. Mais ainda, podemos supor que as órbitas periódicas que o aproximam não são poços nem fontes. Do contrário, poderíamos construir medidas orbitais geradas pelas fontes (por exem-

plo) e usando a uniformidade da expansão dada no teorema 4.13, mostrar que o suporte da medida orbital possui uma fonte, via o exercício 5.16.

Assim, novamente pelo corolário 4.15, obtemos uma decomposição dominada sobre $\overline{O(x)}$ da forma $E \oplus F$, onde ambos os fibrados não são triviais e $\dim E = l$, onde l pode ser tomado o índice das órbitas periódicas que aproximam $\overline{O(x)}$.

Como na prova do teorema de Hayashi, usando as técnicas de Mañé, pode-se mostrar que se o fibrado E contrai então o fibrado F expande. Note que, desta vez, como não estamos usando indução, o teorema é simétrico por reversão no tempo e portanto temos que se F expande então E contrai. Assim, se $\overline{O(x)}$ não for hiperbólico, podemos supor que nem E contrai e nem F expande.

Tomando m dado pelo teorema 4.13 e $\phi(y) := \log \|P_X^m(y)|_E\|$, supondo que E não contrai encontramos uma medida orbital μ tal que $\int_{\overline{O(x)}} \phi d\mu \geq 0$. Novamente, usando o teorema de Birkhoff temos que:

$$\int_{\overline{O(x)} \cap \Sigma(X)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(X_{mi}(a)) d\mu \geq 0.$$

Logo, existe $z \in \Sigma(X) \cap \overline{O(x)}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(X_{mi}(z)) \geq 0 \quad (*).$$

A partir daqui afirmamos que é possível, por uma perturbação, criar um ponto periódico com índice menor que l

Em suma o argumento é o seguinte: se z é periódico, então pela propriedade estrela sabemos que ele possui uma decomposição hiperbólica dada pelos autoespaços instáveis e estáveis, mas então por dominação isto força que o índice de z seja menor que l , uma vez que do contrário isto diria que o fibrado E está contido no fibrado E^s da órbita periódica e teríamos uma contração muito fraca para z , devido a (*), contradizendo o teorema 4.13. Caso z não seja periódico, usamos o *ergodic closing lemma* como antes, para recair no caso periódico (a menos de perturbação).

Daí podemos criar um novo limite fundamental, mas desta vez com índice **menor** que l . Temos novamente uma decomposição dominada $E' \oplus F'$. Se o fibrado E' não for contrator, podemos diminuir o índice de novo,

e assim sucessivamente, até chegarmos a índice 0 e isto é proibido pelo argumento dado acima.

Assim, existe um ponto $r \in \Sigma(X) \cap \overline{O(x)}$ tal que $\overline{O(r)}$ é hiperbólico e $\text{Ind}(\overline{O(r)}) < \dim E$.

De maneira análoga, como F não expande, encontramos um ponto $s \in \Sigma(X) \cap \overline{O(x)}$ tal que $\overline{O(s)}$ é hiperbólico e $\text{Ind}(\overline{O(s)}) > \dim F$.

Por hiperbolicidade e recorrência (usando *shadowing*) existem sequências de pontos periódicos $p_n \rightarrow r$ e $q_n \rightarrow s$ tais que

$$\overline{\bigcup O(p_n)} \text{ e } \overline{\bigcup O(q_n)} \text{ são hiperbólicos.}$$

Pelo *connecting lemma* temos que

$$W^u(\overline{\bigcup O(q_n)}) \cap W^s(\overline{\bigcup O(p_n)}) \neq \emptyset.$$

Por perturbação, podemos então encontrar um campo próximo e dois pontos periódicos p e q tais que

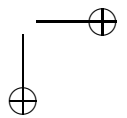
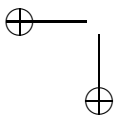
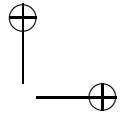
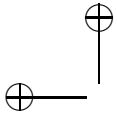
$$W^u(O(q)) \cap W^s(O(p)) \neq \emptyset.$$

Mas pela diferença de índice vemos que esta interseção não é transversal. Mas isto viola a hipótese. \square

Agora podemos usar indução novamente e supor que $A := \bigcup_{i=0}^{j-1} \overline{\text{Per}_i(X)}$ é hiperbólico. Como antes, temos que se $\overline{\text{Per}_j(X)} \cap A = \emptyset$ temos que $\overline{\text{Per}_j(X)}$ é hiperbólico. De fato, como no argumento de Hayashi, a não hiperbolicidade implicaria que existe uma órbita, digamos $O(x)$, cuja contração na direção E (da decomposição dominada gerada pelas órbitas periódicas) é muito fraca. Assim, via o *ergodic closing lemma*, encontramos um ponto periódico q próximo a x com índice menor que j . Então pelos argumentos usados no lema, teríamos que $\overline{O(x)}$ é hiperbólico com índice menor que j e isto fere a hipótese de separação;

Caso não tenhamos a hipótese de separação argumentamos da seguinte maneira. Temos uma sequência de órbitas periódicas $O(p_n)$ de índice j que gera um limite fundamental Γ , de tal forma que Γ intersecta algum Λ que é peça básica da decomposição espectral de A .

Note que Γ possui uma decomposição dominada de índice j , digamos $E \oplus F$. Tome μ uma medida orbital gerada por pelos p_n 's. Em particular, μ é suportada em Γ . Tome então $\phi(y) := \frac{1}{T} \log \|P_X^T(y)|_E\|$, onde T é grande,



dado pelo teorema 4.16. Novamente, é possível mostrar que $\int_{\Gamma} \phi d\mu < 0$. Assim, por Birkhoff, existe um ponto $z \in \Gamma \cap \Sigma(X)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(X_{i\bar{T}}(z)) < 0.$$

Temos dois casos, se z for um ponto periódico, como antes, temos que $\text{Ind}(z) \geq j$. Agora, tome U e V vizinhanças de Λ e z respectivamente.

Mas como Γ é um limite fundamental que intersecta Λ temos que existem $q \in O(p_n) \cap V$ e $t > 0$ tal que $X_t(q) \in U$.

Pelo *connecting lemma*, existe um campo Y próximo tal que

$$W^u(O(z)) \cap W^s(\Lambda) \neq \emptyset.$$

E isto contradiz a robustez da propriedade Kupka-Smale, devido a diferença dos índices.

Se z não for periódico, usando o fato que $\overline{O(z)}$ é hiperbólico (pelo que foi feito no lema), argumentamos via o *ergodic closing lemma*, para retornar ao caso periódico e obtemos a mesma contradição.

Finalmente, resta o trabalho árduo de mostrar que $\Omega(X) = \overline{\text{Per}(X)}$.

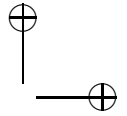
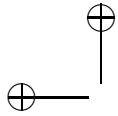
A prova se baseia nas seguintes observações. Primeiro, mostre que

$$L^+(X) := \{y; \text{ existe } x \in M \text{ com } y \in \omega(x)\} \subset \overline{\text{Per}(X)}.$$

Isto mostra de fato que $L^+(X) = \overline{\text{Per}(X)}$. A segunda observação é que a decomposição espectral de $\overline{\text{Per}(X)}$ não possui ciclos, de fato a existência de um ciclo permitiria criar uma interseção não transversal entre variedades invariantes. Finalmente, tudo é demonstrado via um resultado encontrado em [54](mais precisamente o teorema 4.1 de [54]). Lembre que já vimos que as singularidades são isoladas do conjunto não-errante.

Proposição 6.14. *Se $L^+(X) \cup \text{Sing}(X)$ é hiperbólico e não tem ciclos então $\overline{\text{Per}(X)} \cup \text{Sing}(X) = \Omega(X)$.*

Apenas comentamos que as observações citadas acima seguem a mesma linha das outras provas, isto é, redução de índice, Birkhoff, *ergodic closing lemma* e contradição com a transversalidade dada pela propriedade Kupka-Smale, após o uso do *connecting lemma*. Maiores detalhes em [72].



Capítulo 7

Conjuntos Minimalmente Não-Hiperbólicos

Neste capítulo iremos definir e considerar propriedades básicas de certos conjuntos que previnem hiperbolicidade.

Definição 7.1. Dizemos que um conjunto compacto e invariante Λ de um campo X é minimalmente não hiperbólico se ele não é hiperbólico, porém qualquer subconjunto compacto invariante próprio é hiperbólico.

Acontece, que em uma dinâmica não-hiperbólica, tais conjuntos estão sempre presentes. Isto é o que diz o próximo exercício.

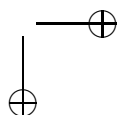
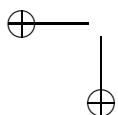
Exercício 7.2. Todo conjunto compacto invariante não-vazio e não hiperbólico contém um conjunto minimalmente não-hiperbólico.

Os conjuntos minimalmente não-hiperbólicos podem ser divididos em duas classes, usando a caracterização de conjuntos hiperbólicos dado pelo teorema 4.18 do capítulo 4.

Definição 7.3. Um ponto regular x é dito resistente se, usando as notações do teorema 4.18, temos

$$N_x \neq D^s(x) \oplus D^u(x).$$

Pelo teorema 4.18, um ponto resistente proíbe a hiperbolicidade de um conjunto que o contém. Dividimos os conjuntos minimalmente não-hiperbólicos em duas classes, dependendo da dinâmica do ponto resistente.



Definição 7.4. *Um conjunto sem singularidades minimalmente não-hiperbólico Λ é simples se ele possui um ponto x resistente tal que $\alpha(x)$ e $\omega(x)$ são subconjuntos próprios de Λ . Caso contrário, o conjunto é não-simples.*

Primeiramente, fazemos uma observação muito simples: se Λ é minimalmente não-hiperbólico simples e $x \in \Lambda$ é resistente então por minimalidade, temos que $\alpha(x)$ e $\omega(x)$ são conjuntos hiperbólicos, uma vez que são subconjuntos próprios de Λ . Outra observação é a seguinte:

Lema 7.5. *Se Λ é um conjunto sem singularidades minimalmente não-hiperbólico simples então $\Lambda = \omega(x) \cup O(x) \cup \alpha(x)$, onde x é um ponto resistente.*

Demonstração. Como $\alpha(x) \cup O(x) \cup \omega(x)$ é um compacto invariante de Λ e não hiperbólico (devido a presença de x) então ele não pode ser próprio. \square

Gostaríamos que na presença da condição estrela os tais conjuntos minimalmente não-hiperbólicos não existissem. Para este fim, vamos tentar obter informações extras *a priori*. Por exemplo, podemos obter informações sobre o índice.

Proposição 7.6. *Seja X estrela e $\Lambda \subset \overline{\text{Per}(X)}$ um conjunto não singular minimalmente não-hiperbólico simples. Se x é um ponto resistente então $\text{Ind}(\alpha(x)) \neq \text{Ind}(\omega(x))$.*

Demonstração. Note que $\omega(x)$ é um conjunto hiperbólico e transitivo, uma vez que é próprio, vamos denotar por i seu índice. Pelo teorema 3.26 temos que $x \in \text{Per}_i^*(X)$. Como Λ coincide com o fecho da órbita de x temos que $\Lambda \subset \text{Per}_i^*(X)$.

Como Λ é não-singular, pela propriedade estrela e o corolário 4.15 temos que Λ possui uma decomposição dominada $E \oplus F$ para o fluxo linear de Poincaré. Além disso, temos que $\dim E = i$. Portanto, $\dim F = d - i - 1$.

Por outro lado, por hiperbolicidade de $\omega(x)$, temos que $\dim D^s(x) = i$ e $\dim D^u(x) = d - i - 1$.

Argumentando de maneira análoga com $\alpha(x)$, e usando o exercício 4.17 temos que se $\text{Ind}(\alpha(x)) = \text{Ind}(\omega(x))$ então

$$D^s(x) = E(x) \text{ e } D^u(x) = F(x).$$

Mas o fato de E e F formarem uma soma direta no fibrado normal contradiz a hipótese de que x é um ponto resistente. E isto termina a prova. \square

Mais tarde, iremos mostrar que exatamente pela forma como foram definidos os conjuntos minimalmente não-hiperbólicos simples, podemos criar interseções heteroclínicas entre $\alpha(x)$ e $\omega(x)$, e tais conexões são heterodimensionais, pois a proposição diz que os índices são distintos. Veremos que estas conexões são proibidas pela propriedade estrela.

A pergunta que resta é, e o que podemos dizer dos conjuntos não-simples? Começamos analisando a pré-periodicidade de tal conjunto, na presença da propriedade estrela.

Proposição 7.7. *Seja X estrela, x um ponto resistente e $\Lambda := \omega(x) = \alpha(x) \subset \text{Per}(X) - \text{Sing}(X)$ um conjunto minimalmente não-hiperbólico. Então existe i tal que $\Lambda \subset \text{Per}_i^*(X)$.*

Demonstração. Como Λ é transitivo, temos que Λ é um limite fundamental (confira o exercício 3.15) e portanto podemos definir o seguinte número:

$$i = \min\{j; \text{ Existe um } j\text{-limite fundamental } K \subset \Lambda\}.$$

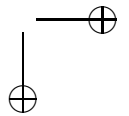
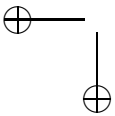
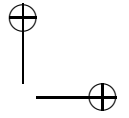
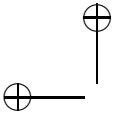
Note que $i \neq 0$ ou $d - 1$. Com efeito, do contrário poderíamos supor que Λ é acumulado por poços $O(p_n)$ de campos Y_n com $Y_n \rightarrow X$. Se o período de $O(p_n)$ fosse limitado então Λ seria uma órbita periódica e portanto seria hiperbólico pela propriedade estrela, absurdo pois Λ é minimalmente não-hiperbólico. Se o período de $O(p_n)$ é ilimitado, usando argumentos como na prova do teorema de Pliss, poderíamos tornar um desses poços num ponto periódico não hiperbólico, por uma pequena perturbação, o que fere a propriedade estrela.

Vamos supor que $\Gamma := \Lambda \cap \text{Per}_i^*(X)$ é um subconjunto próprio de Λ . Então, por minimalidade, ele é hiperbólico. Vamos tomar Γ^i a parte de Γ que tem índice i . Em princípio não sabemos se Γ^i é não-vazio. Mas o próximo lema garante isto.

Lema 7.8. *Se $K \subset \Lambda$ é um i -limite fundamental então existe um conjunto hiperbólico $J \subset K$ de índice $j \leq i$.*

Vamos provar este lema mais tarde.

De fato, por definição de i sabemos que existe um i -limite fundamental $K \subset \Lambda$. Pelo lema existe um conjunto hiperbólico $J \subset K$ de índice $j \leq i$. Este conjunto hiperbólico contém um conjunto minimal J' não-vazio (i.e. todas as órbitas de J' são densas em J'), que é um j -limite fundamental,



pelo *shadowing lemma*. Como i foi definido como mínimo, temos que $j = i$. Em particular, $J' \subset \Gamma^i$.

Observe que $x \notin \Gamma^i$, uma vez que Γ^i é hiperbólico e x é resistente. Seja U uma vizinhança pequena de Γ^i tal que $x \notin \overline{U}$ e $\Gamma \cap \overline{U} = \Gamma^i$ (observe que Γ^i é aberto em Γ).

Porém, como $\Gamma^i \subset \Lambda = \omega(x)$ e $x \notin \Gamma^i$ então existe $y \in \Lambda \cap \partial U$ tal que $O^+(y) \subset \overline{U}$. Como U é uma vizinhança pequena de Γ^i que é um conjunto hiperbólico de índice i , temos que $\omega(y)$ é um conjunto hiperbólico de índice i . Assim, pelo teorema 3.26, temos que $y \in \text{Per}_i^*(X)$ e portanto $y \in \Gamma$. Absurdo pois $y \in \partial U$. \square

Vamos agora provar o lema.

Prova do lema 7.8. Sabemos que K possui uma decomposição dominada $E \oplus F$ de índice i para o fluxo linear de Poincaré.

Se E não contrai, vamos usar o argumento de redução de índice. Seja

$$q = \min\{j; \text{ existe um } j\text{-limite fundamental } L \subset K\}.$$

Pelo exercício 5.14 temos que $q < i$. Seja L um q -limite fundamental contido em K . Note que $q \neq 0$, senão pelo exercício 5.10 L seria uma fonte, mas então como K é um limite fundamental, teríamos que $K = L$. Mas isto é um absurdo, uma vez que esta fonte deveria ser aproximada por órbitas periódicas de índice $1 \leq i \leq d - 2$ de campos Y_n próximos.

Seja então $\hat{E} \oplus \hat{F}$ a decomposição dominada de L . Novamente, pelo exercício 5.14 se \hat{E} não contrai então existe um r -limite fundamental $L' \subset L$ com $r < q$. Porém, desta vez, isto é um absurdo com a minimalidade de q . Assim, temos que \hat{E} contrai.

Ou seja, podemos supor desde o princípio que E contrai. O argumento então é parecido com os apresentados na prova da conjectura da Ω -estabilidade.

Ora, sejam $\tilde{T} > 0$ e $\tilde{\eta} > 0$ os números dados no teorema 4.16. Sejam $O(p_n)$ as órbitas periódicas de Y_n que geram o limite fundamental K . Assim, seja μ_n uma medida orbital obtida por

$$\frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \delta_{(Y_n)_{\tilde{T}}(p_n)}.$$

Note que μ_n é suportada em $O_{Y_n}(p_n)$. Mais ainda, pelo teorema 4.16 temos que

$$\frac{1}{\bar{T}} \int \log m(P_{Y_n}^{\bar{T}}(\cdot)|_{E^n}) d\mu_n(\cdot) \geq \bar{\eta}.$$

Tomando μ um ponto de acumulação de μ_n temos que μ é uma medida X -invariante suportada em Λ . E portanto

$$\frac{1}{\bar{T}} \int \log m(P_X^{\bar{T}}(\cdot)|_F) d\mu(\cdot) \geq \bar{\eta}.$$

Usando o teorema de Birkhoff temos que existe um ponto b recorrente tal que $b \in \omega(b) \subset K$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\bar{T}} \sum_{j=0}^{n-1} m(P_X^{\bar{T}}(X_{j\bar{T}}(b))|_F) \geq \lambda.$$

Assim pelo teorema 6.5, temos que $\omega(b)$ é um conjunto hiperbólico de índice i . De fato se $F|_{\omega(b)}$ não fosse expansor, então pelo teorema 6.5 teríamos uma órbita periódica com autovalor instável fraco e isto seria uma contradição com a propriedade estrela. \square

O principal resultado deste capítulo é o seguinte, que versa sobre não existência de conjuntos não-simples na presença da propriedade estrela.

Teorema 7.9. *Se X é estrela então não existem conjuntos minimalmente não-hiperbólicos não simples em $\text{Per}(X) - \text{Sing}(X)$.*

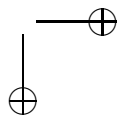
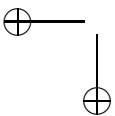
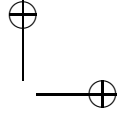
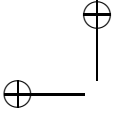
Demonstração. Vamos supor que não. Então existe um ponto x resistente tal que $\Lambda := \omega(x) = \alpha(x) \subset \text{Per}(X) - \text{Sing}(X)$ é um conjunto minimalmente não-hiperbólico. Pelo resultado anterior, existe i minimal tal que $\Lambda \subset \text{Per}_i^*(X)$.

Como o campo é estrela, pelo corolário 4.15 temos uma decomposição dominada $D_\Lambda = E \oplus F$, de índice i sobre Λ para o fluxo linear de Poincaré.

Da minimalidade de i , segue que o fibrado E é contrator, pois pelo argumento de redução de índice teríamos que Λ contém um j -limite fundamental, com $j < i$ (confira o exercício 5.14).

Seja $\Gamma \subset \Lambda$ o conjunto de pontos onde temos expansão não uniforme. Isto é, fixadas as constantes positivas \bar{T} e $\bar{\eta}$, tomamos os pontos z tais que,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\bar{T}} \sum_{j=0}^{n-1} \log m(P_X^{\bar{T}}(X_{j\bar{T}}(z))|_F) \geq \bar{\eta}.$$



Note que não sabemos se Γ é fechado! Vamos supor que $x \notin \bar{\Gamma}$. Isto força que $\bar{\Gamma}$ seja um subconjunto próprio de Λ . Assim $\bar{\Gamma}$ é um conjunto hiperbólico, pois Λ é minimalmente não-hiperbólico. Por construção, há expansão não uniforme em F sobre Γ , temos que o índice de Γ é i .

Seja então uma vizinhança pequena U de $\bar{\Gamma}$ tal que todo compacto invariante contido em U é um conjunto hiperbólico de índice i .

Podemos supor ainda que $x \notin U$. Argumentando como no exercício 3.25, existe $b \in \Lambda \cap \partial U$ tal que $O^+(b) \subset \bar{U}$. Concluimos duas coisas, primeiro, $\omega(b)$ é um conjunto hiperbólico de índice i contido em U . Segundo, como b está no bordo de U temos que $b \notin \Gamma$, assim por definição de Γ temos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\bar{T}} \sum_{j=0}^{n-1} \log m(P_X^{\bar{T}}(X_{j\bar{T}}(b))|_F) < \bar{\eta}.$$

Assim, existe $0 < \eta < \bar{\eta}$, tal que para todo n grande temos:

$$\frac{1}{n\bar{T}} \sum_{j=0}^{n-1} \log m(P_X^{\bar{T}}(X_{j\bar{T}}(b))|_F) \leq \eta.$$

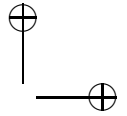
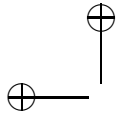
Podemos então tomar $n_i \rightarrow \infty$ tal que $X_{n_i\bar{T}}(b) \rightarrow c \in \omega(b)$. Dados $\eta < \eta_1 < \eta_2 < \bar{\eta}$, e $i \in \mathbb{N}$ se $k - i$ é muito grande temos que

$$\frac{1}{(n_k - n_i)\bar{T}} \sum_{j=n_i}^{n_k-1} \log m(P_X^{\bar{T}}(X_{j\bar{T}}(b))|_F) \leq \eta_1.$$

Porem, se i é grande então a corda $(X_{n_i\bar{T}}(b), X_{n_k\bar{T}}(b))$ está próxima do conjunto hiperbólico $\omega(b)$ e seus extremos estão bem próximos (lembre $X_{n_i\bar{T}}(b)$ converge a c). Assim, pelo *shadowing lemma* temos uma órbita periódica $O(p)$ que sombreia a corda. Isto é existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_k - n_i} = \pi(p)$, onde $\pi(p)$ é o período de p , cada $t_{j+1} - t_j$ é quase T e como p sombreia temos, por continuidade, que

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{n_k - n_i - 1} \log m(P_X^{t_{j+1} - t_j}(X_{t_j}(p))|_F) \leq \eta_2.$$

Mas isto fere o teorema 4.16, pois ele garante que a força da expansão dos pontos periódicos é uniforme (no período), e isto dá a contradição. \square



Capítulo 8

Ciclos Heterodimensionais

Como vimos nos capítulos anteriores, a presença de pontos periódicos com índices diferentes gera uma obstrução à hiperbolicidade. De fato, em certas configurações, tais pontos dão origem a um mecanismo responsável por gerar dinâmicas extremamente ricas. Estes são os ciclos heterodimensionais.

Definição 8.1. *Dados duas órbitas periódicas hiperbólicas $O(p)$ e $O(q)$, com índices diferentes, dizemos que elas geram um ciclo heterodimensional se $W^s(O(p))$ intersecta $W^u(O(q))$ e $W^u(O(p))$ intersecta $W^s(O(q))$. Podemos ainda supor que uma delas é transversal.*

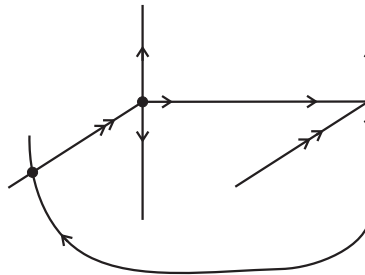
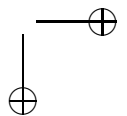
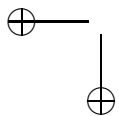
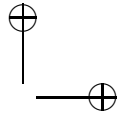
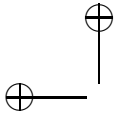


Figura 8.1: Ciclo Heterodimensional





O principal resultado deste capítulo é mostrar que a presença de um ciclo heterodimensional é uma obstrução para que um fluxo seja estrela. Porém alertamos o leitor que tais ciclos estão intimamente ligados a dinâmicas não-hiperbólicas. Para maiores informações referimos o leitor a [22] ou [18], para maiores detalhes.

8.1 Não Existência de Ciclos Heterodimensionais

Nesta seção provamos um dos mais importantes resultados deste livro. Seguimos a prova dada na seção 4 de [30].

Teorema 8.2. *Se X é estrela então X não possui ciclos heterodimensionais.*

Observação 8.3. *Observe que no enunciado do teorema não se pede que o campo seja não-singular.*

Idéia da Prova

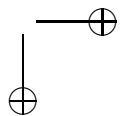
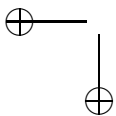
Primeiramente, vamos expor uma idéia bem ingênua. Vamos supor que temos duas órbitas periódicas $O(p)$ e $O(q)$, que formam um ciclo heterodimensional. Imagine que ambas compartilham uma direção comum na decomposição de Oseledec das medidas periódicas associadas (imagine que o fibrado tangente está trivializado). Note que nesta direção o expoente de Lyapunov λ_1 da medida μ_P é positivo enquanto que o expoente de Lyapunov λ_2 da medida μ_Q é negativo. Então uma combinação convexa

$$\mu = (1 - \alpha)\mu_P + \alpha\mu_Q,$$

adequada deve ter expoente de Lyapunov nulo. Essencialmente escolha α tal que $\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0$.

Agora, usando o *ergodic closing lemma* temos um campo próximo com uma órbita periódica bem próxima de uma órbita genérica para μ . Porém, como existe sombreamento isto diria que o expoente de Lyapunov da órbita periódica é quase nulo. O que é um absurdo pois o campo era estrela, e isto fere o teorema 4.13 a força de órbitas periódicas é uniforme.

A prova do teorema no caso em que a diferença de índices é 1 se baseia nessa idéia. Porém, o ciclo heterodimensional é usado para garantir que



a órbita genérica citada acima¹ veja a direção central expansora de P , a direção central contratora de Q nas taxas corretas, para que no fim tenha um expoente nulo.

Isto será feito rigorosamente na próxima seção. Porém uma outra dificuldade aparece, pois em princípio a diferença entre os índices não precisa ser igual a 1. E se for maior, então teremos muitas direções centrais. Qual escolher? A princípio isso parece ser um grande empecilho, porém ao lembramos que o ciclo ganha duas decomposições dominadas vindas das órbitas periódicas então podemos jogar a culpa nas decomposições.

Isto é, esquecer um pouco o problema da direção, uma vez que a decomposição dominada leva direções intermediárias na direção dominante, e depois usar a dominação vinda do outro ponto periódico para consertar a direção de volta a direção dominante do outro ponto periódico e assim em diante. De fato, em certas circunstâncias podemos assumir de fato que a diferença de índices é 1. Referimos o leitor a [1] (veja também [6]).

Vamos dar as idéias do que ocorrerá no caso geral. Caso existisse um ciclo heterodimensional, tome o conjunto dado pela união das órbitas periódicas com a união de duas órbitas heteroclínicas, dadas pelo ciclo. Tal conjunto é pré-periódico por resultados anteriores e isto gera decomposições dominadas. Repare que a decomposição dominada é uma propriedade aberta tanto em uma vizinhança desse conjunto, como em uma vizinhança do campo. E ainda temos mais, temos que essa decomposição dominada também é parcialmente hiperbólica, ou seja, vamos passar a estudar a direção central.

Uma idéia conhecida quando se estuda ciclos heterodimensionais é a de criar pseudo órbitas controlando o tempo que ela passará perto de cada uma das órbitas periódicas, com isso tentaremos “contaminar” a direção central com expansão ou contração de acordo com os nossos propósitos. Uma vez que conseguimos essas pseudo órbitas, faremos pequenas perturbações e vamos obter uma órbita periódica que sombreia essa pseudo órbita, e por desigualdade triangular, também tem sua direção central “contaminada”. Daí, ajustando tais tempos, conseguiremos uma órbita periódica não-hiperbólica por perturbação e isto dará a contradição. De fato, [30] mostra a contradição de modo mais direto, obtendo um absurdo entre as estimativas hiperbólicas geradas por tais tempos.

¹OK! Não haverá mais medida envolvida, mas... é só uma idéia...:D

Prova do Teorema

Vamos supor por absurdo que existe um ciclo heterodimensional entre as órbitas periódicas $O(p)$ e $O(q)$ de índices i e $i + g$ respectivamente para X . Temos então que $1 \leq i < i + g \leq d - 2$. Considere os pontos

$$x \in W^s(O(q)) \cap W^u(O(p)) \text{ e } y \in W^s(O(p)) \cap W^u(O(q)).$$

Vamos definir o seguinte conjunto invariante

$$\Lambda := O(p) \cup O(q) \cup O(x) \cup O(y),$$

Considere as decomposições hiperbólicas do fluxo linear de Poincaré das órbitas periódicas, $N_{O(p)} = N_i^s \oplus N_i^u$ and $N_{O(q)} = N_{i+g}^s \oplus N_{i+g}^u$. Observe que pela proposição 3.28 temos que

$$\Lambda \subset \text{Per}_i^*(X) \cap \text{Per}_{i+g}^*(X).$$

Logo, obtemos uma decomposição dominada da forma $N_\Lambda = N_i^s \oplus N_C \oplus N_{i+g}^u$, onde $N_C = N_i^u \cap N_{i+g}^s$. Observe também que pelo teorema 5.15 temos que P^t contrai N_i^s e que expande N_{i+g}^u .

Como vamos usar o fluxo linear de Poincaré de diversos campos restritos a diferentes (porém próximos) fibrados, vamos usar a seguinte notação: $P_Y^t(x)|_{N(Y)}$ denota o fluxo linear de Poincaré de Y no ponto x , restrito a fibra N_x do fibrado correspondente ao campo Y .

Tome vizinhanças U de Λ e \mathcal{U} de X pequenas o suficiente tais que para todo $Y \in \mathcal{U}$ temos $U \cap \text{Sing}(Y) = \emptyset$ e qualquer conjunto fechado e invariante $\Gamma \subset U$ de Y tem uma decomposição dominada semelhante a N_Λ , ou seja,

$$N(Y) = N_i^s(Y) \oplus N_C(Y) \oplus N_{i+g}^u(Y),$$

Além disso, podemos supor que P_Y^t , o fluxo linear de Poincaré para Y , contrai $N_i^s(Y)$ e expande $N_{i+g}^u(Y)$.

No resto da prova vamos usar as constantes $\tilde{\eta}$ e \tilde{T} dados pelo teorema 4.16. Vamos também definir as seguintes constantes:

$$r = \frac{\tilde{\eta}}{4} \text{ e } K = \log \sup_{z \in U, Y \in \mathcal{U}, t \in [-6\tilde{T}, 6\tilde{T}]} (\|P_Y^t(z)|_{N(Y)}\|)^{\frac{1}{\tilde{T}}}.$$

Note que se $|t| \geq \tilde{T}$ e $X_{[0,t]}(z) \subset U$ então segue da definição de K que $\|P_Y^t(z)|_{N(Y)}\| \leq e^{K|t|}$. Mais ainda, se $0 \leq t \leq 6\tilde{T}$ então o mesmo vale.

Vamos então analisar o caso em que $t > 6\tilde{T}$. Basta dividir o intervalo $[0, t]$ em pedaços que sabemos controlar. No caso vamos escrever $t = 2n\tilde{T} + s$ com $s \in [0, 2\tilde{T})$. Obtemos então

$$\begin{aligned} \|P_Y^t(z)|_{N(Y)}\| &= \|P_Y^s(z_n)|_{N(Y)} \cdot P_Y^{2\tilde{T}}(z_{n-1})|_{N(Y)} \dots P_Y^{2\tilde{T}}(z_0)|_{N(Y)}\| \\ &\leq e^{(n+1)K\tilde{T}} \leq e^{Kt}, \end{aligned}$$

onde $z_i = Y_{2i\tilde{T}}(z)$, com $i = 0, 1, \dots, n$. Podemos obter uma estimativa análoga quando $t < 0$.

Voltamos então nossos esforços para investigar o que ocorre na direção central.

Note que por continuidade, reduzindo a vizinhança \mathcal{U} se necessário, existe $\delta > 0$ tal que se $z, z' \in U$, $d(z, z') \leq 4\delta$, $N_C(z)$ está bem definido para X , $N_C(Y, z')$ está bem definido para qualquer $Y \in \mathcal{U}$ e $t \in [0, 6\tilde{T}]$ então

$$e^{-r\tilde{T}} \leq \frac{m(P^t(z)|_{N_C})}{m(P_Y^t(z')|_{N_C(Y)})} \leq e^{r\tilde{T}} \quad (8.1)$$

$$e^{-r\tilde{T}} \leq \frac{\|P^t(z)|_{N_C}\|}{\|P_Y^t(z')|_{N_C(Y)}\|} \leq e^{r\tilde{T}} \quad (8.2)$$

O que essas desigualdades nos dizem é que as direções centrais permanecem razoavelmente próximas ao variar o campo.

O próximo passo é preparar o terreno para fazer perturbações que irão gerar a contradição. Tais perturbações serão feitas em cima de uma pseudo-órbita que será cuidadosamente criada.

Escolhendo δ suficientemente pequeno podemos supor que $B(p, 4\delta)$ e $B(q, 4\delta)$ estão contidos em U . Mais ainda, denotando por T e S os períodos de p e q , respectivamente, e tomando duas seções transversais Σ em p e Γ em q , podemos assumir $B(p, 4\delta) - \Sigma$ e $B(q, 4\delta) - \Gamma$ são desconexos, ou seja, as bolas são pequenas suficientes de modo que estas seções transversais cortam estas bolas em duas partes.

Assim, para qualquer $0 < \alpha \leq 4\delta$ podemos definir $\Sigma_\alpha = B(p, \alpha) \cap \Sigma$ e $\Gamma_\alpha = B(q, \alpha) \cap \Gamma$. Em particular, se δ é suficientemente pequeno, podemos supor que o mapa de Poincaré² P está definido para todo $z \in \Sigma_{4\delta} \cup \Gamma_{4\delta}$.

Alerta: Não confundir o mapa de Poincaré com o fluxo de linear de Poincaré definidos na seção 1.1.

²Aqui há um abuso de notação, pois na verdade temos dois mapas de Poincaré, um em cada órbitas, e estamos denotando por P ambos os mapas.

Por simplicidade podemos assumir que

$$\|D(P|_{W^s(p) \cap \Sigma_{4\delta}})\|, \|D(P^{-1}|_{W^u(p) \cap \Sigma_{4\delta}})\|, \|D(P|_{W^s(q) \cap \Gamma_{4\delta}})\|, \|D(P^{-1}|_{W^u(q) \cap \Gamma_{4\delta}})\| < 1.$$

Fixemos pontos $x_p, x_q \in O(x)$ e $y_p, y_q \in O(y)$ tal que $x_p, y_p \in \Sigma_\delta$ e $x_q, y_q \in \Gamma_\delta$. Vamos tomar também os pontos $y_p = X_{s'}(y_q)$ e $x_q = X_{t'}(x_p)$ com $t', s' \geq 2\tilde{T}$.

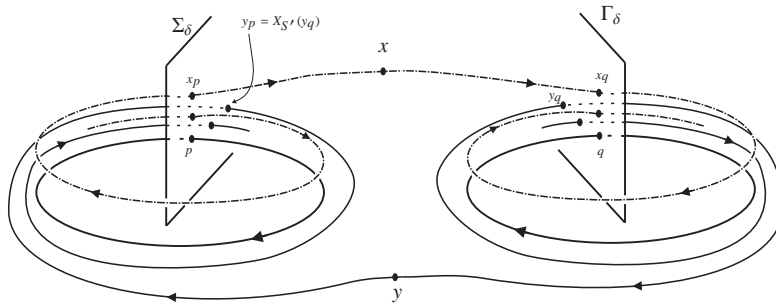


Figura 8.2:

Para gerar a pseudo-órbita, deixamos o seguinte exercício para o leitor.

Exercício 8.4. *Existe $\delta_0 > 0$ pequeno suficiente tal que para qualquer $\delta \in (0, \delta_0]$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe um inteiro $N > 0$ tal que para cada inteiro $n \geq N$ existem $p_n, q_n \in U$ que satisfazem $p_n, P(p_n), \dots, P^n(p_n) \in B(p, 2\delta)$ e $q_n, P(q_n), \dots, P^n(q_n) \in B(q, 2\delta)$ e $d(p_n, y_p) \leq \epsilon$, $d(P^n(p_n), x_p) \leq \epsilon$, $d(q_n, x_q) \leq \epsilon$ e $d(P^n(q_n), y_q) \leq \epsilon$.*

Vamos definir tempos T_n e S_n através das seguintes equações: $P^n(p_n) = X_{T_n}(p_n)$ e $P^n(q_n) = X_{S_n}(q_n)$. O que o exercício nos diz é que para qualquer par de inteiros $m, n \geq L$, conseguimos a seguinte ϵ -pseudo órbita periódica

$$O(m, n) = (X_{[0, T_m]}(p_m), X_{[0, t']}(x_p), X_{[0, S_n]}(q_n), X_{[0, s']}(y_q)).$$

Nessa altura o leitor já deve ter percebido que iremos produzir, após uma pequena perturbação, uma órbita periódica na qual poderemos escolher quanto tempo ela passará perto de cada órbita p ou q , “contaminando”

a direção central de acordo com nossos propósitos. Mais a frente veremos que isso levará a uma contradição com a propriedade estrela.

O próximo lema diz como ocorre a criação da órbita periódica.

Lema 8.5. *Para qualquer $\delta \in (0, \delta_0]$ existem $\varepsilon > 0$, $N > L$ tais que se $n \geq N$ e $m \geq N$ então existe $X_{mn} \in \mathcal{U}$ e um ponto periódico x_{mn} de X_{mn} que δ -sombreia a ε -pseudo órbita $O(m, n)$.*

Demonstração. Basta tomar N grande o suficiente tal que $O(m, n)$ se torne uma ε -pseudo órbita para $\varepsilon \leq \delta$ pequeno o suficiente tal que quando fizermos pequenas perturbações em vizinhanças pequenas de $\{y_p, x_p, x_q, y_q\}$, para fechar a pseudo órbita periódica $O(m, n)$ em uma órbita periódica, e como apenas perturbamos em vizinhanças pequenas daqueles pontos, o que concluímos é que essa nova órbita periódica passa próximo de $O(m, n)$. \square

Note que por construção de p_m e q_n , obtemos que $O(x_{mn}, X_{mn})$ também 3δ -sombreia a pseudo órbita periódica

$$Q(m, n) = (X_{[0, mT]}(p), X_{[0, t']}(x_p), X_{[0, nS]}(q), X_{[0, s']}(y_q)).$$

Isto é uma simples aplicação da desigualdade triangular.

Observe que a órbita $O(x_{mn}, X_{mn})$ fica “ m -vezes” ao redor de $O(p)$ e “ n -vezes” ao redor de $O(q)$. Podemos tomar uma parametrização de $Q(m, n)$ da seguinte forma.

$$Q(m, n, t) = \begin{cases} X_t(p), & \text{para } t \in [0, mT), \\ X_{t-mT}(x_p) & \text{para } t \in [mT, mT + t') \\ X_{t-mT-t'}(q) & \text{para } t \in [mT + t', mT + t' + nS) \\ X_{t-mT-t'-nS}(y_q) & \text{para } t \in [mT + t' + nS, mT + t' + nS + s'] \end{cases}$$

Por motivos estéticos, até o fim desta seção, vamos denotar $X_{mn}^t(x)$ como o tempo t da órbita de x pelo fluxo do campo X_{mn} .

Para cada $m, n \geq N$ podemos tomar uma reparametrização

$$\theta_{mn} : [0, mT + nS + s' + t'] \rightarrow \mathbb{R},$$

com $\theta(0) = 0$, tal que,

$$d(Q(m, n, t), X_{mn}^{\theta_{mn}(t)}(x_{mn})) \leq 3\delta \text{ para todo } t \in [0, mT + nS + t' + s'].$$

Podemos também assumir que $\theta_{mn}(mT + nS + t' + s')$ é o período de x_{mn} .

O seguinte exercício detalha mais esta reparametrização.

Exercício 8.6. Se X é estrela e para qualquer $\bar{T} > 0$, $\tau > 0$, existem uma vizinhança $\mathcal{U}_1 = \text{viz}^1(X)$ e $\epsilon_1 > 0$ tal que se $Y \in \mathcal{U}_1$, $\bar{T} \leq T' < \infty$ e $\theta(t)$ uma função estritamente crescente, contínua em $[0, T']$ com $\theta(0) = 0$, $X_{[0, T']}(a), X_{[0, T']}(b) \subset U$ e

$$d(X_t(a), Y_{\theta(t)}(b)) \leq \epsilon_1$$

para todo $t \in [0, T']$, então temos que

$$(1 - \tau)T' \leq \theta(T') \leq (1 + \tau)T'$$

O exercício diz que a reparametrização não muda muito o tempo.

Agora vamos fixar, de acordo com o lema, $\bar{T} = \tilde{T}$, \mathcal{U}_1 e $T < \min\{\frac{1}{4}, \frac{\tilde{\eta}}{8K}\}$. Mais ainda, por dominação, podemos assumir que T é pequeno o suficiente tal que se $|t| \leq 6T\tilde{T}$ então temos que $\|P_t^t\| \leq e^{r\tilde{T}}$ para cada $Y \in \mathcal{U}_1$.³

Lema 8.7. Seja $N > 0$ como no exercício 8.4. Para $n > N$ fixado, se m é grande o suficiente então x_{mn} tem índice i , e fixado $m > N$ se n é grande o suficiente então x_{mn} tem índice $i + g$.

O lema diz que passando bastante tempo perto de uma (ou da outra) órbita periódica, podemos “contaminar” as direções centrais, tendo um controle sobre o índice do ponto periódico criado.

Prova do lema 8.7. Pelo teorema 4.16 temos que para qualquer partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = mT$, com $2\tilde{T} \leq t_{j+1} - t_j \leq 4\tilde{T}$, $0 \leq j < l$, temos que

$$\prod_{j=0}^{l-1} m(P^{t_{j+1}-t_j}(X_{t_j}(p))|_{N_C}) \geq e^{\tilde{\eta}mT}$$

Temos que $N_C(X_t(p)) \subset N^u(X_t(p))$, devido a hipótese sobre o índice de p . Como $d(X_t(p), X_{mn}^{\theta_{mn}(t)}(x_{mn})) \leq 3\delta$ então através das estimativas (8.1), obtemos que

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{l-1} m(P_{X_{mn}}^{t_{j+1}-t_j}(X_{mn}^{\theta_{mn}(t_j)}(x_{mn}))|_{N_C(X_{mn})}) \geq \\ & \geq \left(\prod_{j=0}^{l-1} m(P^{t_{j+1}-t_j}(X_{t_j}(p))|_{N_C}) \right) e^{-(lr\tilde{T})/(mT)} \geq e^{(\tilde{\eta}-r)mT} \end{aligned}$$

³Alertamos que a notação $P_X^t(x)$ denota o fluxo linear de Poincaré no ponto x .

Pelo lema anterior temos que $|(\theta_{mn}(t_{j+1}) - \theta_{mn}(t_j)) - (t_{j+1} - t_j)| \leq 4\tau\tilde{T}$. Usando a continuidade de decomposição dominada e tomando τ pequeno, juntamente com as estimativas que aparecem acima, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{l-1} m(P_{X_{mn}}^{\theta_{mn}(t_{j+1}) - \theta_{mn}(t_j)}(X_{mn}^{\theta_{mn}(t_j)}(x_{mn}))|_{N_C(X_{mn})}) &\geq \\ &\geq \left(\prod_{j=0}^{l-1} m(P^{t_{j+1} - t_j}(X_{t_j}(p))|_{N_C}) \right) e^{-2r} \geq e^{(\tilde{\eta} - 2r)mT} \end{aligned}$$

Temos também que

$$T_{mn} = \theta_{mn}(mT + nS + t' + s') \leq (1 + \tau)(mT + nS + t' + s')$$

e

$$\theta_{mn}(mT) \geq (1 - \tau)(mT).$$

Pela regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} m(P_{X_{mn}}^{T_{mn}}(x_{mn})|_{N_C(X_{mn})}) &\geq \left(m(P_{X_{mn}}^{\theta_{mn}(mT)}(x_{mn})|_{N_C(X_{mn})}) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(m(P_{X_{mn}}^{T_{mn} - \theta_{mn}(mT)}(x_{mn})|_{N_C(X_{mn})}) \right) \\ &\geq e^{mT(\tilde{\eta} - 2r) - K(T_{mn} - \theta_{mn}(mT))} \\ &\geq e^{(\tilde{\eta} - 2r - 2K\tau)(mT) - K(1 + \tau)(nS + t' + s')} \end{aligned}$$

Observe que usamos as estimativas dadas pelo exercício acima e as estimativas do início da demonstração. Agora observe que podemos escolher τ pequeno o suficiente tal que o último termo é maior do que 1 para m grande o suficiente. Ou seja, o que isso nos diz é que $P_{X_{mn}}^{T_{mn}}$ expande N_C , o que prova o lema neste caso. Por um argumento análogo podemos mostrar o caso em que x_{mn} passa muito tempo próximo a órbita de q . \square

Agora passaremos a última parte da demonstração. Tome $n_0 > N$ tal que $n_0 > \frac{2K}{r}$. Pelo lema anterior temos que para qualquer $m_0 > N$ podemos tomar $n > n_0$ tal que o ponto x_{m_0n} tem índice $i + g$. O lema também diz que podemos tomar $m > m_0$, tal que o ponto x_{mn} tem índice maior do

que i , porém o ponto $x_{(m+1)n}$ tem índice exatamente i (ou seja m é minimal com esta propriedade). Veremos que esta troca de índice irá gerar uma contradição.

Primeiro, como fizemos acima, tomamos uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = mT + nS + t' + s'$, tal que $2\tilde{T} \leq t_{j+1} - t_j \leq 4\tilde{T}$ para $0 \leq j < k$ e também queremos que $\{mT, mT + t', mT + t' + nS\} \subset \{t_0, \dots, t_k\}$. Com isso obtemos também a seguinte partição para $[0, T_{mn}]$

$$0 = \theta_{mn}(t_0) < \dots < \theta_{mn}(t_k) = T_{mn}.$$

Temos ainda que $\theta_{mn}(t_{j+1}) - \theta_{mn}(t_j) \leq \tilde{T}$. Agora repare que pelo lema anterior, x_{mn} tem índice maior do que i , daí a direção central $N_C(X_{mn})$, no ponto x_{mn} , tem interseção não trivial com a direção estável $N^S(X_{mn})$ no ponto $X_{mn}^t(x_{mn})$.

Como essa direção contrai temos que

$$\prod_{j=0}^{k-1} m(P_{X_{mn}}^{\theta_{mn}(t_{j+1}) - \theta_{mn}(t_j)}(X_{mn}^{\theta_{mn}(t_j)}(x_{mn}))|_{N_C(X_{mn})}) \leq e^{-\tilde{\eta}T_{mn}}.$$

Agora por uma conta análoga a feita na demonstração do lema anterior, usando as mesmas estimativas, obtemos que

$$\prod_{j=0}^{k-1} m(P_X^{t_{j+1} - t_j}(Q(m, n, t_j))|_{N_C}) \leq e^{-(\tilde{\eta} + 2r)T_{mn}}. \quad (8.3)$$

Agora tomemos a seguinte partição

$$\begin{aligned} 0 = t'_0 < \dots < t'_l = T &< t'_{l+1} = T + t_1 < \dots < t'_{l+j} = T + t_j \\ &< \dots < t'_{l+k} = (m+1)T + nS + t' + s'. \end{aligned}$$

tal que $2\tilde{T} \leq t'_{j+1} - t'_j \leq 4\tilde{T}$. Isto induz a seguinte partição de $[0, T_{(m+1)n}]$, como fizemos antes,

$$0 = \theta_{(m+1)n}(t'_0) < \dots < \theta_{(m+1)n}(t'_{l+k}) = T_{(m+1)n}.$$

De forma análoga, obtemos que $w_{mnj} := \theta_{(m+1)n}(t'_{j+1}) - \theta_{(m+1)n}(t'_j) \geq \tilde{T}$. Pelo lema anterior, temos que $x_{(m+1)n}$ tem índice i , portanto a direção central expande. Portanto obtemos a seguinte estimativa

$$\prod_{j=0}^{l+k-1} m(P_{X_{(m+1)n}}^{W_{mnj}} (X_{(m+1)n}^{\theta_{(m+1)n}(t'_j)} (X_{(m+1)n}))|_{N_C(X_{(m+1)n})}) \geq e^{\tilde{\eta}T_{(m+1)n}},$$

que simplesmente nos diz que a direção central está expandindo. E mais uma vez, contas parecidas às feitas acima, temos que

$$\prod_{j=0}^{l+k-1} m(P_X^{t'_{j+1}-t'_j} (Q(m+1, n, t'_j))|_{N_C}) \geq e^{(\tilde{\eta}-2r)T_{(m+1)n}}. \quad (8.4)$$

Agora repare que por definição, temos que

$$Q(m+1, n, t'_{l+j}) = Q(m, n, t_j),$$

Repare que $t'_{l+j+1} - t'_{l+j} = t_{j+1} - t_j$. Portanto

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{l+k-1} m(P_X^{t'_{j+1}-t'_j} (Q(m+1, n, t'_j))|_{N_C}) &= \\ \left(\prod_{j=0}^{l-1} m(P_X^{t'_{j+1}-t'_j} (Q(m+1, n, t'_j))|_{N_C}) \right) &\cdot \left(\prod_{j=0}^{k-1} m(P_X^{t'_{j+1}-t'_j} (Q(m, n, t_j))|_{N_C}) \right) \\ &= I.II \end{aligned}$$

Pelas estimativas 8.4, da hiperbolicidade na direção central feita acima, temos que

$$1 < e^{T_{(m+1)n}(\tilde{\eta}-2r)} \leq \prod_{j=0}^{l+k-1} m(P_X^{t'_{j+1}-t'_j} (Q(m+1, n, t'_j))|_{N_C})$$

Mas pela estimativa 8.3, II é estimado por:

$$II \leq e^{-T_{mn}(\tilde{\eta}-2r)},$$

Por outro lado, da forma como havíamos tomado a constante K , e pelo fato de que $t'_l = T$ temos que

$$I \leq e^{KT},$$

como podemos tomar $T_{mn} \gg T$ temos que $KT - T_{mn}(\tilde{\eta} - 2r) < 0$.

Juntando tudo

$$1 < e^{T_{(m+1)n}(\tilde{\eta}-2r)} \leq L.II \leq e^{KT-T_{mn}(\tilde{\eta}-2r)} < 1.$$

O que é um absurdo.

8.2 Não existência de conjuntos simples

Comentamos anteriormente de que uma das obstruções para a hiperbolicidade, os conjuntos minimalmente não-hiperbólicos simples, seria descartada. O motivo é que elas levam a construção de ciclos heterodimensionais e isto é proibido pelos resultados anteriores, na presença da propriedade estrela. Isto completaria a prova de que não existem conjuntos minimalmente não-hiperbólicos para fluxos estrela sem singularidades, e permitirá mostrar que tais fluxos são de fato Axioma A.

Teorema 8.8. *Se X é estrela então não existem conjuntos minimalmente não-hiperbólicos simples em $\overline{\text{Per}(X)} - \text{Sing}(X)$.*

Demonstração. O Conjunto

Pelo lema 7.5, se chamarmos Λ o conjunto em questão, então ele se escreve como $\Lambda = \alpha(x) \cup O(x) \cup \omega(x)$, como na figura.

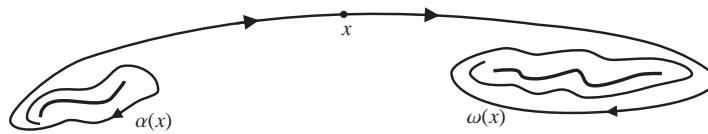


Figura 8.3: Λ

Como x é acumulado por pontos periódicos x_n então podemos considerar o limite fundamental gerado K , que é o limite Hausdorff de $O(x_n)$. Note que $\Lambda \subset K$. Como Λ não é um poço, nem uma fonte (via não-hiperbolicidade), $\text{Ind}(\omega(x))$ e $\text{Ind}(\alpha(x))$ não podem ser 0 ou $d - 1$.

Vimos pela proposição 7.6, que $\text{Ind}(\omega(x)) \neq \text{Ind}(\alpha(x))$, portanto $\alpha(x) \cap \omega(x) = \emptyset$. Tomamos, uma vizinhança V de $\alpha(x)$ e uma vizinhança U de

$\omega(x)$ tão pequenas tais que seus fechos são disjuntos e quaisquer duas órbitas periódicas contidas em uma mesma vizinhança de algum campo próximo a X sejam homoclinicamente relacionadas.

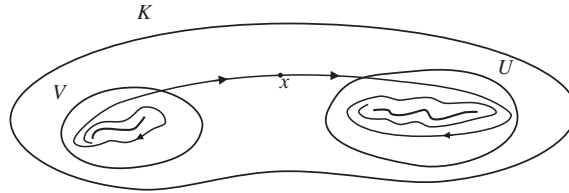


Figura 8.4:

Os Contra-Regras Criam o Cenário

Como $x \in K - \omega(x)$ então temos que $K - \omega(x) \neq \emptyset$, analogamente para $\alpha(x)$. O exercício 3.25 diz que existem dois pontos $z \in K \cap U - (\omega(x) \cup \text{Sing}(X))$ e $y \in K \cap V - (\alpha(x) \cup \text{Sing}(X))$ junto com duas órbitas periódicas $O(p) \subset U$ com índice i e $O(q) \subset V$ com índice j tais que:

- $O^-(z) \subset U$ e $O^+(y) \subset V$
- $z \in \overline{W^u(O(p))}$ e $y \in \overline{W^s(O(q))}$

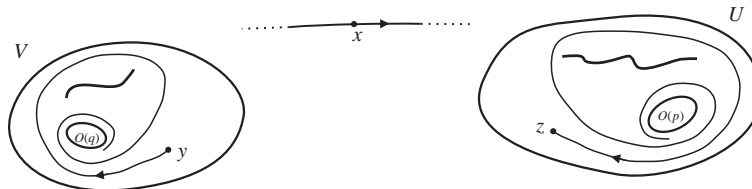


Figura 8.5:

A idéia é construir o ciclo entre $O(p)$ e $O(q)$. Usando tubos em x, y e z , e notando que limites fundamentais geram naturalmente cordas para usar o *connecting lemma tunado*.

Construindo Tubos

Tomando \mathcal{U} uma C^1 -vizinhança de X , e lembrando que x, y e z não são periódicos temos pelo *connecting lemma tunado* que existem $\rho > 0, T > 0$ e $\delta > 0$ que servem para conectar órbitas dentro de tubos.

O leitor pode observar que o caso mais difícil é quando y e z não estão na mesma órbita. Logo, os seguintes conjuntos são disjuntos

$$A = X_{[0,T]}(y), \quad B = X_{[-T,0]}(z) \text{ e } \Lambda.$$

Daí, se $\delta > 0$ é pequeno os fechos dos seguintes tubos são disjuntos:

$$T = \bigcup_{t \in [0, T]} B(X_t(x), \varepsilon)$$

$$T_1 = \bigcup_{t \in [0, -T]} B(X_t(z), \varepsilon) \quad \text{e} \quad T_2 = \bigcup_{t \in [0, T]} B(X_t(y), \varepsilon).$$

Mais ainda, $(\overline{T_1} \cup \overline{T_2}) \cap \Lambda = \emptyset$

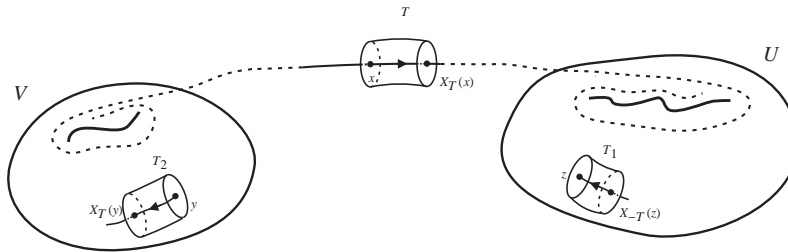


Figura 8.6:

Tais tubos serão usados para conectar órbitas, porém devemos ter cuidado com a interferência de órbitas. Para isto, tomamos $\eta > 0$ muito pequeno tal que

$$W_\eta^s(O(p)) \cup W_\eta^u(O(p)) \subset U \text{ e } W_\eta^s(O(q)) \cup W_\eta^u(O(q)) \subset V.$$

E mais ainda, vamos pedir que tais uniões sejam disjuntas dos fechos dos três tubos criados acima.

Por disjunção, podemos diminuir U e V tal que

$$(\overline{U} \cup \overline{V}) \cap (\overline{T_1} \cup \overline{T_2}) = \emptyset.$$

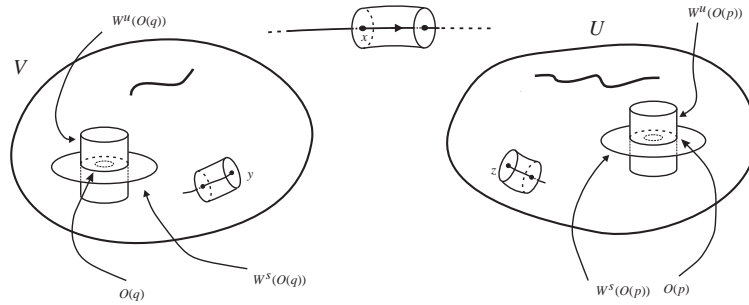


Figura 8.7:

Assim, usando a observação 3.23 existem pontos $a \in U$ e $b \in V$ tais que $\overline{O(a)} \subset U$, $\overline{O(b)} \subset V$,

$$x \in W^{ss}(a) \text{ e } x \in W^{uu}(b).$$

Além disso temos órbitas periódicas $O(p_n) \subset U$ de índice i e $O(q_n) \subset V$ de índice j tais que $p_n \rightarrow a$ e $q_n \rightarrow b$.

As cordas

Como já deve estar claro, queremos usar os pontos y e z , junto com seus tubos, para conectar $O(p)$ a $O(q)$. O outro tubo serve para conectar $O(q)$ a $O(p)$. Vamos encontrar os pedaços de órbitas (cordas) requeridos no *connecting lemma tunado*.

Como $y \in \overline{W^s(O(q))}$ então existe $q^s \in W^s_\eta(O(q))$ tal que existe

$$y^s \in O^-(q^s) \cap B(y, \delta/\rho).$$

Observe que, se o segmento de órbita que liga y^s a q^s contiver z , então a prova se simplifica⁴. Chame tal segmento de órbita de C .

Podemos assumir então que $z \notin C \cup O^+(q^s) = O^+(y^s)$. Logo $B \cap C = \emptyset$ e portanto tomando δ um pouco menor temos que o fecho do novo tubo

$$T_3 = \bigcup_{t \in [0, -T]} B(X_t(z), \delta)$$

não intersecta C .

⁴Pois então $y^s \in \overline{W^u(O(p))}$.

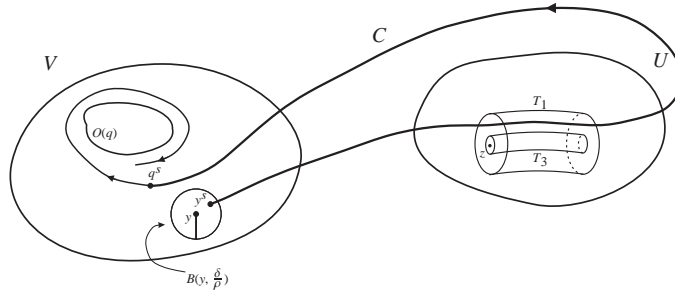


Figura 8.8:

Fazemos o mesmo no outro lado. Então encontramos $p^u \in W_\eta^u(O(p))$, e um ponto

$$z^u \in O^+(p^u) \cap B(z, \delta/\rho).$$

Finalmente, usando o fato que y e z vivem em K que é um limite fundamental temos cordas formadas por pontos w_n e tempos $s_n > 0$ tais que

$$w_n \rightarrow z \text{ e } X_{s_n}(w_n) \rightarrow y.$$

Tomando n grande, podemos supor que

$$w_n \in B(z, \delta/\rho) \text{ e } w'_n := X_{s_n}(w_n) \in B(y, \delta/\rho).$$

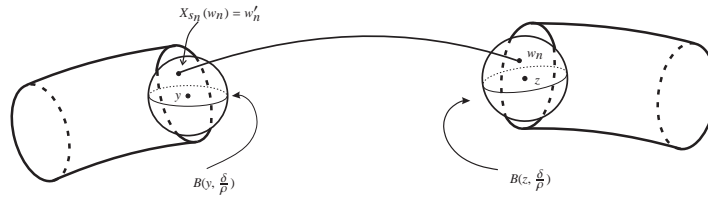


Figura 8.9:

Temos três cordas então: (p^u, z^u) ; (w_n, w'_n) e (y^s, q^s) .

A primeira conexão

Vamos usar o *connecting lemma tunado*. Então existe um campo X_1 próximo de X tal que $w'_n \in O_{X_1}^+(p^u)$. Mais ainda, este novo campo X_1 coincide com o campo inicial X fora do tubo T_3 . Portanto o segmento de órbita de y^s a q^s fica intacto.

Assim, p^u e q^s continuam fora de T_2 e tanto $O_{X_1}^+(p^u)$ e $O_{X_1}^-(q^s)$ continuam intersectando $B(y, \delta/\rho)$ em w'_n e y^s .

Assim, podemos aplicar o *connecting lemma tunado* de novo e obter um outro campo X_2 próximo de X tal que $q^s \in O_{X_2}^+(p^u)$. Além disso, as órbitas $O_X^+(q^s)$ e $O_X^-(p^u)$ continuam intactas (ainda são órbitas para X_2).

Primeira conclusão:

$$p^u \in W^u(O(p), X_2) \cap W^s(O(q), X_2).$$

Ajeitando o tubo e as cordas novamente

Primeiramente, observe que o conjunto Λ está intacto, numa boa, após a mudança de X para X_2 . Mais ainda temos $O_{X_2}(x) \cap \overline{T_2} = \emptyset$. Mas, por construção $O_{X_2}(p^u)$ acaba passando pelo interior de T_2 , assim

$$O_{X_2}(x) \cap O_{X_2}(p^u) = \emptyset.$$

Portanto,

$$D := (X_2)_{[0, T]}(x) \text{ é disjunto de } \Lambda^* := O(p) \cup O_{X_2}(p^u) \cup O(q).$$

Em particular, diminuindo δ temos que o tubo

$$T_4 = \bigcup_{t \in [0, T]} B((X_2)_t(x), \delta)$$

é disjunto de Λ^* .

Afirmamos que x faz a ponte entre $O(q)$ e $O(p)$, isto é:

$$x \in \overline{W_{X_2}^s(O(p))} \cap \overline{W_{X_2}^u(O(q))}.$$

Deixamos a prova deste detalhe para depois.

Uma vez que $x \in \overline{W_{X_2}^s(O(p))}$ temos que existem pontos p^s e b^s tais que

$$p^s \in W_{\eta, X_2}^s(O(p)) = W_{\eta, X}^s(O(p)) \text{ e } b^s \in O_{X_2}^-(p^s) \cap B(x, \delta/\rho).$$

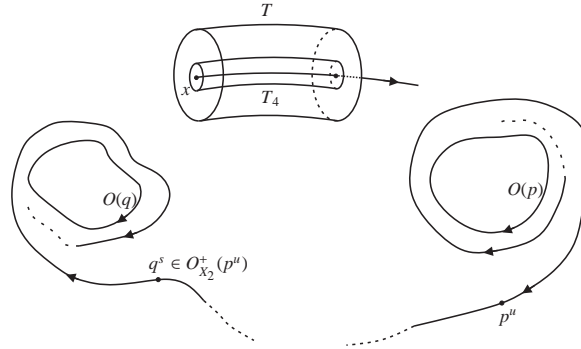


Figura 8.10:

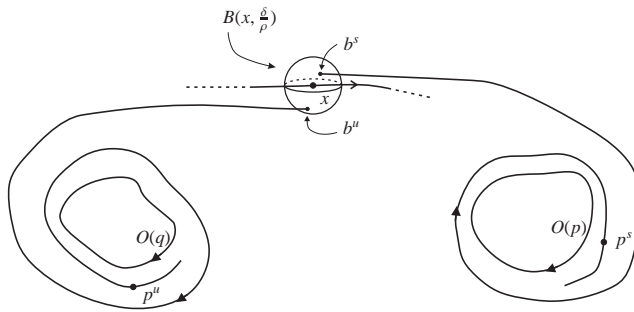


Figura 8.11:

Da mesma forma, temos a existência de pontos q^u e b^u tais que

$$q^u \in W_{\eta, X_2}^u(O(q)) = W_{\eta, X}^u(O(q)) \text{ e } b^u \in O_{X_2}^+(q^u) \cap B(x, \delta/\rho).$$

Concluimos que

$$O_{X_2}^+(p^s) \subset W_{\eta, X_2}^s(O(p)) \text{ e } O_{X_2}^-(q^u) \subset W_{\eta, X_2}^u(O(q)).$$

E obtemos duas cordas, (q^u, b^u) e (b^s, p^s) .

A segunda conexão

Novamente pelo *connecting lemma tunado*, existe um campo X_3 próximo de X , que coincide com X_2 fora do tubo T_4 . Porém, p^s pertence a $O_{X_3}^+(q^u)$.

Note que, $O_X^+(p^s)$ e $O_X^-(q^u)$ ficam intactas e temos a interseção

$$q^u \in W_{X_3}^u(O(q)) \cap W_{X_3}^s(O(p)).$$

Finalmente, observe que como o tubo T_4 é disjunto de Λ^* temos que a primeira interseção que obtivemos ainda sobrevive.

E isto gera o ciclo heterodimensional e termina a prova.

A prova da afirmação

Note que a órbita de x ficou intacta, simplesmente pois Λ não intersecta o fecho dos tubos T_2 e T_3 . O mesmo ocorre para y , p_n e $O(p_n)$. Daí:

$$\overline{O_{X_2}^+(y)} \subset U \text{ e } x \in W_{X_2}^{ss}(y).$$

Assim, existe $L > 0$ grande tal que $x \in W_{L, X_2}^{ss}(y)$. Usando a variação contínua de pedaços compactos da variedade estável, dada uma vizinhança W de x qualquer, existe um n grande tal que

$$W_{L, X_2}^{ss}(p_n) \cap W \neq \emptyset.$$

Agora, lembra que escolhemos U tão pequeno tais que duas órbitas periódicas dentro dele são homoclinicamente relacionadas. Logo

$$W_{X_2}^s(O(p)) \cap W \neq \emptyset$$

E portanto $x \in \overline{W_{X_2}^s(O(p))}$. Analogamente $x \in \overline{W_{X_2}^s(O(q))}$. Acabou. \square

8.3 Conclusão

Resumindo o que foi provado até então.

Teorema 8.9. *Se X é estrela e $\text{Sing}(X) = \emptyset$ então $\overline{\text{Per}(X)}$ é hiperbólico.*

Demonstração. Pelo teorema 4.18. Basta provar que não existem pontos resistentes. Porém cada ponto resistente gera um conjunto minimalmente não hiperbólico.

Porém conjuntos minimalmente não-hiperbólicos simples ou não-simples não existem pela propriedade estrela, ver teoremas 7.9 e 8.8. O que termina a prova. \square

Portanto, $\overline{\text{Per}(X)}$ tem uma decomposição espectral. Também temos informação sobre esta decomposição. Vamos denotá-la da seguinte forma:

$$\overline{\text{Per}(X)} = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s.$$

Teorema 8.10. *Não há ciclos entre $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s$.*

Demonstração. Do contrário, vamos supor que existem pontos $\{a_i\}_{i=1}^s$ que não são aproximados por órbitas periódicas tais que

$$\alpha(a_i) \subset \Lambda_1 \text{ e } \omega(a_i) \subset \Lambda_{i+1} \text{ onde } s + 1 \text{ é considerado como } 1.$$

Suponha que existam $1 \leq i < j \leq s$ tais que $\text{Ind}(\Lambda_i) \neq \text{Ind}(\Lambda_j)$. Pelo λ -lemma, se $l \neq i, j$ temos uma corda A_l de um ponto x_{l-1} próximo a a_{l-1} até um ponto x_l próximo a a_l . Como na prova da proposição 3.28.

Assim, como na prova da não existência de ciclos heterodimensionais (teorema 8.2), por perturbação, criamos um 2-ciclo entre Λ_i e Λ_j .

Porém, cada Λ_i é acumulado por órbitas periódicas e portanto isto implicaria a existência de um ciclo heteroclínico entre duas órbitas periódicas $O(p) \subset \Lambda_i$ e $O(q) \subset \Lambda_j$. Opa! Mas então como os índices são diferentes, isto seria um ciclo heterodimensional. Absurdo.

Assim, podemos supor que os índices são todos iguais, digamos k . E pelos argumentos usados nos capítulos anteriores, obtemos uma r -decomposição dominada $E \oplus F$ sobre o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^s (\Lambda_i \cup O(a_i)).$$

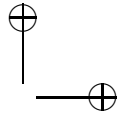
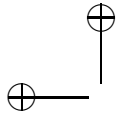
Agora, (ver seção 2.3 para definição de D^s e D^u)

$$\dim(D^s(a_i)) = k \text{ e } \dim(D^u(a_i)) = d - k - 1.$$

Pelo exercício 4.17 temos que

$$D^s(a_i) = E(a_i) \text{ e } D^u(a_i) = F(a_i).$$

Opa! Mas então o ciclo inteiro seria transversal e portanto os pontos a_i seriam acumulados por órbitas periódicas. Absurdo. \square



Capítulo 9

Hiperbolicidade II

Neste capítulo iremos mostrar um dos resultados principais do livro:

Teorema 9.1 (Gan-Wen). *Se X é estrela e não tem singularidades então X é Axioma A sem ciclos.*

De fato, quase tudo já foi feito, basta “chutar pra gol”. Vejamos, pela não existência de pontos resistentes, obtivemos a hiperbolicidade de $\overline{\text{Per}(X)}$. Pra variar, basta provar que este conjunto coincide com o conjunto não-errante. De fato, iremos mostrar que ele coincide com o conjunto pré-periódico que como já sabemos contém o conjunto não-errante.

9.1 Localizando o Conjunto Pré-periódico

O objetivo desta seção é mostrar o seguinte resultado:

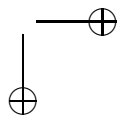
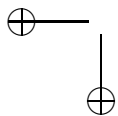
Teorema 9.2. *Se X é estrela e $\text{Per}^*(X)$ não tem singularidades então ele coincide com $\overline{\text{Per}(X)}$.*

Demonstração. Já sabemos que $\text{Per}(X) \subset \text{Per}^*(X)$, logo $\overline{\text{Per}(X)}$ não tem singularidades e como visto no teorema 8.9, este é um conjunto hiperbólico.

Assim, temos uma decomposição espectral

$$\overline{\text{Per}(X)} = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s.$$

E pelo teorema 8.10 temos que esta decomposição espectral não tem ciclos.



Por definição, $\text{Per}^*(X)$ é a união dos limites fundamentais de X . Assim o número natural positivo

$$k = \min\{i; \text{ existe um limite fundamental } \Gamma \text{ com } \Gamma - \overline{\text{Per}(X)} \neq \emptyset \text{ tal que } \Gamma \text{ intersecta exatamente } i \text{ peças básicas da decomposição de } \overline{\text{Per}(X)}\}.$$

é bem definido.

Seja Γ que realiza k . Como Γ vive no conjunto pré-periódico então ele não possui singularidades, por hipótese. Note que independentemente da hiperbolicidade de Γ , ele sempre intersecta $\overline{\text{Per}(X)}$. Assim, vamos supor que Γ intersecta apenas as peças $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$, e que

$$\text{Ind}(\Lambda_1) = m = \min\{\text{Ind}(\Lambda_1), \dots, \text{Ind}(\Lambda_k)\},$$

a menos de reordenação.

Note que Λ_1 não pode ser um poço, nem uma fonte, pois senão $\Gamma = \Lambda_1$, porém estamos supondo que $\Gamma - \overline{\text{Per}(X)} \neq \emptyset$. Em particular, temos que $m \neq 0$ ou $d - 1$.

Lema 9.3. Para cada $1 \leq i \leq k$ existe um ponto $a_i \in W^s(\Lambda_i) \cap \Gamma - \overline{\text{Per}(X)}$.

Vamos deixar a prova deste lema para depois. Observe que se $\alpha(a_1) \subset \Lambda_{i_2}$ para algum $1 \leq i_2 \leq k$, $\alpha(a_{i_2}) \subset \Lambda_{i_3}$ para algum $1 \leq i_3 \leq k$ e assim por diante para a_{i_3} e etc, e o tal processo não pare, então existiria um ciclo dentre os Λ_i 's, o que sabemos que não é verdade. Assim existe $l \geq 0$ tal que

$$\alpha(a_{i_l}) \text{ não está contido em nenhum } \Lambda_i \text{ com } 1 \leq i \leq k.$$

Lema 9.4. $\text{Ind}(\Lambda_{i_l}) = m$ e para todo $1 \leq i \leq k$ temos que $\alpha(a_{i_l}) \cap \Lambda_i \neq \emptyset$.

Prova do lema 9.4. Observe que $\alpha(a_{i_l})$ não está contido em nenhuma peça básica Λ_i para qualquer $1 \leq i \leq k$. Assim, podemos encontrar $b \in \alpha(a_{i_l}) - \overline{\text{Per}(X)}$.

Aplicando o *closing lemma* no α -limite, podemos supor que existe uma sequência de órbitas periódicas $O_{Y_n}(q_n) \in \text{Per}(Y_n)$ onde $Y_n \rightarrow X$. Mais ainda, podemos supor que estas órbitas convergem na topologia de Hausdorff para um certo conjunto C e que $b \in C \subset \alpha(a_{i_l})$.

Suponha por absurdo que existe $1 \leq j \leq k$ tal que $\alpha(a_{i_l}) \cap \Lambda_j = \emptyset$. Então temos que Λ_j não intersecta C . Mas $C \subset \alpha(a_{i_l}) \subset \Gamma$, assim C intersectaria

menos que k peças básicas de $\overline{\text{Per}(X)}$. E isto contradiz a minimalidade k . Isto demonstra a segunda afirmação do lema.

Vamos supor agora que o índice de Λ_{i_i} não é m . Pelo que mostramos, temos por exemplo, que $\alpha(a_{i_i}) \cap \Lambda_1 \neq \emptyset$. Assim, podemos tomar $c \in \alpha(a_{i_i}) \cap W^u(\Lambda_1) - \overline{\text{Per}(X)}$.

Repetindo o argumento para todas as peças, e usando o *connecting lemma*, obteríamos um ciclo entre algumas peças de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$. Como $\text{Ind}(\Lambda_1) = m \neq \text{Ind}(\Lambda_{i_i})$, usando a mesma prova do teorema 8.8 obteríamos um ciclo heterodimensional, o que é proibido. Isto termina a prova do lema. \square

Como consequência do lema, temos que existe uma m -decomposição dominada $E \oplus F$ sobre o conjunto

$$\Delta := \Lambda_{i_i} \cup \overline{O(a_{i_i})}.$$

De fato, como Γ é um limite fundamental e $a_{i_i} \in \Gamma$, então pelo *connecting lemma* temos que as órbitas periódicas que aproximam a_{i_i} tem que ter índice m , uma vez que elas passam perto de Λ_{i_i} (lembre que $a_{i_i} \in W^s(\Lambda_{i_i})$). Ou seja, $a_{i_i} \in \text{Per}_m^*(X)$.

Mas Λ_{i_i} tem índice m e é uma peça básica, logo $\Delta \subset \text{Per}_m^*(X)$. Agora basta usar o corolário 4.15 do capítulo 4.

Mais ainda, temos que o fibrado E é contrator, do contrário pelo argumento de redução de índice (teorema 5.8), a menos de perturbação poderíamos obter órbitas periódicas com índice menor que m próximas a Δ . Mas isto contradiz a minimalidade dada pela definição de m .

Unindo esta informação ao fato de Λ_{i_i} ser hiperbólica, temos que existe $T > \tilde{T} > 0$ e $0 < \eta \leq \tilde{\eta}$, onde \tilde{T} e $\tilde{\eta}$ são dados pelo teorema 4.16 tal que se $x \in \Lambda_{i_i}, y \in \Delta$ e $t \geq T$ então

$$\log m(P_X^t(x)|_F) > \eta \text{ e } \log \|P_X^t(y)|_E\| < -\eta.$$

Assim, tomando U uma pequena vizinhança de Λ_{i_i} temos que todo $x \in \overline{O(a_{i_i})} \cap U$ tem boa expansão isto é, $\log m(P_X^t(x)|_F) > \eta$. Mais ainda, $O^+(a_{i_i})$ e $O^-(b)$ (b construído como na prova do lema 9.4) estão contidos em U .

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ fixe $T', T'' > 0$ grandes tais que

$$d(X_{-T'}(a_{i_i}), b) < \varepsilon$$

e $X_{[-T', T'']}(a_{i_i})$ é uma $(m, T, \eta/2)$ -corda não hiperbólica como no lema A.16. Agora usamos o lema A.16 (que é um tipo de *shadowing lemma*) na pseudo-órbita

$$X_{(-\infty, 0)}(b) \cup X_{[-T', T'']}(a_{i_i}) \cup X_{[T'', \infty)}(a_{i_i}),$$

e obtemos uma sombra c .

Mas então, c é um ponto homoclínico transversal de Λ_{i_i} , cada vez mais próximo de a_{i_i} quanto ε estiver de 0. Mas então, tanto c e conseqüentemente a_{i_i} são aproximados por órbitas periódicas. Absurdo. \square

De fato, isto mostra que o conjunto pré-periódico é hiperbólico. Para ressaltar a importância do conjunto pré-periódico, observamos que dessa hiperbolicidade é possível mostrar que o campo é Axioma A, por métodos diretos. Mas, no nosso caso, já temos a informação necessária pra concluir isto diretamente, isto é, que $\overline{\text{Per}}(X)$ é hiperbólico. Mesmo assim, deixamos os seguinte exercício para o leitor.

Exercício 9.5. *Se X é um campo tal que $\text{Per}^*(X)$ é hiperbólico então X é Axioma A.*

Note também que no exercício anterior, *a priori* não se faz menção a propriedade estrela, nem ao fato de X ter singularidades ou não!

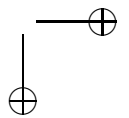
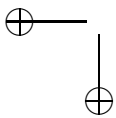
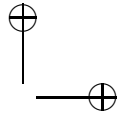
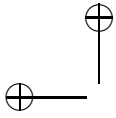
Vamos então mostrar o lema 9.3.

Prova do lema 9.3. Como Γ é um limite fundamental, temos $O_{X_n}(p_n) \rightarrow \Gamma$ na topologia de Hausdorff, onde $p_n \in \text{Per}(X_n)$ e $X_n \rightarrow X$. Lembre que também existe $x \in \Gamma - \overline{\text{Per}}(X)$. Pois bem, então podemos supor que $p_n \rightarrow x$.

Por outro lado, como Λ_i intersecta Γ também temos uma seqüência de pontos $q_n \in O_{X_n}(p_n)$ tais que $q_n \rightarrow y$ para algum $y \in \Lambda_i$.

Recorde que Λ_i é uma peça básica, assim existe uma vizinhança U de Λ_i tal que se a órbita futura de um ponto, digamos z , estiver inteiramente contida em U então temos que $z \in W^s(\Lambda_i)$. Como x não é aproximado por órbitas periódicas de X , podemos supor então que $x \notin U$ (pois as peças básicas possuem órbitas periódicas densas). Por isolamento podemos supor também que $U \cap \overline{\text{Per}}(X) = \Lambda_i$.

Fixado y_n seja $I_n = [t_n, s_n]$ o intervalo maximal que contém 0 tal que $(X_n)_t(y_n) \in U$ para todo $t \in I_n$. Denote $z_n = (X_n)(t_n)(y_n)$ e $\tau_n = s_n - t_n$. Obviamente, $z_n \in O_{X_n}(p_n)$.



Como $x \notin U$, também podemos supor que $p_n \notin U$ e portanto, pelo teorema da alfândega e maximalidade de I_n temos que $z_n \in \partial U$. Em particular a corda $(X_n)_{[0, \tau_n]}(z_n)$ está inteiramente contida em U .

Por compacidade, podemos supor que $z_n \rightarrow a_i$ e portanto $a_i \in \partial U \cap \Gamma$.

Mais ainda, temos que $\tau_n \rightarrow \infty$. Do contrário, poderíamos supor que $\tau_n \rightarrow \tau$ e como $0 \in I_n$, poderíamos supor também que $s_n \rightarrow s$ e $t_n \rightarrow t$. Mas então temos que $y_n = (X_n)_{-t_n}(z_n) \rightarrow X_{-t}(a_i)$, e isto diria que $y = X_{-t}(a_i)$ e por invariância, que $a_i \in \Lambda_i$. Mas isto é impossível, uma vez que $a_i \in \partial U$.

Usando um argumento análogo ao do parágrafo anterior, temos que a órbita positiva de a_i está contida em U e como já observamos antes, isto implica que $a_i \in W^s(\Lambda_i)$. O lema está demonstrado pois:

$$a_i \in W^s(\Lambda_i) \cap \Gamma \cap \partial U \subset W^s(\Lambda_i) \cap \Lambda - \overline{\text{Per}(X)}.$$

□

9.2 Prova do Teorema 9.1

Pelo teorema 8.9, temos que $\overline{\text{Per}(X)}$ é hiperbólico, uma vez que por hipótese o campo não tem singularidades.

Além disso pelo teorema 9.2, da seção anterior, temos que $\overline{\text{Per}(X)} = \text{Per}^*(X)$. Mas como temos a inclusão

$$\overline{\text{Per}(X)} \subset \Omega(X) \subset \text{Per}^*(X).$$

Temos que $\overline{\text{Per}(X)} = \Omega(X)$ e isto mostra que o campo é Axioma A.

9.3 O Caso Incompressível

Nesta seção vamos mostrar brevemente o que ocorre quando nos restringimos ao espaço de campos com divergência nula. Maiores detalhes podem ser encontrados em [6] (veja também [15] e [26]).

Teorema 9.6. *Se X é incompressivelmente estrela então X é Anosov.*

Vamos apresentar o caso $\dim(M) \geq 4$ (o caso tridimensional foi demonstrado em [15]). Denote por $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}_m^1(M)$ uma vizinhança de X onde todos os campos ali são estrela.

Uma das grandes dificuldades é impedir a presença de singularidades. Para este fim, procedemos da seguinte maneira, demonstrando um análogo ao teorema 4.12 no caso de matrizes com determinante igual a 1, podemos obter uma decomposição dominada no conjunto $\text{Per}(X)$ (veja [6]).

De fato, isto requer o lema de Franks no caso incompressível. Alertamos o leitor que isto é um pouco sutil. Ele exige que o campo seja suficientemente diferenciável (C^4). Mas isto não é problema, recorrendo ao seguinte resultado de densidade devido a Zuppa [78] (veja também [7] para outra prova).

Teorema 9.7. *O conjunto de campos C^∞ com divergência nula é denso em $\mathfrak{X}_m^1(M)$.*

Com isto é possível estender o lema de Franks no contexto de fluxos incompressíveis. De fato, a versão que lineariza o campo próximo a um elemento crítico é conhecido como o *pasting lemma*, devido ao primeiro autor e Carlos Matheus, em [7]. Para a versão perturbativa do lema de Franks, o leitor pode consultar o lema 3.2 de [14] para uma prova usando o *pasting lemma*.

Agora, pela versão para fluxos incompressíveis do teorema de densidade geral de Pugh, temos que $M = \overline{\text{Per}(Y)}$, para todo Y contido em um subconjunto residual \mathcal{R} de \mathcal{U} . Assim, para todo Y neste residual temos uma decomposição dominada em $M - \text{Sing}(Y)$. Por robustez da decomposição (veja lema 2.29 em [5]), temos uma decomposição dominada em $M - \text{Sing}(Z)$ para todo $Z \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ é um subconjunto aberto e denso (lembre que existem apenas finitas singularidades, por hiperbolicidade).

Vamos supor, por absurdo, que X possui alguma singularidade. Podemos supor também que $X \in \mathcal{V}$. Perturbando, via o lema de Franks (ou o *pasting lemma*) pra fluxos incompressíveis, obtemos um campo cuja singularidade é linear, ou seja, o campo próximo a singularidade é linear em certas cartas locais. Mas isto é uma contradição com a dominação, usando um resultado devido a Vivier (proposição 4.1 de [73]).

O seguinte *pseudo connecting lemma* de Bonatti-Crovisier [17] será útil nos próximos argumentos (veja também [13]). De fato, iremos enunciar um corolário do *pseudo connecting lemma*.

Teorema 9.8. *Se $\dim(M) \geq 4$ então existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathfrak{X}_m^1(M)$ tal que se $Y \in \mathcal{R}$ então Y é transitivo.*

Este resultado irá controlar os índices das órbitas periódicas de campos próximos a X .

Lema 9.9. *Existe $1 \leq i \leq d - 2$ tal que toda órbita periódica de um campo suficientemente próximo de X tem índice i .*

Demonstração. A menos de uma perturbação, pelo teorema 9.8, podemos supor que o campo é transitivo, pelo *connecting lemma*¹ podemos obter uma interseção transversal entre as variedades invariantes das órbitas periódicas.

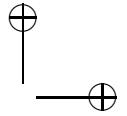
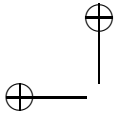
Por transversalidade, podemos perturbar o campo de novo, sem destruir a interseção, e obter um novo campo transitivo. Pelo *connecting lemma* poderíamos conectar as outras variedades invariantes das órbitas periódicas criando um ciclo heterodimensional.

Mostra-se então que não existem ciclos heterodimensionais, procedendo de forma semelhante ao que foi feito no capítulo 8. O que gera um absurdo. \square

Temos então a existência de $i \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\text{Per}(Y)} = \text{Per}_i(Y)$ para todo $Y \in \mathcal{U}$. Mostra-se então a hiperbolicidade de $\overline{\text{Per}(X)}$ usando o argumento de redução de índice. De fato, o *ergodic closing lemma* também vale no contexto incompressível, veja [10], o que permite refazer os passos do capítulo 5.

Finalmente, usa-se um argumento perturbativo para mostrar que $M = \overline{\text{Per}(X)}$ e isto implica que o campo X é Anosov.

¹Que também vale no caso incompressível, veja [76]



Capítulo 10

Avanços no Caso Singular

Neste capítulo tecemos alguns comentários sobre fluxos estrela *com* singularidades.

10.1 Contra Exemplos

Já sabemos que um fluxo estrela sem singularidades é Axioma A sem ciclos. O que se pode dizer dos fluxos estrela *com* singularidades?. Nesta seção mostraremos diversos exemplos sobre esta questão.

Existência de Ciclos

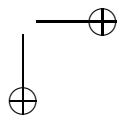
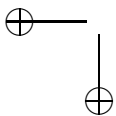
Descrevemos um exemplo de um fluxo estrela que é Axioma A *com* ciclos.

A figura 10.1 mostra o exemplo. A variedade ambiente tem dimensão 3 e o campo tem as propriedades do tipo Morse-Smale longe da parte apresentada na figura.

Temos três singularidades σ_1, σ_2 e σ_3 , todas com índice 2. Temos também três singularidades que são poços p_1, p_2 e p_3 .

O ciclo é formado de maneira que a variedade instável de uma singularidade “entra” na variedade estável da próxima, conforme a figura.

A única parte a ser notada é a “torção” gerada na variedade instável de σ_1 , como na figura. Esta torção, junto com os poços p_i é usada para mostrar que o ciclo inteiro é errante. Como na análise do exemplo de Palis em [55].



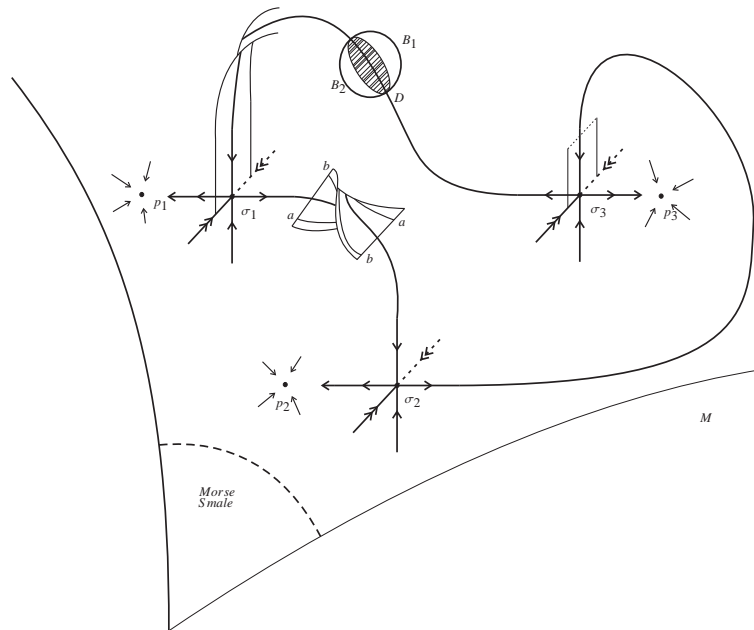


Figura 10.1:

Por exemplo, note o que acontece com a evolução da bola B no desenho. Ela se divide em três partes, uma delas morre na singularidade σ_1 (pois está contida na variedade estável). A outra parte B_1 morre no poço p_1 . Finalmente, a parte B_2 segue a variedade instável de σ_1 pelo λ -lema e devido a torção acaba morrendo em p_2 . O que mostra que não há recorrência em B . Uma análise semelhante pode ser feita nas outras conexões.

Assim este exemplo é Axioma A e tem ciclos.

Para ver que o exemplo é estrela basta pedir que as singularidades sejam do tipo Lorenz¹. Assim, o invariante maximal que contém o ciclo é seccional hiperbólico (veja a próxima seção) e como estamos em dimensão 3 isto implica a propriedade estrela dentro do invariante maximal, veja [52].

¹Isto é, a singularidade possui autovalores reais λ_1, λ_2 e λ_3 tais que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < -\lambda_2 < \lambda_3$

Finalmente, como fora do aberto que contém o ciclo, a dinâmica é do tipo Morse-Smale, temos também a propriedade estrela.

O exemplo pode ser feito em dimensão mais alta, adicionando direções contratoras fortes. Em dimensão dois, veja o exemplo de Li e Wen [36].

Prevenção de Recorrência

Podemos modificar o argumento do exemplo anterior para obter um exemplo de um fluxo estrela onde $\Omega(X) \neq \overline{\text{Per}(X)}$.

Novamente o exemplo é pictórico (figura 10.2), mas pode ser encontrado com detalhes em [12] e [35]. Como antes, longe da figura a dinâmica é do tipo Morse-Smale em uma variedade de dimensão 3.

Desta vez temos uma singularidade σ_1 com índice 2, uma órbita periódica $O(q)$ do tipo sela e duas singularidades do tipo poço p_1 e p_2 . Novamente, temos uma “torção” na variedade instável de σ_1 . Note também que a variedade instável de σ_1 entra na estável da órbita periódica e vice-versa.

Iremos mostrar que o fecho dos pontos recorrentes não coincide com o conjunto não-errante. Em particular $\Omega(X) \neq \overline{\text{Per}(X)}$.

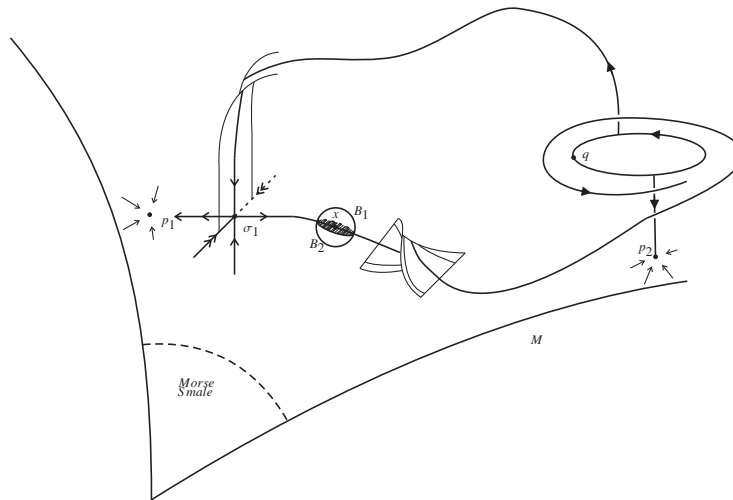


Figura 10.2:

Considere o ponto x na figura e uma bola B qualquer centrada nele. Novamente a bola se divide em 3 partes. Uma delas, que vive na variedade estável da órbita periódica morre nela. A parte de cima B_1 , após a torção vai pra baixo e acaba morrendo no poço p_2 .

Já a parte de baixo, após a torção vai pra cima e pelo λ -lema se divide novamente em duas partes. Uma delas morre em p_1 e a outra acaba retornando e intersectando a parte de cima da bola B . Em particular isto mostra que o ponto x é não-errante.

Porém, ao continuar a evolução da parte de baixo (que agora retornou na parte cima), observamos que ela sofre a torção de novo e acaba indo pra parte de baixo e consequentemente morre no poço p_2 . Ou seja, não há recorrência na bola B .

Argumentando como no exemplo anterior (tornando a singularidade do tipo Lorenz, etc.) vemos que este campo é estrela.

Perda de Hiperbolicidade

Finalmente vamos apresentar o mais famoso exemplo de um fluxo estrela que não é Axioma A. O exemplo é o *atrator de Lorenz*. Só vamos fazer umas modificações para apresentar o exemplo em uma variedade compacta sem bordo. O exemplo apresentado aparece em [50]

Primeiramente apresentamos o atrator geométrico de Lorenz, que é o invariante maximal do campo em um bitoro sólido. Veja a figura 10.3.

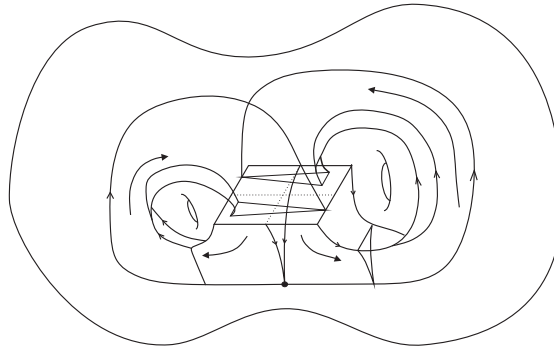


Figura 10.3: Atrator de Lorenz

Agora, considere a esfera S^3 como a compactificação do espaço euclidiano, isto é, $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Tome um bitoro T em \mathbb{R}^3 porém que não tenha a forma de um nó não-trivial, veja as figuras 10.4 e 10.5.

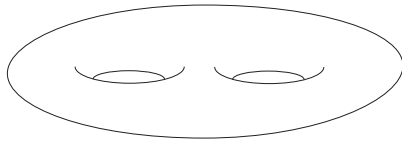


Figura 10.4: Nó trivial

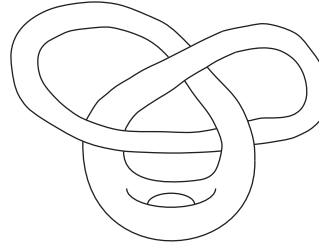


Figura 10.5: Nó não-trivial

Assim o complementar deste bitoro em S^3 tem duas componentes conexas, cada uma homeomorfa a um bitoro sólido. Assim, podemos tomar um atrator do tipo Lorenz dentro de um destes bitoros sólidos e o fluxo inverso dentro do outro, isto é, colocamos um repulsor do tipo Lorenz no outro.

Agora observe que um domínio fundamental para o atrator de Lorenz tem o formato de um bitoro sólido (e não tem forma de nó não-trivial!) e o mesmo ocorre para o repulsor. Assim podemos colar os dois bitoros sólidos ao longo do bitoro T obtendo um fluxo em S^3 . Obviamente este exemplo não é Axioma A uma vez que possui duas singularidades acumuladas por órbitas periódicas.

Porém, note também que este campo não é aproximado por campos com poços ou fontes, novamente devido a hiperbolicidade seccional do atrator de Lorenz. Em particular, como em [52], este fluxo é estrela. Note também que $\Omega(X) = \text{Per}(X)$ neste exemplo.

10.2 Separação no Caso Singular e Hiperbolicidade Seccional

De certa forma, dos exemplos dados na seção anterior, o mais expressivo é o atrator geométrico de Lorenz. O motivo é que tal dinâmica é robusta, porém não é Axioma A, exatamente pela presença não trivial de singularidades.

Motivados por este exemplo, diversos matemáticos começaram a tentar

estender a teoria hiperbólica para fluxos com singularidades, como por exemplo Morales, Pacífico, Pujals, Shilnikov, Turaev entre outros, veja [51], [52] e [67].

O fruto de tais esforços foi a noção de hiperbolicidade seccional². A observação chave foi a de não tentar separar a direção do campo de pelo menos uma das outras direções. A seguir daremos a definição precisa da hiperbolicidade seccional.

Lembre que a *co-norma* de A é dada por $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Seja Λ um conjunto invariante de um campo X com uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$. Dizemos que esta decomposição é *dominada* para X se existem constantes $K, \lambda > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ temos

$$\frac{\|DX_t|_{E_x}\|}{m(\|DX_t|_{F_x}\|)} \leq Ke^{-\lambda t}.$$

É um exercício simples mostrar que se Λ admite uma decomposição dominada então $\overline{\Lambda} - \text{Sing}(X)$ também admite.

Mais ainda, se Λ é um compacto invariante com uma decomposição dominada $E \oplus F$, diremos que esta decomposição é *parcialmente hiperbólica* se o fibrado E for contrator, isto é, para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ temos

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ke^{-\lambda t}.$$

Além disso, diremos que o fibrado F é *seccionalmente expansor* se para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ temos que $\dim F_x \geq 2$ e para qualquer subespaço bidimensional $L \subset F_x$ o seguinte ocorre:

$$|\det(DX_t|_L)| \geq K^{-1}e^{\lambda t}.$$

Definição 10.1. *Um conjunto compacto invariante Λ é seccionalmente hiperbólico se todas suas singularidades são hiperbólicas e existe uma decomposição parcialmente hiperbólica $E \oplus F$ sobre Λ tal que F é seccionalmente expansor.*³

Dizemos também que um fluxo é *seccional Anosov* se seu invariante maximal é seccional hiperbólico. Como visto na seção anterior, um bitoro

²Previamente foi introduzido também a noção de hiperbolicidade singular, ambas coincidem em dimensão 3, mais informações em [5].

³De fato, a hipótese de dominação pode ser substituída por uma condição no espectro das singularidades, veja [4].

sólido suporta um fluxo seccional Anosov, a saber, o atrator geométrico de Lorenz. Um problema interessante é listar as variedades que suportam fluxos seccionais Anosov.

Nesta direção, Morales em [53], mostra a existência de fluxos seccionais Anosov em qualquer *handlebody* orientável tri-dimensional, tais variedades são homeomorfas ao n -toro sólido. Em [69], a terceira autora estendeu este resultado para *punctured 3-handlebodies*, maiores detalhes nos artigos [53] e [69].

Um candidato natural para substituir a hiperbolicidade é:

Definição 10.2. *Um campo X é dito seccionalmente Axioma A se o conjunto não-errante admite uma decomposição espectral, isto é, pode ser escrito como uma união finita e disjunta:*

$$\Omega(X) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k,$$

onde cada Λ_i é compacto, invariante, transitivo, com órbitas densas e hiperbólico ou seccionalmente hiperbólico para X ou $-X$.

Note que todo campo Axioma A é seccionalmente Axioma A. O atrator de Lorenz mostra que a recíproca não é verdadeira.

Diversas considerações sobre os exemplos acima, trabalhos sobre transitividade robusta e um resultado devido a Morales e Pacífico [50] levaram o primeiro autor a conjecturar o seguinte:

Conjectura 10.3. *Fluxos estrela C^1 -genéricos são seccionalmente Axioma A.*

De fato, o resultado de Morales-Pacífico mostra que a conjectura é verdadeira em 3-variedades.

10.3 Codimensão 1

Nesta seção descrevemos brevemente uma resposta parcial da conjectura 10.3, dada pelo primeiro autor e C. Morales [9].

Primeiramente, temos o seguinte resultado.

Teorema 10.4 (A.-Morales). *Seja X estrela C^1 -genérico tal que toda singularidade aproximada por órbitas periódicas está contida em um atrator seccionalmente hiperbólico para X ou $-X$. Então X é seccionalmente Axioma A.*

A idéia da prova é a seguinte, pelo teorema de densidade geral de Pugh [61] temos que $\overline{\text{Per}(X) \cup \text{Sing}(X)} = \Omega(X)$. Por simplicidade, vamos supor que todas as singularidades são acumuladas por órbitas periódicas.

Tome então uma singularidade σ . Por hipótese, ela está contida em um conjunto seccionalmente hiperbólico $\Lambda(\sigma)$ para X ou $-X$. É possível mostrar que o seguinte conjunto

$$H = \Omega(X) - \left(\bigcup_{\sigma \in \text{Sing}(X)} \Lambda(\sigma) \right),$$

é compacto.

Ora, mas então $H \subset \overline{\text{Per}(X)}$ é fechado sem singularidades. Pelo teorema 5.4 ele é hiperbólico, uma vez que X é estrela. Usando o fato que todos os conjuntos $\Lambda(\sigma)$ são atratores ou repulsores, podemos mostrar que as órbitas periódicas em H são densas em H e o teorema de decomposição espectral nos diz que H se decompõe como um número finito de peças básicas H_i , com $i = 1, \dots, k$. Portanto o teorema está demonstrado pois temos a seguinte decomposição espectral seccionalmente hiperbólica para X :

$$\Omega(X) = H_1 \cup \dots \cup H_k \cup \left(\bigcup_{\sigma \in \text{Sing}(X)} \Lambda(\sigma) \right).$$

A pergunta natural então é, como garantir que as singularidades vivem num atrator seccionalmente hiperbólico para X ou $-X$?

Dizemos que uma singularidade σ de X tem *codimensão 1* se, ou $\dim W^s(\sigma) = 1$ ou $\dim W^u(\sigma) = 1$. Lembre que um campo X é separado se para todo $i \neq j$ temos $\overline{\text{Per}_i(X)} \cap \overline{\text{Per}_j(X)} = \emptyset$ (capítulo 5).

Teorema 10.5 (A.-Morales). *Um campo X C^1 -genérico separado, cujas singularidades aproximadas por órbitas periódicas tem codimensão 1, é seccionalmente Axioma A.*

A seguir apresentamos um breve roteiro da prova, uma vez que possui resultados que podem ser interessantes por si só.

Primeiramente, mostra-se, via o Lema de Franks, que para um campo genérico, a propriedade de separação implica na propriedade estrela.

Se a singularidade σ tem variedade instável unidimensional então é fácil ver que $W^u(\sigma) - \{\sigma\}$ tem duas componentes conexas, que iremos chamar de ramos instáveis de σ .

Um conjunto Λ é *Lyapunov estável* para X se, para toda vizinhança U existe uma vizinhança V tal que para todo $x \in V$ e $t \geq 0$ temos que $X_t(x) \in U$.

A importância dos conjuntos Lyapunov estáveis é que eles contêm a classe dos conjuntos atratores. Um conjunto Λ compacto e invariante é dito um *atrator* se ele é transitivo e existe uma vizinhança U positivamente invariante tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Por outro lado, é fácil encontrar exemplos de conjuntos que são Lyapunov estáveis mas não são atratores.

Um passo essencial na prova do teorema 10.5 é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 10.6. *Seja Λ um conjunto Lyapunov estável e seccionalmente hiperbólico. Suponha que todas as singularidades σ pertencentes a Λ satisfazem $\dim W^u(\sigma) = 1$ e tem ramos instáveis densos. Então Λ é um atrator.*

De fato, acreditamos que a condição sobre as singularidades seja supérflua.

Problema 10.7. *Todo conjunto transitivo, seccionalmente hiperbólico e Lyapunov estável é um atrator?*

Exercício 10.8. *Prove que a resposta do problema acima é verdadeira se pedirmos que o conjunto seja hiperbólico.*

Outro ponto chave é obter uma condição suficiente para garantir hiperbolicidade seccional.

Lembre que se p é um elemento crítico hiperbólico então seu índice é definido como a dimensão do espaço estável associado. Dizemos que um conjunto Λ compacto e invariante para X é *fortemente homogêneo* de índice $I(\Lambda)$, se existe uma vizinhança \mathcal{U} de X e uma vizinhança U de Λ tal que toda órbita periódica de um campo $Y \in \mathcal{U}$ contida em U tem índice $I(\Lambda)$. O seguinte critério é uma extensão de [31] dada por [9].

Teorema 10.9. *Seja Λ um conjunto transitivo, cujas singularidades são hiperbólicas e não-trivial. Suponha que Λ é fortemente homogêneo e que o índice de toda singularidade σ de X em Λ é estritamente maior que $I(\Lambda)$. Então Λ é seccionalmente hiperbólico.*

Usando este critério e uma análise sobre possíveis bifurcações obtêm-se o seguinte resultado.

Teorema 10.10. *Seja X um campo em uma variedade fechada de dimensão d . Seja Λ um conjunto transitivo cujas singularidades tem codimensão 1. Se Λ é fortemente homogêneo com índice $1 \leq I(\Lambda) \leq d - 2$ então Λ é seccionalmente hiperbólico.*

Com a ajuda destes critérios podemos argumentar da seguinte maneira. Seja σ uma singularidade tal que $\dim(W^u(\sigma)) = 1$. É possível mostrar [20] que $\overline{W^u(\sigma)}$ é Lyapunov estável. Se σ é acumulado por órbitas periódicas, como o campo é genérico, temos também que $\overline{W^u(\sigma)}$ é transitivo. Caso contrário, diremos que a singularidade σ é trivial (isto é se não é acumulada por órbitas periódicas).

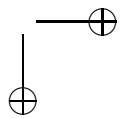
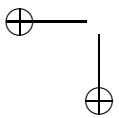
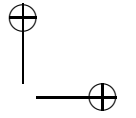
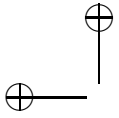
Usando densidade geral de Pugh, temos a seguinte decomposição.

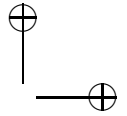
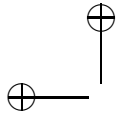
$$\Omega(X) = \left(\bigcup_{i=0}^{d-1} \overline{\text{Per}_i(X)} \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \text{ trivial}} \{\sigma\} \right).$$

Pela hipótese de separação, esta união é disjunta. Assim, por conexidade, se σ não é trivial temos que existe i tal que $\overline{W^u(\sigma)} \subset \overline{\text{Per}_i(X)}$. Isto mostra que $\overline{W^u(\sigma)}$ é fortemente homogêneo.

Mais ainda, pelo teorema de Pliss, sabemos que existem finitos poços e fontes, assim podemos supor que o índice de $\overline{W^u(\sigma)}$ está entre 1 e $d - 2$. Logo, usando o teorema 10.9, temos que $\overline{W^u(\sigma)}$ é seccionalmente hiperbólico e portanto, pelo teorema 10.6, ele é um atrator.

Um resultado análogo vale para as singularidades não-triviais tais que $\dim W^s(\sigma) = 1$. E agora, basta usar o teorema 10.4, para concluir que o campo é seccionalmente Axioma A.





Apêndice A

Dinâmica Hiperbólica e Sombreamento

Neste apêndice, coletamos alguns resultados clássicos da teoria hiperbólica e alguns resultados sobre sombreamento.

Dinâmica Hiperbólica

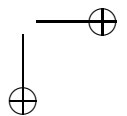
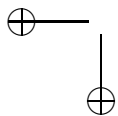
A dinâmica local próxima a um elemento crítico hiperbólico é linear:

Teorema A.1 (Hartman-Grobman para singularidades). *Seja p uma singularidade hiperbólica de um campo X . Seja $Y = DX(p)$ campo linear em T_pM . Então existe uma vizinhança U de p em M , uma vizinhança V de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que conjuga $X|_U$ a $Y|_V$.*

A seguir enunciaremos o Teorema de Hartman-Grobman para órbitas periódicas, mas antes disso precisamos de algumas definições.

Seja $O(p)$ uma órbita periódica hiperbólica de X de período π . Note que os espaços estável e instável E_p^s e E_p^u do mapa de Poincaré são DX_π -invariantes. Mais ainda, podemos definir uma decomposição ao longo de toda órbita via $E_q^\sigma = DX_t(p)(E_p^\sigma)$ se $X_t(p) = q$ para $\sigma = s, u$. Isto gera o fibrado

$$\mathcal{N} = \{(q, v) : q \in O(p) \text{ e } v \in E_q^s \oplus E_q^u\}.$$



E existe um fluxo Ψ_t em \mathcal{N} que é linear nas fibras $E_q^s \oplus E_q^u$ dado por:

$$\Psi_t(q, v) = (X_t(q), DX_t(q)v).$$

Teorema A.2 (Hartman-Grobman para órbitas periódicas). *Seja $O(p)$ uma órbita periódica hiperbólica para um campo X . Então o fluxo X_t é conjugado em uma vizinhança de $O(p)$ em M ao fluxo Ψ_t numa vizinhança de $O(p) \times \{0\}$ em \mathcal{N} .*

Definição A.3. *Sejam σ um elemento crítico hiperbólico. Os conjuntos:*

$$W_\beta^{ss}(\sigma) = \{q \in M; d(X_t(q), X_t(\sigma)) \leq \beta \quad \forall t > 0\}$$

$$W_\beta^{uu}(\sigma) = \{q \in M; d(X_{-t}(q), X_{-t}(\sigma)) \leq \beta \quad \forall t > 0\}$$

são chamados variedades estável e instável (fortes) locais, de tamanho β de σ .

Um corolário do teorema acima é que as variedades estável e instável locais de um elemento crítico hiperbólico, que a princípio é apenas um conjunto, é de fato uma variedade topológica. É possível mostrar mais: tais variedades tem uma estrutura diferenciável tão boa quanto a regularidade do campo.

Teorema A.4 (Variedade Estável). *Seja X é um campo C^k e σ um elemento crítico hiperbólico. Então:*

1. $W_\beta^{ss}(\sigma)$ é um disco C^k mergulhado com dimensão $\text{Ind}(\sigma)$.
2. O conjunto $W^{ss}(\sigma) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}(W_\beta^{ss}(\sigma))$ é uma C^k -subvariedade imersa. Quando $\sigma \in \text{Sing}(X)$, denotamos $W^{ss}(\sigma)$ por $W^s(\sigma)$.
3. $T_\sigma W_\epsilon^{ss}(\sigma) = E_\sigma^s$.
4. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se Y é δ - C^k -próximo de X e $D \subset W^{ss}(\sigma)$ é um disco compacto mergulhado contendo σ , então existe um disco $D_Y \subset W^{ss}(\sigma_Y)$ C^k - ϵ -próximo de D onde σ_Y é a continuação de σ .

Definimos as variedade estáveis (fracas) de um elemento crítico σ como

$$W^s(O(\sigma)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\sigma).$$

Analogamente pras variedades fracas locais. Note que a proximidade do ítem 4 no teorema acima implica numa proximidade para as variedades estáveis fracas.

Tais variedades invariantes são importantes, pois a interseção entre elas pode gerar dinâmicas bem complicadas, como a ferradura de Smale, por exemplo. E um resultado que ajuda a obter tais interseções é conhecido como o *lema de inclinação* ou o λ -lema.

Teorema A.5 (λ -lemma para singularidades). *Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica de X (um campo de classe C^r). Fixe um disco mergulhado B em $W_{loc}^s(\sigma)$ e uma vizinhança V deste disco em M . Então seja D um disco transversal a W_{loc}^u em z com a mesma dimensão de B e escreva D_t para a componente conexa de $X_t(D) \cap V$ que contém $X_t(z)$, para $t \leq 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$ o disco D_{-t} está $C^r - \epsilon$ -próximo de B .*

Um enunciado análogo do λ -lemma também vale para órbitas periódicas hiperbólicas (de fato, existem resultados bem mais gerais, mesmo em dimensão infinita, confira [37]).

A generalização natural de um ponto periódico hiperbólico leva a noção de conjunto hiperbólico.

Definição A.6. *Um conjunto Λ compacto e invariante para um campo X é dito hiperbólico se existe uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus \langle X \rangle \oplus F$ e constantes $K, \lambda > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ temos que*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ke^{-\lambda t} \text{ e } \|DX_{-t}|_{F_x}\| \leq Ke^{-\lambda t}.$$

Vale um teorema de variedades estáveis para conjuntos hiperbólicos. No fim, mostra-se que $W^s(\Lambda) = \{y; d(X_t(y), \Lambda) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$, é dada por $W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^{ss}(x)$. Analogamente para a variedade instável. Maiores informações veja [34] pág. 39.

Assim como os pontos periódicos hiperbólicos, os conjuntos hiperbólicos são *robustos*, isto é, não são destruídos por pequenas perturbações. Mais ainda, eles são *estáveis*, no sentido que a dinâmica da perturbação é a mesma, a menos de uma mudança de coordenadas, do conjunto original.

Teorema A.7 (Robustez). *Se Λ é um conjunto hiperbólico para o campo X então existe uma vizinhança U de Λ e uma vizinhança \mathcal{U} de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$ e $K \subset U$ é um conjunto compacto e Y -invariante então K é hiperbólico para Y .*

Teorema A.8 (Estabilidade). *Se Λ é um conjunto hiperbólico para o campo X então dada uma vizinhança U de Λ existe uma vizinhança \mathcal{U} de X em $\mathfrak{X}^1(M)$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$ então existe $\Lambda_Y \subset U$ hiperbólico para Y tal que $Y|_{\Lambda_Y}$ é conjugada a $X|_{\Lambda}$.*

Dizemos que um conjunto Λ é isolado se existe uma vizinhança compacta U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(U).$$

De fato, no caso hiperbólico, a propriedade de isolamento é equivalente a que o conjunto tenha uma estrutura de produto local, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que se $x, y \in \Lambda$ e $d(x, y) < \delta$ então $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) = \{p\} \subset \Lambda$.

Definição A.9. *Dizemos que dois pontos periódicos hiperbólicos p e q estão homoclinicamente relacionados se $W^s(O(p)) \cap W^u(O(q)) \neq \emptyset$ e $W^u(O(p)) \cap W^s(O(q)) \neq \emptyset$ e estas interseções são transversais.*

Se um conjunto hiperbólico tem órbitas periódicas densas dentro dele mesmo é possível obter uma decomposição deste conjunto em chamadas peças básicas.

Teorema A.10. *Se Λ é um conjunto hiperbólico tal que possui órbitas periódicas densas então ele se escreve como união disjunta $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ onde cada Λ_i é um conjunto compacto invariante, transitivo e isolado. Mais ainda, Λ_i é uma classe homoclínica, isto é, existe um ponto periódico $p \in \Lambda_i$ tal que Λ_i é o fecho do conjunto dos pontos periódicos que são homoclinicamente relacionados a p .*

Em particular, os chamados fluxos Axioma A, isto é, fluxos cujo conjunto não-errante é hiperbólico e possui órbitas críticas densas, possui uma decomposição espectral em peças básicas:

$$\Omega(X) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k.$$

Pode-se imaginar que isto implique na estabilidade do conjunto não-errante, uma vez que cada peça básica é estável. Porém, vê-se que em princípio não é verdade que a união dos homeomorfismos gerados por cada peça básica seja um homeomorfismo de fato.

Porém sobre a condição de que não haja ciclos entre as peças básicas tal empecilho pode ser descartado.

Teorema A.11. *Se X um campo Axioma A sem ciclos então X é Ω -estável.*

Lembramos que a definição de ciclo é a seguinte:

Definição A.12. *Dizemos que $\Lambda_i > \Lambda_j$ se*

$$(W^u(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset.$$

Um r -ciclo é $\Lambda_{i_0} > \Lambda_{i_1} > \dots > \Lambda_{i_r} = \Lambda_{i_0}$.

Sombreamento

A propriedade de sombreamento de pseudo-órbitas por orbitas verdadeiras está intimamente ligada á robustez e a estabilidade de uma dado sistema. O sombreamento é uma ferramenta poderosa para propagar informações de pedaços de órbitas para uma órbita inteira. Isto produz uma gama de argumentos capazes de atacar diversas situações, como tivemos oportunidade de ver no decorrer deste livro. Nesta seção, para comodidade do leitor, iremos enunciar os três tipos de *shadowing Lemma* usados no decorrer do texto.

Sombreamento para Conjuntos Hiperbólicos

Definição A.13. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Dados $\alpha > 0$ e $L > 0$, uma sequência $\{t_i, x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ é chamada uma (L, α) -pseudo-órbita se $d(X_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \alpha$. Diz-se que um um ponto $x \in M$ ϵ -sombreia a pseudo-órbita se existe uma reparametrização positiva do tempo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 0$, tal que $d(X_{g(t)}(x), X_t(x_i)) < \epsilon$, para todo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.*

Para gerar, via sombreamento, uma órbita periódica, precisamos que a pseudo-órbita seja periódica: uma pseudo-órbita é dita *periódica* se existe um $m > 0$ tal que $x_{i+m} = x_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Teorema A.14 (Shadowing Lemma para Conjuntos Hiperbólicos). *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existem $L, \alpha > 0$ tais que toda (L, α) -pseudo-órbita em Λ pode ser ϵ -sombreada. Além disso, se a pseudo-órbita é periódica, então a sombra é uma órbita periódica.*

Sombreamento para Cordas

Quando não temos hiperbolicidade global, como dentro de um conjunto hiperbólico, não podemos esperar um resultado tão forte do tipo “toda α -pseudo-órbita pode ser β -sombreada”. No entanto, a presença de hiperbolicidade ao longo de uma corda é capaz de produzir uma órbita *periódica* com sombreamento, pelo resultado de Liao que reproduzimos aqui.

No que se segue m é um inteiro qualquer, usado nas definições apenas por comodidade.

Seja Λ um compacto invariante pelo fluxo de um campo X que admite uma decomposição $N_\Lambda = E \oplus F$ dominada para o fluxo linear de Poincaré, tal que E contrai e F é não uniformemente expansor (ou seja, satisfaz o ítem 3 do teorema 4.13). Um par de pontos $(x, X_{mn}(x))$ contido em Λ , (ou seja, um pedaço finito de órbita de X_m) com $n > 0$, é dito uma $\gamma - F$ -corda, com $0 < \gamma < 1$ se

$$\prod_{j=1}^n \|P_X^{-m}(X_{mj}(x))|_F\| \leq \gamma^n.$$

Dizemos que $(x, X_{mn}(x))$ é uma $\gamma - F$ -corda *uniforme* se $(X_{mk}(x), X_{mn}(x))$ é uma $\gamma - F$ -corda para todo $0 \leq k < n$. No que se segue deixaremos subentendido que γ -corda significa $\gamma - F$ -corda.

O resultado de Liao diz que se uma corda volta próximo de seu ponto inicial, e com hiperbolicidade uniforme na direção F da decomposição dominada, então ela pode ser sombreada por uma órbita periódica.

Lema A.15 (Liao Shadowing Lema). *Dados $0 < \gamma < 1$ e $\sigma > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que se $(x, X_{mn}(x))$ é uma γ -corda uniforme satisfazendo $d(x, X_{mn}(x)) < \epsilon$ então existe um ponto periódico p com período mn tal que $d(X_{mi}(x), X_{mi}(p)) < \sigma$, para todo $0 \leq i \leq n$.*

Sombreamento para Cordas Generalizado

Finalmente, apresentamos o refinamento do *shadowing Lemma* de Liao, devido a Shaobo Gan em [28]. O enunciado que apresentamos aqui foi retirado de [30].

Seja $\Lambda \subset M - \text{Sing}(X)$, um compacto invariante pelo fluxo de X que admite uma decomposição $N_\Lambda = E \oplus F$ contínua e invariante pelo fluxo linear de Poincaré. Suponha também que $\dim E = p$, com $1 \leq p \leq d - 2$. Dados

números reais $\eta > 0$ e $T > 0$, uma corda $(x, X_t(x))$ é dita (η, T, p) -quase hiperbólica com respeito a decomposição $E \oplus F$ se existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = t$ do intervalo $[0, t]$ tal que $s_k := t_k - t_{k-1} \in [T, 2T]$, $k = 1, 2, \dots, l$, de maneira que as três condições a seguir sejam satisfeitas:

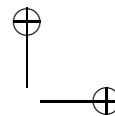
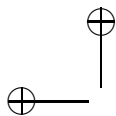
$$\begin{aligned} \frac{1}{t_k} \sum_{j=1}^k \log \|P_X^{s_j}(X_{t_{j-1}}(x))|_E\| &\leq -\eta \\ \frac{1}{t_l - t_{k-1}} \sum_{j=k}^l \log m(P_X^{s_j}(X_{t_{j-1}}(x))|_F) &\geq \eta \\ \|P_X^{s_k}(X_{t_{k-1}}(x))|_E\| &\leq e^{-2\eta} m(P_X^{s_k}(X_{t_{k-1}}(x))|_F), \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, l$.

O leitor deve se convencer de que cordas quase-hiperbólicas são conceitualmente mais fracas do que cordas uniformes. Uma das diferenças é que cordas quase-hiperbólicas só exigem uma dominação *na corda*, e não uma dominação global no compacto.

Ainda assim, cordas quase-hiperbólicas também possuem a propriedade do sombreamento, conforme o seguinte resultado

Lema A.16. *Seja X um campo qualquer e Λ um compacto invariante livre de singularidades. Suponha que $N_\Lambda = E \oplus F$ invariante pelo fluxo linear de Poincaré e contínua, com $\dim E = p$, $1 \leq p \leq d - 2$. Então, para todo $\eta > 0$, $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\{x_i, t_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ é uma (T, δ) pseudo-órbita e se, para todo i , $\{x_i, t_i\}$ é uma (η, T, p) -corda quase-hiperbólica com respeito a $E \oplus F$ então existe um $y \in M$ que ε -sombreia $\{x_i, t_i\}$. Além disso, se a pseudo-órbita for periódica, então y é um ponto periódico.*



Apêndice B

O Lema de Franks

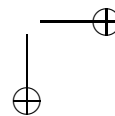
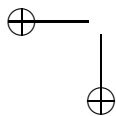
Neste apêndice iremos apresentar de modo preciso algumas das versões do Lema de Franks que utilizamos ao longo do texto.

Difeomorfismos e Singularidades

Vamos começar apresentando o caso de difeomorfismos. O próximo lema ensina que dado um mapa linear próximo da derivada de um difeomorfismo podemos obter um difeomorfismo próximo que é, em coordenadas locais, igual a esse mapa linear. De fato, para obter um difeomorfismo que realiza um determinado mapa linear como derivada, o modo mais fácil (pelo menos em \mathbb{R}^d) é tomar o próprio mapa linear como sendo o difeomorfismo! A dificuldade técnica que aparece, é que a variedade não possui estrutura vetorial, logo não faz sentido definir uma mapa linear nela. Mas a variedade possui estrutura vetorial *localmente*. Para usar isso a aplicar a mesma idéia, é que vão aparecer no lema as cartas locais e uma *função bump*.

Lema B.1. *Seja $f \in \text{Diff}^1(M)$. Dada \mathcal{U} vizinhança C^1 de f , existe $\delta > 0$ tal que: se $p \in M$, $q = f(p)$, $\varphi : U \subset M \rightarrow U_0$ e $\psi : V \subset M \rightarrow V_0$, são cartas locais ao redor de p e q com $\varphi(p) = \psi(q) = 0$, e se $A = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)$ e $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é linear e cumpre $\|B - A\| < \delta$, então existe $g \in \mathcal{U}$ tal que $\psi \circ g \circ \varphi^{-1} = B$ em $B(0, r)$ e $g = f$ fora de U .*

Demonstração. Considere $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função *bump* na bola unitária, isto é, β é suave, $\beta \equiv 1$ em $B(0, 1)$ e $\beta \equiv 0$ fora de $B(0, 2)$. Denote $C_0 =$



$\sup\{\|D\beta(x)\|; x \in \mathbb{R}^d\}$. Considere a função suave $\alpha(x) = \beta(x/r)$. Note que

$$\sup\{\|D\alpha(x)\|; x \in \mathbb{R}^d\} = \frac{C_0}{r}.$$

Pela definição de derivada, podemos escrever

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = Ax + \hat{f},$$

onde $\hat{f}(0) = 0$, $D\hat{f}(0) = 0$. Em particular, $\|D\hat{f}(x)\|$ e $\frac{|\hat{f}(x)|}{|x|}$ vão à zero quando $x \rightarrow 0$. Tome $r > 0$ de modo $B(0, 2r) \subset U_0$. Definimos a perturbação desejada pondo $g = f$ fora de U , e

$$\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x) = \alpha(x)Bx + (1 - \alpha(x))\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x),$$

para todo $x \in U_0$. Daí, é claro que a representação de g , nas cartas φ , ψ , é igual a B em $B(0, r)$ e é igual a representação de f fora de $B(0, 2r)$. Vamos estimar a distância C^1 entre g e f . Começamos calculando para as derivadas. Temos que

$$\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x) - Ax = \alpha(x)Bx - \alpha(x)Ax + (1 - \alpha(x))\hat{f}(x),$$

e portanto se $x \in B(0, 2r)$ temos que

$$\begin{aligned} \|D(\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x)) - Ax\| &\leq (|x|\frac{C_0}{r} + 1)\|B - A\| + \frac{C_0}{r}|\hat{f}(x)| + \|D\hat{f}(x)\| \\ &\leq (2C_0 + 1)\|B - A\| + 2C_0\frac{|\hat{f}(x)|}{|x|} + \|D\hat{f}(x)\| \\ &< a, \end{aligned}$$

desde que $\delta < \frac{a}{3(2C_0+1)}$ e r seja pequeno o bastante para que os outros termos da segunda desigualdade acima sejam estimados por $\frac{a}{3}$, onde $a > 0$ é tal que $d_{C^1}(g, f) < a$ implica $g \in \mathcal{U}$.

Reduzindo r , se necessário, pelo Teorema do Valor Médio segue que a distância C^0 entre f e g também é menor do que a . Deixamos a verificação deste detalhe a cargo do leitor.

Portanto obtemos g nas condições do lema, cuja distância C^1 a f é menor do que a . Isto conclui a prova. \square

Observação B.2. Observe que δ só depende de \mathcal{U} .

Com um argumento semelhante ao usado acima, obtemos a versão para singularidades de um fluxo do Lema de Franks.

Lema B.3 (Lema de Franks para singularidades). *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\sigma \in \text{Sing}(X)$. Então para toda C^1 -vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ de X , existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que se $L : T_p M \rightarrow T_p M$ é uma aplicação linear satisfazendo $\|L - DX(\sigma)\| < \delta$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ de modo que:*

$$Y(x) = (D_{\exp_\sigma^{-1}(x)} \exp_\sigma) \circ L \circ \exp_\sigma^{-1}(x), \text{ se } x \in B_\varepsilon(\sigma)$$

e $Y(x) = X(x)$ no complementar de $B(\sigma, r)$ para algum $r > \varepsilon$ próximo de ε .

Lema B.4 (Lema de Franks para difeomorfismos). *Sejam $f \in \text{Dif}^1(M)$ e \mathcal{U} vizinhança C^1 de f . Então, existem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f , e $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $g \in \mathcal{V}$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto finito de pontos distintos de M , tal que existam mapas lineares $L_i : T_{x_i} M \rightarrow T_{f(x_i)} M$ satisfazendo*

$$\|L_i - Df(x_i)\| < \varepsilon,$$

e U é uma vizinhança desse conjunto finito de pontos, então existe $\bar{g} \in \mathcal{U}$, $\bar{g} = g$ em $\{x_1, \dots, x_n\} \cup (M - U)$ de tal forma que $D\bar{g}(x_i) = L_i$.

Demonstração. Seja $a > 0$ tal que todo difeomorfismo g que é $2a$ - C^1 -próximo de f está em \mathcal{U} . Definimos \mathcal{V} como o conjunto de difeomorfismos que estão a - C^1 -próximos de f . Por compacidade, podemos cobrir M com um número finito de cartas locais, $\{\varphi_j\}_{j=1}^l$.

Seja $C = \sup\{\|D\varphi_j(p)\|, \|D\varphi_j^{-1}(x)\|; p \in M, x \in B(0, 1), j = 1 \dots, l\}$. Aplicando o lema B.1 a vizinhança \mathcal{V} obtemos um $\delta > 0$. Escolhemos $\varepsilon = \frac{\delta}{C}$. Afirmamos que com essa escolha o lema está provado.

Com efeito, dada $g \in \mathcal{V}$, podemos escolher um $r > 0$ pequeno de modo que as bolas $B(x_i, r)$ sejam disjuntas e que valha o lema B.1. Podemos supor que $\varphi_i(x_i) = 0$, e que para cada i existe j tal que se $\psi_i = \varphi_j$ então $\psi_i(f(x_i)) = 0$. Como cada L_i cumpre

$$\|L_i - Df(x_i)\| < \varepsilon,$$

se definirmos $B_i = D\psi_i \circ L_i \circ D\varphi_i^{-1}(0)$, então, pelo modo como escolhemos ε , é fácil ver que teremos

$$\|B_i - A_i\| < \delta,$$

onde $A_i = D(\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1})(0)$.

O que vamos fazer agora é aplicar o lema B.1 para obter a perturbação desejada. Por ele, existe g_1 , cuja C^1 distância a g é igual a a tal que

$$\psi_1 \circ g_1 \circ \varphi_1^{-1} = B_1$$

na bola $B(0, r)$. Em particular, $Dg_1(x_1) = L_1$, $g_1(x_1) = g(x_1)$ e $g_1 = g$ fora de uma vizinhança muito pequena de x_1 (desde que r seja pequeno o bastante). Em seguida, perturbamos g_1 para obter g_2 , igual a g_1 fora de uma vizinhança muito pequena de x_2 (novamente desde que r seja pequeno), satisfazendo $Dg_2(x_2) = L_2$ e $g_2(x_2) = g(x_2)$. A observação é que como g_2 só perturba g_1 numa parte na qual $g_1 = g$, temos que $d(g_2, g) < a$. Prosseguindo um número finito de vezes, obtemos a perturbação desejada. \square

Campos

A seguir vamos dar um enunciado mais preciso do Lema de Franks para órbitas periódicas e o Lema de Franks, que usamos no argumento de redução de índice. Fixemos em toda a discussão a seguir $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $x \in M - \text{Sing}(X)$. De agora em diante só iremos utilizar seções transversais que são normais ao campo em coordenadas exponenciais, ou seja, considere um seção $\Sigma_{x,r} = \exp(N_{x,r})$, onde $N_{x,r} = \{v \in N_x; \|v\| < r\}$, e $r > 0$. Usaremos também a notação $\Sigma_x = \exp N_x$. Desse modo, se $y = X_t(x)$, é verdade que, para um $r > 0$ pequeno, se $P : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_{y,r}$ é o mapa de Poincaré então sua derivada é dada pelo Fluxo Linear de Poincaré, ou seja, $DP(x) = P'(x)$. (cf. Capítulo 1)

O Lema de Franks é independente desse fato. No entanto em quase todas as vezes que aplicamos o Lema de Franks usamos isso. Por essa razão, vamos enunciar e provar o Lema de Franks em coordenadas exponenciais.

Para enunciar o próximo lema fixaremos um ponto $y = X_t(x)$ com $t > 0$. Usando o teorema do Fluxo Tubular Longo é possível provar que $P : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_y$ é um mergulho de classe C^1 e, além disso, existe uma função de classe C^1 $\tau : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_y$ de forma que $P(z) = X_{\tau(z)}(z)$ e que a aplicação de classe C^1 $(t, z) \mapsto X_t(z)$ mergulha

$$\{(t, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma_{x,r}; 0 \leq t \leq \tau(z)\}$$

em M (veja [21]). A imagem desse conjunto pela referida aplicação, isto é $\{X_t(z); 0 \leq t \leq \tau(z)\}$ é o que chamamos no capítulo 1 de *tubo centrado na*

órbita de x , raio r e tamanho t . Para não repetirmos várias vezes um nome tão grande, até o fim deste apêndice vamos denotar tais tubos ao longo de órbitas por $Tub(x, r, t)$. Vamos denotar também $Emb^1(\Sigma_{x,r}, \Sigma_y)$ como sendo o conjunto de todos os mergulhos C^1 entre $\Sigma_{x,r}$ e Σ_y e considerar nesse espaço a topologia C^1 . Por último, vamos denotar por $\mathcal{I}_\epsilon(\Sigma_{x,r})$ o conjunto dos difeomorfismos $\varphi : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_{x,r}$ ϵ -próximos da identidade na topologia C^1 .

Antes de passar as outras versões do Lema de Franks vamos enunciar um lema auxiliar que diz que se obtemos uma perturbação do mapa de Poincaré em $Emb^1(\Sigma_{x,r}, \Sigma_y)$ então existe um campo Y C^1 próximo de X , tal que $Y_t(x) = y$, e que realiza a tal perturbação como mapa de Poincaré. Além disso, o campo Y coincide com X fora do tubo $Tub(x, r, t)$.

Lema B.5. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $x \in M - \text{Sing}(X)$, como na discussão acima. Suponha que $X_s(x) \neq x$, para todo $0 < s \leq t$ e considere $P : \Sigma_{x,r_0} \rightarrow \Sigma_y$ o mapa de Poincaré, com $r_0 > 0$ pequeno. Então, para toda \mathcal{U} vizinhança C^1 de X , e todo $0 < r \leq r_0$, existe um $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\varphi \in \mathcal{I}_\epsilon(\Sigma_{x,r})$, existe $Y \in \mathcal{U}$ satisfazendo*

- $Y(z) = X(z)$, se $z \notin Tub(x, r, t)$
- $P_Y(z) = P \circ \varphi(z)$, se $z \in \Sigma_{x,r}$

Para uma prova desse resultado remetemos o leitor a [62](ver remark 2, p296).

O próximo lema é na verdade o teorema A.1 do apêndice A de [19]. Ele diz que podemos modificar um campo de modo a obter determinados mapas lineares como fluxos lineares de Poincaré, ao longo de uma órbita regular. Veja figura 5.1. Em [19] os autores apresentam uma prova bem direta deste resultado. Apresentamos uma idéia de como provar este lema, usando o lema B.5 e o lema de Franks para difeomorfismos, como ilustração dos métodos apresentados aqui.

Lema B.6 (Lema de Franks). *Considere $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e um pedaço finito de órbita, isto é, um ponto $x \in M - \text{Sing}(X)$ e números $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Denotemos $s_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Então, para toda C^1 -vizinhança \mathcal{U} de X existe $\epsilon > 0$ de modo que se $L_i : N_{X_{t_i}(x)} \rightarrow N_{X_{t_{i+1}}}(x)$, $i = 1, \dots, n$, são mapas lineares tais que*

$$\|L_i - P^{s_i}(X_{t_i}(x))\| < \epsilon,$$

então existem $r > 0$ e um campo $Y \in \mathcal{U}$ satisfazendo:

- $Y(X_{t_i}(x)) = X_{t_{i+1}}(x)$, $i = 0, \dots, n-1$,
- $P_Y^{s_i}(X_{t_{i-1}}(x)) = L_i$, $i = 1, \dots, n$,
- $Y(y) = X(y)$ se $y \notin \text{Tub}(x, r, t_n)$.

Demonstração. A idéia da prova é basicamente fazer sucessivas perturbações em cada tubo, até completar o pedaço de órbita. Em cada etapa usamos o lema B.4 para perturbar o mapa de Poincaré, realizando L_i como derivada, e depois usamos o lema B.5 para obter um campo que realize essa perturbação como mapa de Poincaré.

Começamos no primeiro tubo que vai de x até $X_{t_1}(x)$. Seja $P_1 : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_{X_{t_1}(x),r}$ o mapa de Poincaré, onde, até aqui, $r > 0$ é apenas para que o mapa de Poincaré em todos os tubos ao longo da órbita de x sejam difeomorfismos C^1 . Como L_1 ε -perturba a derivada de P_1 , se $\varepsilon > 0$ é pequeno, pelo lema B.4 aplicado a P_1 e uma vizinhança de P_1 em $\text{Emb}^1(\Sigma_{x,r}, \Sigma_{X_{t_1}(x),r})$, existe um mapa $g_1 : \Sigma_{x,r} \rightarrow \Sigma_{X_{t_1}(x),r}$ que está próximo de P_1 , coincide com P_1 em x e cuja derivada $Dg_1(x) = L_1$. Se a vizinhança de P_1 em $\text{Emb}^1(\Sigma_{x,r}, \Sigma_{X_{t_1}(x),r})$ é pequena, $\varphi = P_1^{-1} \circ g_1$ é próxima da identidade, e podemos aplicar o lema B.5 e obter um campo $Y_1 \in \mathcal{U}$ que coincide com X em x e fora do $\text{Tub}(x, r, t_1)$, após reduzir r um pouquinho, e cujo mapa de Poincaré em x é igual a g . Em particular, $P_Y^{s_0} = L_1$.

Agora, perturbamos Y_1 no tubo $\text{Tub}(X_{t_1}(x), r, s_2)$ para obter Y_2 igual a X em x e em $X_{t_1}(x)$ e fora do $\text{Tub}(x, r, t_2)$ e ainda tal que

$$P_Y^{s_1}(x) = L_1 \quad \text{e} \quad P_Y^{s_2}(X_{t_1}(x)) = L_2$$

do mesmo jeito que fizemos acima. Aqui, possivelmente teremos que reduzir ε , para usar o lema B.4, mas ainda de um modo que só dependa de X e de \mathcal{U} (deixamos a verificação desse fato a cargo do leitor). A observação é que como Y_1 é igual a X fora de $\text{Tub}(x, r, t_1)$, na verdade estamos perturbando X , o que faz com que $Y_2 \in \mathcal{U}$.

Prosseguindo com esse argumento um número finito de vezes, conseguimos o campo Y e o valor de ε desejados, o que conclui a prova. \square

Lema B.7 (Lema de Franks para órbitas periódicas). *ejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $p \in \text{Per}(X)$ e $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a correspondente aplicação de Poincaré, onde Σ é uma seção transversal pequena de modo que os resultados acima se*

apliquem. Considere \mathcal{U} uma C^1 -vizinhança de X . Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ com a seguinte propriedade. Se $L : N_p \rightarrow N_p$ é um isomorfismo linear com $\|L - DP(p)\| < \delta$, então existe um campo $Y \in \mathcal{U}$ que satisfaz:

- $Y(x) = X(x)$, se $x \notin Tub(p, \varepsilon, \pi(p))$
- $p \in Per(Y)$.
- Se $P_Y : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é o mapa de Poincaré para Y , então

$$P_Y(x) = \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}(x), \text{ se } x \in B_\varepsilon(p) \cap \Sigma$$

$$\text{e } P_Y(x) = P(x) \text{ se } x \notin B_\varepsilon(p) \cap \Sigma$$

Demonstração. Como o argumento é semelhante ao usado no Lema de Franks, vamos apenas fazer um esboço da demonstração, deixando os detalhes para o leitor. Apenas vamos tentar deixar claro as diferenças.

De fato, a única dificuldade em usar a combinação *lema B.4+lema B.5* é que não podemos usar o lema B.5 pois este não se aplica a órbitas periódicas.

Para contornar isso, começamos usando o lema de Franks para difeomorfismos e obtendo um mapa $g : \Sigma \rightarrow \Sigma$ próximo a $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ satisfazendo

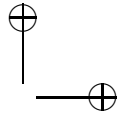
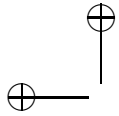
$$g(x) = \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}(x),$$

se x está perto de p em Σ , e igual a P se x está longe de p em Σ .

O que precisamos é obter um campo que realize g como mapa de Poincaré. A estratégia é então usar o lema B.5 em *metade* da órbita de p . Como g é apenas uma ligeira perturbação de P , $\varphi = P^{-1} \circ g$ produz um difeomorfismo de Σ próximo da identidade. Usando esse difeomorfismo, pelo lema B.5 encontramos um campo Y perto de X que realiza $f \circ \varphi$ como mapa de Poincaré, (de p até $\frac{\pi(p)}{2}$) onde $f = P : \Sigma \rightarrow \Sigma_{X, \frac{\pi(p)}{2}}$, e coincide com X fora de $Tub(p, \varepsilon_0, \frac{\pi(p)}{2})$.

Note que os valores de δ e ε serão determinados quando aplicarmos o Lema de Franks para difeomorfismos e o lema B.5.

Daí, leitor pode verificar sem muita dificuldade que esse campo Y realiza o desejado. \square



Apêndice C

Dominação em Superfícies

Neste apêndice iremos apresentar uma prova direta, que não passa pelo teorema sobre sequências periódicas de Mañé, de que a propriedade estrela implica em dominação no fecho do conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos de tipo sela, denotado aqui por $\overline{\text{Per}_h(f)}$, para difeomorfismos em superfícies. Em todo o apêndice M denotará uma superfície compacta sem bordo. O principal resultado deste apêndice é o seguinte:

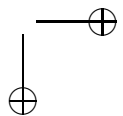
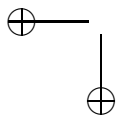
Teorema C.1. *Todo difeomorfismo estrela em uma superfície M admite uma decomposição dominada em $\overline{\text{Per}_h(f)}$.*

Lembrando que um conjunto invariante Λ (não-necessariamente compacto) admite uma decomposição dominada $E \oplus F$, se existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tais que para todo $x \in \Lambda$ e $n \geq 0$ temos

$$\|Df^n(x)|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| < C\lambda^n.$$

É imediato dessa definição que, se Λ admite uma decomposição dominada, então $\overline{\Lambda}$ também admite.

Novamente, um ingrediente essencial será o Lema de Franks, uma vez que ele irá reduzir a análise perturbativa para um problema de Álgebra Linear. Com isso, uma vez que estamos numa situação bidimensional, veremos que a manipulação algébrica será simplificada, muito mais do que no teorema geral de Mañé. Para conforto do leitor, observamos que no resto do apêndice usaremos apenas a versão do lema de Franks dada pelo lema B.4.



A prova do teorema terá duas etapas. Na primeira, mostraremos que a propriedade estrela implica que o ângulo entre os subespaço estável e o subespaço instável de qualquer ponto tipo sela é uniformemente afastado de zero, mais ainda este afastamento é robusto. Em seguida, seguindo os argumentos em Pujals-Sambarino [63] mostraremos que isto implica a propriedade de dominação.

Ângulo

Nesta seção mostramos resultados úteis sobre o ângulo entre subespaços. Primeiro apresentamos a definição de ângulo.

Definição C.2. *Sejam E, F subespaços de \mathbb{R}^N , tais que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$, e seja $L : E^\perp \rightarrow E$ a única transformação linear tal que*

$$F = \text{graf}(L) = \{v + Lv; v \in E^\perp\}.$$

O ângulo entre E e F é definido como $\alpha(E, F) = \|L\|^{-1}$

O próximo lema dá estimativas sobre o ângulo entre dois subespaços.

Lema C.3. *Suponha que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$ e $L : E^\perp \rightarrow E$ é como na definição de ângulo entre E e F . Então*

a) *Para todo $v \in E, u \in F$ temos que $\|v - u\| \geq \frac{\alpha(E, F)}{1 + \alpha(E, F)} \|v\|$*

b) *Se $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um mapa linear então*

$$\|T\| \leq \frac{1 + \alpha(E, F)}{\alpha(E, F)} (\|T|E\| + \|T|F\|).$$

Demonstração. a) Tome $w \in E^\perp$ tal que $w + Lw = v \in F$. Daí, se $u \in E$ então $Lw - u \in E$, e pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$\|v - u\| = \|w + Lw - u\| \geq \|w\|.$$

Contudo, $\|v\| \leq \|w\| + \|L\| \cdot \|w\| = \|w\|(1 + \|L\|)$. Logo,

$$\|w\| \geq \left(\frac{1}{1 + \|L\|}\right) \|v\|,$$

e finalmente temos

$$\|v - u\| \geq \frac{\alpha(E, F)}{1 + \alpha(E, F)} \|v\|.$$

b) Se $v \in \mathbb{R}^N$, $v = e + e^\perp$, com $e^\perp \in E^\perp$ e $e \in E$. Daí,

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \|T(e + e^\perp)\| = \|T(e^\perp + Le^\perp) + T(e - Le^\perp)\| \\ &\leq \|T|E^\perp\|(1 + \|L\|)\|e^\perp\| + \|T|E\|(\|e\| + \|L\|\|e^\perp\|). \end{aligned}$$

Como, novamente por Pitágoras, $\|e\| \leq \|v\|$ e $\|e^\perp\| \leq \|v\|$ e como $\|L\| = \alpha(E, F)^{-1}$, segue o resultado. \square

Observação C.4. *O mapa L da definição acima é obtido usando as projeções ortogonais P_F , de F sobre E , e P_F^\perp , de F sobre E^\perp . Como F e E^\perp possuem a mesma dimensão, P_F^\perp é invertível e podemos obter L via $P_F \circ (P_F^\perp)^{-1}$. No entanto se E e F possuírem a mesma dimensão, P_F é invertível também e podemos usar L^{-1} ao invés de L , e nesse caso $\alpha(E, F) := \|L\|$. O Lema acima continua sendo verdade, com a mesma prova, apenas trocando E^\perp por E , e vice-versa.*

Como $\dim M = 2$, o lema acima será usado no caso $\dim(E) = \dim(F) = 1$. Pela observação acima, podemos adotar $\alpha(E, F) := \|L\|$, onde $L : E \rightarrow E^\perp$ é tal que $F = \text{graf}(L) = \{w + Lw; w \in E\}$.

Uma cota inferior para o ângulo

Nesta seção mostramos que a propriedade estrela garante uma cota inferior entre o ângulos dos subespaços estáveis e instáveis de selas periódicas. Um difeomorfismo f é *estrela* se ele não pode ser aproximado, na topologia C^1 , por difeomorfismos com pontos periódicos não-hiperbólicos.

Proposição C.5. *Seja $f \in \text{Diff}^1(M)$ um difeomorfismo estrela. Então existem \mathcal{U}_0 uma C^1 -vizinhança de f , e $\gamma > 0$ tais que para toda $g \in \mathcal{U}_0$ e para todo $p \in \text{Per}_h(g)$, vale $\alpha(E_p^s, E_p^u) > \gamma$.*

Demonstração. Sejam \mathcal{U}_0 e $\varepsilon > 0$ dados pelo Lema de Franks quando aplicado a f e a vizinhança \mathcal{U} dada pela propriedade estrela.

Vamos supor que a proposição não é verdadeira. Então, tão perto quanto se queira de f , existe um difeomorfismo g possuindo um ponto periódico p tal que $\alpha(E_p^s, E_p^u)$ é tão pequeno quanto se queira.

A estratégia da prova é perturbar a derivada de g ao longo da órbita de p tornando-a não-hiperbólica, e daí, usando o Lema de Franks, obter $\bar{g} \in \mathcal{U}$, possuindo um ponto periódico não hiperbólico, o que nos levará a uma contradição com a propriedade estrela.

Podemos supor que a derivada de toda sela hiperbólica de toda $g \in \mathcal{U}_0$ possui somente autovalores positivos (uma vez que estamos em dimensão 2, podemos argumentar usando f^2). Com isto, a estratégia é a seguinte, se pudermos obter um vetor v no quadrante de ângulo pequeno (veja a figura C.1), como os autovalores são positivos, $Av = Dg^{\pi(p)}v$ também estará lá (lembre que $\pi(p)$ denota o período de p). Assim, se $\|Av\| = \|v\|$, então, compondo A com uma pequena rotação tornamos v um autovetor associado ao autovalor 1. E esta é a perturbação desejada.

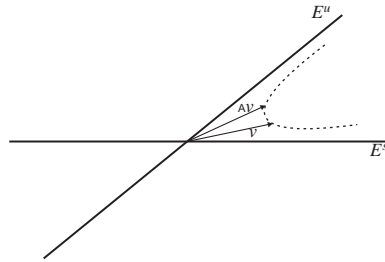


Figura C.1:

Entendida a estratégia e a idéia, o argumento é o seguinte: dado $\theta > 0$ existe $g \in \mathcal{U}_0$ possuindo $p \in \text{Per}_h(g)$ tal que $\alpha(E_p^s, E_p^u) < \theta$. Seja $n = \pi(p)$ o período de p e, por simplicidade, denote $E_p^s = E$ e $E_p^u = F$. Sejam $0 < \lambda < 1 < \mu$ os autovalores de $A : T_pM \rightarrow T_pM$, onde $A = Dg^n(p)$ e seja $L : E \rightarrow E^\perp$ dada pela definição de ângulo.

Dado $v \in T_pM$ podemos escrevê-lo como $v = \alpha e + \beta f$, com $e \in E$ unitário e $f = e + Le \in F$. Logo $Av = (\lambda\alpha + \mu\beta)e + \mu\beta Le$. Tomando $\alpha = 1$, existe $\beta > 0$ tal que $\|Av\| = \|v\|$. Como α, β, λ e μ são positivos, temos que o ângulo entre v e Av é menor que o ângulo entre E e F .

Portanto, se θ é pequeno, como $\alpha(E, F) < \theta$, definindo $\eta = \alpha(\langle Av \rangle, \langle v \rangle)$, existe $R_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ rotação tal que $R_\eta \circ Av = v$ e

$$\|R_\eta - Id\| < \frac{\varepsilon}{\|Dg(g^{n-1}(p))\|}.$$

Considerando $L : T_{g^{n-1}(p)}M \rightarrow T_pM$ dada por $L = R_\eta \circ Dg(g^{n-1}(p))$, temos que $\|L - Dg(g^{n-1}(p))\| < \varepsilon$.

Pelo Lema de Franks, obtemos $\bar{g} \in \mathcal{F}^1(M)$ tal que p é ponto periódico de período n para \bar{g} , $\bar{g} = g$ em $\{g^{n-1}(p)\} \cup M - B(g^{n-1}(p), r)$, onde $r > 0$ é tomado de forma que não existem pontos da órbita de p em $B(g^{n-1}(p), r)$, além de $g^{n-1}(p)$. Além disso, temos também que $D\bar{g}(g^{n-1}(p)) = L$.

Logo, $D\bar{g}^n = Dg(p) \circ Dg(g(p)) \circ \dots \circ L = R_\eta \circ Dg^n(p) = R_\eta \circ A$, o que é absurdo, pois $R_\eta \circ A$ possui um autovalor 1, como provado acima. Isto completa a prova. \square

Uniformidade dos Autovalores

Nesta seção mostramos que numa vizinhança de um difeomorfismo estrela os módulos dos autovalores das derivadas de selas periódicas são uniformemente afastados de 1. Mais precisamente:

Lema C.6. *Se f um difeomorfismo estrela então existem $\alpha > 0$ e \mathcal{U}_0 uma vizinhança de f de modo que para toda $g \in \mathcal{U}_0$ e todo $p \in \text{Per}_h(g)$ de período n , tem-se*

$$|\lambda| < (1 - \alpha)^n < 1 < (1 + \alpha)^n < |\sigma|$$

onde λ e σ são os autovalores $Dg^n(p)$

Demonstração. Dada $g \in \text{Diff}^1(M)$ e $p \in \text{Per}_h(g)$ considere o mapa

$$L_p : \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_{g^i(p)}M \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_{g^i(p)}M,$$

dado por

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (Dg(g^{n-1}(p))v_n, Dg(p)v_1, \dots, Dg(g^{n-2}(p))v_{n-1}).$$

Se λ é autovalor de L_p , com autovetor (v_1, \dots, v_n) , vemos que

$$\begin{aligned} \lambda v_1 &= Dg(g^{n-1}(p))v_n & , & \quad \lambda v_2 = Dg(p)v_1 \\ & \dots & & \\ \lambda v_n &= Dg(g^{n-2}(p))v_{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$Dg^n(p)v_1 = Dg(g^{n-1}(p))Dg(g^{n-2}(p)) \cdots Dg(p)v_1 = \lambda^n v_1.$$

Reciprocamente, se λ^n é autovalor de $Dg^n(p)$, com autovalor v_1 , então, definindo

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{\lambda} Dg(p)v_1, & v_3 &= \frac{1}{\lambda} Dg(g(p))v_2 \\ &\dots & & \\ v_n &= \frac{1}{\lambda} Dg(g^{n-2}(p))v_{n-1}, \end{aligned}$$

é imediato que λ é autovalor de L_p .

A partir desse fato, para provar o lema, basta estabelecer que numa vizinhança \mathcal{U}_0 de f , para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}_0$ e todo ponto $p \in \text{Per}_h(g)$, de período n , os autovalores λ e σ do mapa L_p estão afastados de 1. Isto é, existe $\alpha > 0$ tal que $|\lambda| < 1 - \alpha < 1 < 1 + \alpha < |\sigma|$.

Suponha que isso não ocorra. Então, dada qualquer vizinhança $\mathcal{U}(f)$, tomando $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ vizinhança de f e $\varepsilon > 0$ dados pelo Lema de Franks, existe $g \in \mathcal{U}_0$ possuido um ponto $p \in \text{Per}_h(g)$, tal que o mapa associado,

$$L_p : \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_{g^i(p)}M \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_{g^i(p)}M$$

possui um autovalor λ cujo módulo é tão perto de 1 quanto se queira. Tome, então, g , de modo que $\beta := |\lambda|^{-1}$ cumpra

$$|\beta - 1| < \frac{\varepsilon}{c} \text{ onde } c = \sup\{\|Dg(x)\|; x \in M\}.$$

Definindo $L_i : T_{g^i(p)}M \rightarrow T_{g^{i+1}(p)}M$, dado por, $L_i = \beta Dg(g^i(p))$ temos

$$\|L_i - Dg(g^i(p))\| = \|Dg(g^i(p))\| \|\beta Id - Id\| < \varepsilon, \quad e$$

$$L_{n-1} \circ L_{n-2} \circ \cdots \circ L_0 = \beta^n Dg^n(p).$$

Logo, se (v_1, \dots, v_n) é autovetor de L_p associado a λ , temos que

$$\beta^n Dg^n(p)v_1 = \beta^n \lambda^n v_1,$$

e portanto temos um autovalor de módulo 1.

Pelo Lema de Franks, existe $\bar{g} \in \mathcal{U}(f)$ perturbação local de g na órbita de p que realiza L_i como derivada no ponto $g^i(p)$, e desse modo $D\bar{g}^n(p) = \beta^n Dg^n(p)$. Isto diria que \bar{g} possui um ponto periódico não hiperbólico. Contradição. \square

Dominação

Finalmente, vamos mostrar que a decomposição $T_{\text{Per}_h(f)}M = E^s \oplus E^u$ dada pela hiperbolicidade das selas periódicas é uma decomposição com a propriedade de dominação para f . Isto irá provar o teorema C.1, pois a dominação estende-se ao fecho.

Proposição C.7. *Seja $f \in \text{Dif}^1(M)$ um difeomorfismo com a propriedade estrela, numa superfície M . Então, existe uma vizinhança \mathcal{U}_0 de f e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $g \in \mathcal{U}_0$ e $p \in \text{Per}_h(g)$ então existe $n \leq n_0$ satisfazendo:*

$$\|Dg^n(p)|_{E^s}\| \|Dg^{-n}(g^n(p))|_{E^u}\| < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Como foi dito, a estratégia é mostrar que a cota inferior para o ângulo entre os subespaços estáveis e instáveis dos pontos periódicos de difeomorfismos próximos a f , obtida acima na proposição C.5, gera a dominação. Dito de outra forma, vamos supor por absurdo que não temos dominação. Neste caso, será possível encontrar, mediante uma pequena perturbação, um difeomorfismo g próximo de f , possuindo um ponto periódico cujo ângulo entre o espaço estável e o espaço instável é tão pequeno quanto se queira, e isto violará a proposição C.5.

Sejam $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_0$ e $\varepsilon > 0$ dado pelo Lema de Franks aplicado a vizinhança \mathcal{U}_0 , dada pela proposição C.5 e pelo lema C.6, e o difeomorfismo f . Suponha que a proposição seja falsa. Então, existe uma sequência g_n convergindo a f na topologia C^1 , possuindo pontos $p_n \in \text{Per}(g_n)$ tal que

$$\|Dg_n^m(p)|_{E^s}\| \|Dg_n^{-m}(g_n^m(p))|_{E^u}\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } 0 \leq m \leq n.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $g_n \in \mathcal{V}$, para todo n .

Para simplificar a notação, iremos tomar $g = g_n$, e $p = p_n$, com n grande, a determinar. Neste caso, podemos supor que $\pi(p)$ é arbitrariamente grande, pois, usando o lema C.6 temos que:

$$\begin{aligned} \|Dg^{k\pi(p)}|_{E^s}\| \|Dg^{-k\pi(p)}|_{E^u}\| &\leq (1 - \alpha)^{k\pi(p)} (1 + \alpha)^{-k\pi(p)} \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

donde existe k_0 (que só depende de α) de modo que

$$\|Dg^{k_0\pi(p)}|_{E^s}\| \|Dg^{-k_0\pi(p)}|_{E^u}\| < \frac{1}{2}$$

e isto implica, já que estamos assumindo que não vale a estimativa da dominação, que $\pi(p) \geq n/k_0$. Como n está sendo considerado arbitrariamente grande, isto nos leva a concluir que $\pi(p)$ também pode ser tomado arbitrariamente grande.

Nas próximas linhas vamos definir uma série de mapas e subespaços auxiliares que usaremos para construir a perturbação.

Tome vetores unitários $v \in E_p^s$ e $u \in E_p^u$. Como estamos supondo que não vale a estimativa de dominação, temos que

$$\frac{1}{2} \|Dg^i(p)u\| \leq \|Dg^i(p)v\|,$$

para todo $0 < i \leq \pi(p)$. Defina $L : E_p^u \rightarrow E_p^s$ como $Lu = \delta v$, onde $\delta > 0$ é pequeno, a determinar.

Usando L , definimos $\tilde{L} : E_p^u \rightarrow E_p^s$, como

$$\tilde{L} = (1 + \delta)^{\pi(p)} (Dg_{|E_p^s}^{\pi(p)}) \circ L \circ Dg_{|E_p^u}^{-\pi(p)}.$$

Observe que \tilde{L} possui norma pequena. De fato, usando a estimativa de separação dos autovalores dada pelo lema C.6 obtemos

$$\|\tilde{L}\| \leq (1 + \delta)^{\pi(p)} (1 - \alpha)^{\pi(p)} (1 + \alpha)^{-\pi(p)} \|L\| \leq \delta,$$

desde que δ seja pequeno o bastante para que $(1 + \delta)(1 - \alpha) < 1$.

Considere os subespaços $G = \{u + Lu; u \in E_p^u\}$ e $\tilde{G} = \{u + \tilde{L}u; u \in E_p^u\}$.

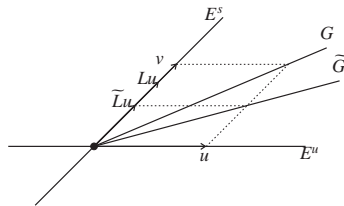


Figura C.2:

Mais ainda, considere os mapas lineares, $P, S : T_p M \rightarrow T_p M$, dados por $Pu = Lu, Pv = 0, Sv = 0, S(u + \tilde{L}u) = -\tilde{L}u$. Note que isso implica em

$$P|_{E_p^s} = 0, (Id + P)E_p^u = G, S|_{E_p^s} = 0 \text{ e } (Id + P)\tilde{G} = E_p^u.$$

Aplicando o lema C.3, obtemos as estimativas

$$\|P\| \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\delta \text{ e } \|S\| \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\delta.$$

Por fim, definimos $T_j : T_{g^j(p)}M \rightarrow T_{g^j(p)}M$ como $T_j v = \delta v$ e $T_j u = 0$, para todo $0 \leq j \leq \pi(p)$.

Agora estamos em condições de definir os mapas L_j que farão ligeiras perturbações de Dg ao longo da órbita de p . Definimos,

$$L_0 = (Id + T_1) \circ Dg(p) \circ (Id + P) : T_p M \rightarrow T_p M$$

e para $1 \leq j \leq \pi(p) - 2$ definimos

$$L_j = (Id + T_{j+1}) \circ Dg(g^j(p)) : T_{g^j(p)}M \rightarrow T_{g^{j+1}(p)}M, \text{ e}$$

$$L_{\pi(p)-1} = (Id + S) \circ (Id + T_0) \circ Dg(g^{\pi(p)-1}(p)) : T_{g^{\pi(p)-1}(p)}M \rightarrow T_p M.$$

Não é difícil verificar, usando a desigualdade triangular, que se δ é suficientemente pequeno, temos

$$\|L_j - Dg(g^j(p))\| < \epsilon, \text{ para todo } 0 \leq j \leq \pi(p) - 1$$

De fato, note que todos os L_j foram obtidos compondo-se Dg com uma ligeira perturbação da identidade.

Pelo Lema de Franks, obtemos $\bar{g} \in \mathcal{U}_0$, tal que $p \in \text{Per}_h(\bar{g})$, \bar{g} coincide com g na órbita de p e fora de um pequeno aberto contendo a mesma, e $D\bar{g}(g^j(p)) = L_j$. Por simplicidade, denote $E_j^\sigma = E_{g^j(p)}^\sigma$, $\sigma = s, u$, e observe que $E_j^s = E_j^s(\bar{g})$, pois

$$Dg|_{E_j^s} = L_j = (1 + \delta)Dg|_{E_j^s},$$

e $(1 + \delta)(1 - \alpha) < 1$.

Por outro lado, não é difícil verificar que $D\bar{g}^{\pi(p)}E_0^u = L_{\pi(p)-1} \circ \dots \circ L_0 E_0^u = E_0^u$. Como estamos em dimensão dois, e como p é hiperbólico para \bar{g} , usando o Lema C.6, vemos que E_0^u é o subespaço instável de $D\bar{g}^{\pi(p)}(p)$.

Finalmente, usando o Lema C.3 vamos estimar o ângulo β entre $E_m^s(\bar{g})$ e $E_m^u(\bar{g})$, para m grande.

Sejam,

$$u_1 = L_m(u) = Dg^m(p)v + \delta(1 + \delta)^m Dg^m(p)v, \text{ e}$$

$$u_2 = L_m(\delta v) = \delta(1 + \delta)^m Dg^m(p)v.$$

Então, pelo Lema C.3, obtemos

$$\begin{aligned} \|Dg^m(p)v\| &= \|u_1 - u_2\| \geq \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \|u_1\| \\ &\geq \frac{\beta}{1+\beta} (\delta(1 + \delta)^m \|Dg^m(p)v\| - \|Dg^m(p)u\|) \end{aligned}$$

Donde,

$$1 \geq \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{\delta(1 + \delta)^m}{2} - 1\right),$$

pois

$$\frac{1}{2} \|Dg^m(p)u\| \leq \|Dg^m(p)v\|.$$

Assim, temos que

$$\beta \leq \frac{2}{\delta(1 + \delta)^m - 4} \leq \gamma,$$

desde que que m seja grande o bastante para que $\delta(1 + \delta)^m \geq 4 + \frac{2}{\gamma}$. o que pode ser feito, pois $\pi(p)$ pode ser tomado tão grande quanto se queira, conforme observamos no início da prova. Isto contradiz a proposição C.5. \square

A proposição C.7 estabelece a dominação pelo seguinte exercício, cuja solução é idêntica à do lema 4.19.

Exercício C.8. *Seja Λ um conjunto f -invariante e $T_\Lambda M = E \oplus F$ uma decomposição df -invariante tal que: existe um $n_0 > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ existe n de modo que*

$$\|Df^n(x)|_E\| \|Df^{-n}(f^n(x))|_F\| < \frac{1}{2}.$$

Prove que $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada.

Apêndice D

Soluções e Sugestões Para os Exercícios

Capítulo 1

Dica para o exercício 1.3. Por propriedades conhecidas da aplicação exponencial o mapa $h : N_y \times \mathbb{R} \rightarrow M$, definido por $h(v, s) = X_s(\exp v)$ é um difeomorfismo local em y . Note que o mapa de Poincaré em coordenadas exponenciais é dado por $P = \pi \circ h^{-1} \circ X_t \circ \exp|_{N_x(\delta)} : N_x(\delta) \rightarrow N_y(\delta)$, onde δ é pequeno e $\pi : N_y \times \mathbb{R} \rightarrow N_y$ é a projeção canônica. Assim $DP(0) = P'_X(x)$. \square

Dica para o exercício 1.17. Basta usar a fórmula de Liouville (veja [70]) e mudança de variáveis para integrais.

$$\det(DX_t(x)) = e^{\int_0^t \operatorname{div} X(X_s(x)) ds}.$$

\square

Capítulo 3

Dica para o exercício 3.6. Note que um ponto do ciclo é errante. Use os argumentos do teorema 2.4 para criar um campo Y próximo com um 1-ciclo

próximo a este ponto. Aplique o teorema de Birkhoff-Smale para encontrar órbitas periódicas. \square

Solução para o Exercício 3.11. Seja $Y_0 \in \mathcal{R}$ qualquer, provemos que F é semicontínua inferiormente em Y_0 . Dado V aberto de M tal que $V \cap F(Y_0) \neq \emptyset$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap F_N(Y_0) \neq \emptyset$. Da semicontinuidade inferior de F_N existe uma vizinhança U de Y_0 tal que $V \cap F_N(Y) \neq \emptyset$ para todo $Y \in U$. Como $F_N(Y) \subset F(Y)$ temos que $V \cap F(Y) \neq \emptyset$ como queríamos. \square

Dica para o exercício 3.18. Reflexividade segue do teorema da variedade estável. Simetria é óbvio. Para provar a transitividade use o λ -lema. \square

Solução para o Exercício 3.25. Apesar da solução um pouco longa, o exercício não é difícil. Como o resultado que ele fornece é importante em partes substanciais do livro, decidimos colocar uma solução completa aqui.

Note primeiramente, que como Λ é aproximado por órbitas periódicas temos que $\text{Ind}(\Lambda)$ não é 0 nem $d - 1$.

A existência de um ponto em K fora de Λ é a chave da solução. Isto força a existência de um ponto b cuja órbita futura fica perto de Λ , mas cuja órbita passada se afasta de Λ . De fato, tome U uma vizinhança qualquer de Λ (note que podemos reduzir esta vizinhança caso seja necessário). Seja $a \in K - \Lambda$. Como $a \notin \Lambda$, podemos supor que $a \notin U$, e como Λ é livre de singularidades, podemos supor também que $U \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Além disso, podemos supor que o invariante maximal de U , com respeito ao campo X , é um conjunto hiperbólico de índice $\text{Ind}(\Lambda)$, via robustez de conjuntos hiperbólicos. Em particular, qualquer compacto invariante que aparecer em U será um conjunto hiperbólico de índice $\text{Ind}(\Lambda)$. Por fim, iremos supor que quaisquer duas órbitas periódicas em U são homoclinicamente relacionadas, via a Proposição 3.21 já que Λ é transitivo por cadeias. Tome também vizinhanças menores $\bar{V} \subset V' \subset \bar{V}' \subset U$ e uma bola $B(a, r)$ disjunta de U , que vão funcionar como margens de segurança para garantir que a órbita futura de b não saia de U .

Como $O(q_n) \rightarrow K$, existem $x_n, y_n \in O(q_n)$, com $x_n \rightarrow a$ e $d(y_n, \Lambda) \rightarrow 0$. Podemos supor que $x_n \in B(a, r)$ e $y_n \in V$ para todo n . Como x_n e y_n são pontos de uma mesma órbita periódica, pelo Teorema da Alfândega, existem $t_n > 0$ tais que $X_{[-t_n, 0]}(y_n) \subset \bar{V}$ e $X_{-t_n}(y_n) \in \partial V$ (confira a figura D.1 abaixo).

Seja $b \in \partial V$ um ponto de acumulação da sequência $X_{-t_n}(y_n)$. Se $t_n \rightarrow \infty$ então pela continuidade do fluxo teríamos pontos de Λ próximos a ∂V , o

que é um absurdo uma vez que Λ está compactamente contido em V . Isso implica que $O^+(b) \subset \bar{V}$. Além disso, como b é ponto de acumulação da sequência $X_{-n}(y_n)$ temos que $b \in K \cap U - (\Lambda \cup \text{Sing}(X))$.

A conclusão do exercício depende da recorrência desse ponto. Se $b \notin \omega(b)$, então fazendo $b = x$, pela Proposição 3.22, obtemos diretamente a conclusão desejada.

Se $b \in \omega(b)$, mas b não é periódico, então b pertence a um conjunto hiperbólico de índice $\text{Ind}(\Lambda)$ e é recorrente. Pelo *shadowing Lemma*, b é acumulado por órbitas periódicas $O(p_n)$ arbitrariamente próximas de $\omega(b)$, logo inteiramente contidas em U donde possuem índice $\text{Ind}(\Lambda)$. Além disso, tomando $p = p_1$, todos os p_n são homoclinicamente relacionados entre si, pois estão em U . Por um argumento semelhante àquele aplicado no início da prova da Proposição 3.22, concluímos que $b \in \overline{W^s(O(p))}$. Basta tomar $x = b$ novamente.

Por fim, se $b \in \omega(b)$ e é periódico, procedemos da seguinte forma. Como K intersecta U^c , ele não pode coincidir com $O(b) \cup \Lambda$. Assim devem existir pontos de K arbitrariamente próximos de b , mas fora da órbita de b , cuja órbita futura acompanha a órbita de b . Ou seja, existem pontos em $K \cap W_\epsilon^{ss}(b) - O(b)$. Escolha x como um desses pontos, e $p = b$. É claro que essa escolha cumpre as condições do exercício. E isto termina a prova. \square

Capítulo 4

Solução do exercício 4.5. Basta notar que $P_X^{-t}(X_t(x)) = (P_X^t(x))^{-1}$, pois daí obtemos que

$$\|P_X^t(x)|_{N^s}\| \|P_X^{-t}(X_t(x))|_{N^u}\| \leq C e^{-\lambda t}$$

é equivalente a

$$\|P_X^t(x)|_{N^s}\| \| (P_X^t(x)|_{N^u})^{-1} \| \leq C e^{-\lambda t},$$

e como $\| (P_X^t(x)|_{N^u})^{-1} \| = \frac{1}{m(P_X^t(x)|_{N^u})}$, o exercício segue. \square

Dica para o exercício 4.8. Como não é difícil ver, $v \in E_j^\sigma(\xi) \Leftrightarrow v \in E_i^\sigma(\xi)$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, onde $\sigma = s, u$, e portanto $E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^N$ para algum $j \in \mathbb{Z}$ implica $E_i^s(\xi) \oplus E_i^u(\xi) = \mathbb{R}^N$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. \square

Prova do exercício 4.17. Basta mostrar que uma destas inclusões é verdadeira: $E(x) \subset D^s(x)$ ou $D^s(x) \subset E(x)$.

Do contrário, existiriam vetores $u \in E(x) - D^s(x)$ e $v \in D^s(x) - E(x)$. Mais ainda, podemos escrever $v = v^1 + \oplus v^2$ tal que $v^1 \in E(x)$, $v^2 \in F(x)$ e $v^2 \neq 0$. Mas então, por dominação teríamos:

$$\frac{\|P_X^t(x).u\|}{\|P_X^t(x).v\|} \leq \frac{\|P_X^t(x).u\|}{\|P_X^t(x).v^2\| - \|P_X^t(x).v^1\|} = \frac{\frac{\|P_X^t(x).u\|}{\|P_X^t(x).v^2\|}}{1 - \frac{\|P_X^t(x).v^1\|}{\|P_X^t(x).v^2\|}} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow +\infty$. E isto contradiz o fato de que $u \notin D^s(x)$ e $v \in D^s(x)$. \square

Capítulo 5

Dica para o exercício 5.5. Basta usar o lema 4.19. \square

Solução do exercício 5.11. Como dissemos no texto é suficiente estabelecer o seguinte Lema Numérico de Pliss:

Lema D.1 (Pliss). *Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $H > 0$ existem N_0 , e δ positivos de forma que se a_1, \dots, a_N são números reais, com $N \geq N_0$ tais que*

$$\sum_{i=1}^N a_i \leq N\lambda \text{ e } |a_i| \leq H, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

então existem os tempos hiperbólicos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N$ os quais satisfazem

$$\sum_{i=n_j+1}^n a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \epsilon)$$

para todos $j = 1, \dots, l$ e $n_j < n \leq N$. Além disso, o número l de tempos hiperbólicos cumpre $l \geq N\delta$.

A idéia por trás do lema é muito simples: como só são permitidas sequências *uniformemente limitadas*, se a quantidade de termos é *muito grande* os termos não podem, a maioria, dominar $\lambda + \epsilon$. Imagine que temos 1 milhão de termos dominando $\lambda + \epsilon$, logo a soma desses termos domina $10^6\epsilon + 10^6\lambda$. Digamos que só restem 5 termos. Cada um deles no máximo subtrai H . Se, por exemplo o nosso número de termos é tal que $10^6\epsilon > 7H$, a soma total não será dominada por $N\lambda$.

Isso já dá uma pista razoável de como atacar o problema. De fato, a parte realmente difícil é estimar por baixo o número de tempos hiperbólicos.

Para provar o lema, começamos definindo os inimigos: $b_i = a_i - (\lambda + \epsilon)$. Note que se b_i é negativo para todo $i \geq n$ então n é um tempo hiperbólico! Podemos exigir um pouco menos considerando as somas $S_n = \sum_{i=1}^n b_i$.

Definimos os tempos hiperbólicos com sendo os inteiros $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N$ tais que $S_{n_j} \geq S_n$, para todo $n \geq n_j$ e de tal forma que l é o maior número possível desses tempos, ou seja, entre 1 e n_1 e n_j e n_{j+1} não existem tempos hiperbólicos para todo $j = 1, \dots, l$.

Observe que esses inteiros realmente cumprem as conclusão do lema, pois $n \geq n_j$ implica

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_j+1}^n a_i &= \sum_{i=n_j+1}^n b_i + (n - n_j)(\lambda + \epsilon) = (S_n - S_{n_j}) + (n - n_j)(\lambda + \epsilon) \\ &\leq (n - n_j)(\lambda + \epsilon). \end{aligned}$$

Agora vamos a parte difícil, que é estimar a quantidade de tempos hiperbólicos. Note que o último tempo sempre é hiperbólico, ou seja $n_l = N$. Além disto,

$$S_N = \sum_{i=0}^N a_i - N(\lambda + \epsilon) \leq N\lambda - N\lambda - N\epsilon \leq -N\epsilon.$$

Por outro lado, como $|a_1| \leq H$, temos

$$S_1 = b_1 = a_1 - (\lambda + \epsilon) \geq -(H + \lambda + \epsilon).$$

Portanto, se

$$N > \frac{H + \lambda + \epsilon}{\epsilon} \tag{D.1}$$

teremos $S_1 > -N\epsilon \geq S_N$. E isto implica que, se $S_m = \max\{S_n; 1 \leq n \leq N\}$, então $1 \leq m < N$. Daí, m é um tempo hiperbólico não trivial ($\neq N$).

Daqui em diante iremos obter a estimativa sobre o valor de l . Afir-mamos que $S_{n_{j+1}} \geq S_{n_j+1}$. Com efeito, suponha que isto não aconteça. En-tão,

$$S_{n_{j+1}} > S_n, \quad \forall n \geq n_{j+1},$$

pela definição de n_{j+1} . No entanto, $n_j + 1$ não é um tempo hiperbólico, e portanto tem que existir $n_{j+1} > k_1 > n_j + 1$ tal que $S_{k_1} > S_{n_{j+1}}$. Pela

mesma razão, tem que existir $n_{j+1} > k_2 > k_1$ tal que $S_{k_2} > S_{k_1}$. Por indução, obtemos uma sequência $n_{j+1} > k_p > k_{p-1} > \dots > k_2 > k_1$. No entanto, como p não pode ser maior que $n_{j+1} - (n_j + 1)$, isto nos levará a um absurdo, a menos que $n_{j+1} = (n_j + 1)$, o que pela hipótese que fizemos, também nos leva a um absurdo.

Pelo mesmo argumento, podemos provar que $S_{n_l} \geq S_1$.

Com isso temos que se $1 < j \leq l$, então

$$S_{n_{j+1}} \geq S_{n_j+1} = S_{n_j} + b_{n_j+1} \geq S_{n_j} - (H + |\lambda| + \epsilon),$$

via a desigualdade triangular, pelo que obtemos (por indução)

$$S_{n_j} \geq S_{n_1} - (j - 1)(H + |\lambda| + \epsilon).$$

Em particular,

$$S_{n_l} \geq S_{n_1} - (l - 1)(H + |\lambda| + \epsilon).$$

Mas como $n_l = N$, segue que

$$\begin{aligned} -\epsilon N &\geq S_N \geq S_{n_1} - (l - 1)(H + |\lambda| + \epsilon) \geq S_1 - (l - 1)(H + |\lambda| + \epsilon) \\ &\geq -H - \lambda - \epsilon - (l - 1)(H + |\lambda| + \epsilon) = -l(H + |\lambda| + \epsilon), \end{aligned}$$

ou seja, provamos que $\frac{l}{N} \geq \frac{\epsilon}{H + |\lambda| + \epsilon}$.

Para completar a prova do lema, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{H + |\lambda| + \epsilon}$. \square

Dica para o exercício 5.10. Por hipótese, Λ é aproximada por fontes $O(p_n)$ de campos Y_n com $Y_n \rightarrow X$. Seja \tilde{T} e $\tilde{\eta} > 0$ dados pelo teorema 4.16. Considere a medida orbital gerada por

$$\frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} \delta_{(Y_n)_{i\tilde{T}}(p_n)}.$$

Então μ_n é Y_n -invariante e suportada em $O_{Y_n}(p_n)$. Pela força uniforme dada pelos teoremas 4.16 e 4.13 temos que

$$\frac{1}{\tilde{T}} \int \log m(P_{Y_n}^{\tilde{T}}(\cdot)) d\mu_n(\cdot) \geq \tilde{\eta}.$$

Se μ é ponto de acumulação de μ_n então μ é medida invariante de X suportada em Λ tal que

$$\frac{1}{\tilde{T}} \int \log m(P_X^{\tilde{T}}(\cdot)) d\mu(\cdot) \geq \tilde{\eta}.$$

Pelo teorema de Decomposição ergódica, podemos supor que μ é ergódica. Pelo teorema de Birkhoff existe um ponto recorrente b tal que

$$\frac{1}{\bar{T}N} \sum_{j=0}^{N-1} \log m(P_{\bar{T}}^{\bar{T}}(X_{\bar{T}j}(b))) \geq \eta.$$

Daí usamos argumentos semelhantes aos do teorema de Pliss. Ou seja, no passado, uma bola B em torno de b voltará inteiramente contida em B , isto por que a órbita passada de b voltará cada vez mais próxima de b e sofrendo contração pela estimativa acima. O mesmo valerá para Y_n com n grande, uma vez que $Y_n \rightarrow X$. Assim, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer [49], teríamos um ponto periódico dentro da bacia de repulsão de $O(p_n)$ e isto daria uma contradição. O leitor também poderia resolver este exercício usando o *ergodic closing lemma* conforme as técnicas do capítulo 5. \square

Dica para o exercício 5.14. Em suma, siga os passos da demonstração do teorema 5.9. \square

Solução do exercício 5.16. Usando a mesma prova do lema 4.19, o leitor pode verificar que para mostrar que E é contrator, basta provar que para cada $x \in \Gamma$ temos que existe $n > 0$ tal que

$$\prod_{j=0}^{n-1} \|Df^m(f^{mj}(x))|E\| < 1.$$

Se não, existe $x \in \Gamma$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df^m(f^{mj}(x))|E\| \geq 0.$$

Considere a medida orbital ν que é um ponto de acumulação da sequência $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^{mj}(x)}$. Então ν é f^m -invariante e suportada em Γ , além disso:

$$\begin{aligned} \int \log \|Df^m|E\| d\nu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \log \|Df^m|E\| d\mu_{n_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \log \|Df^m(f^{mj}(x))|E\| \geq 0. \end{aligned}$$

Mas então existe uma medida μ da decomposição ergódica de ν tal que

$$\int \log \|Df^m|E\| d\mu = 0.$$

E isto contradiz a hipótese. \square

Capítulo 6

Dica para o exercício 6.4. Seja $T_\Lambda M = E \oplus F$ a decomposição dominada de índice constante. Por Tietze, existe uma vizinhança U de Λ tal que podemos estender esta decomposição a uma contínua em U , $T_U M = \tilde{E} \oplus \tilde{F}$ (não necessariamente invariante).

Considere o campo de cones C_α em U dado por

$$C_\alpha(x) = \{v; \|v_F\| \geq \alpha \|v_E\|\}$$

onde $v = v_F + v_E$, $v_F \in \tilde{F}$ e $v_E \in \tilde{E}$. A propriedade de dominação implica que existe $T > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$, $DX_t(C_1(x)) \subset C_2(X_t(x))$. Como consequência, existe uma vizinhança $V \subset U$ de Λ tal que para todo $y \in V$, $DX_t(C_1(y)) \subset C_{2-\epsilon}(X_t(y))$. Com isto conclua que o maximal invariante de X em V possui uma decomposição dominada de mesmo índice da inicial. \square

Capítulo 7

Solução do exercício 7.2. Basta definir A como o conjunto formado pelos subconjuntos compactos, invariantes, não hiperbólicos e não vazios. Note que A é não vazio por hipótese. Ordene pela A pela inclusão.

Vamos mostrar que A possui um elemento minimal, via o lema de Zorn. Para isto, vamos supor que existe uma cadeia

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_k \supset \dots,$$

formada por elementos de A . Por compacidade e invariância dos Λ_k 's, temos que $\Lambda := \bigcap_k \Lambda_k$ é um conjunto compacto e invariante não-vazio. Se Λ fosse hiperbólico, então existiria uma vizinhança U de Λ tal que qualquer conjunto compacto invariante nesta vizinhança é hiperbólico. Mas então existiria $\Lambda_{k_0} \subset U$, e isto seria uma contradição, uma vez que todos os Λ_k 's são não-hiperbólicos.

Assim, pelo lema de Zorn, A possui um elemento minimal Λ que é o conjunto procurado. \square

Capítulo 8

Dica para o exercício 8.4. Observe que uma das interseções do ciclo heterodimensional é transversal. Pelo λ -Lema temos então que esses discos da interseção transversal não acumulam nas órbitas periódicas, no caso estamos falando de dois discos um na parte estável e outro na parte instável. Como foi fixado uma vizinhança das órbitas, isto diz que existe um tempo mínimo N no qual esses discos ficam na vizinhança da órbita. Mais ainda, eles passam próximo dos pontos x e y . Agora por um argumento simples de continuidade uniforme do fluxo concluímos a demonstração. \square

Dica do exercício 8.6. Basta observar que o fluxo é contínuo no tempo e para campos C^1 próximos obtemos pedaços compactos de órbitas próximas. Com essas duas observações é fácil concluir que a reparametrização está próxima da identidade. \square

Capítulo 10

Dica do exercício 10.8. Basta mostrar que para todo $p \in \Lambda$, $W^u(p) \in \Lambda$. Se não, existe $p' \in \Lambda$ e $x \in W^u(p') - \Lambda$. Existe então uma vizinhança U de Λ tal que $x \notin U$. Note que para toda vizinhança $V \subset U$ existe $t_V > 0$ tal que $X_{-t_V}(x) \in V$. Isso contradiz o fato de Λ ser Lyapunov estável. \square

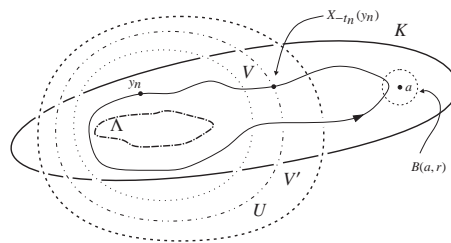
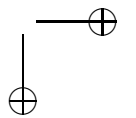
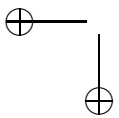
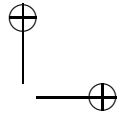
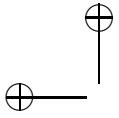


Figura D.1:



Referências Bibliográficas

- [1] Abdenur, F. Bonatti, Ch. Crovisier, S. Díaz, L. J. Wen, L. *Periodic points and homoclinic classes*. Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), no. 1, 1-22.
- [2] Alves, J. Bonatti, C. Viana, M. *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*. Invent. Math. 140 (2000), no. 2, 351-398.
- [3] Aoki, N. *The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycles*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 23 (1992), no. 1-2, 21-65.
- [4] Araújo, V. Arbieto, A. Salgado, L. *On invariant decompositions, Dominated Splittings and Sectional-Hyperbolicity*. Preprint.
- [5] Araújo, V. Pacifico, M. *Three-dimensional flows* Springer, (2010)
- [6] Arbieto, A. Catalan, T. *Hyperbolicity in the volume preserving scenario*. Preprint.
- [7] Arbieto, A. Matheus, C. *A pasting lemma and some applications for conservative systems*. Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), no. 5, 1399-1417.
- [8] Arbieto, A. Morales, C. *Dynamics of Partial Actions* Publicações do 27o CBM - (2009)
- [9] Arbieto, A. Morales, C. *A Dichotomy for Higher-Dimensional Flows*. Preprint.
- [10] Arnaud, M. C. *Le “closing lemma” en topologie C^1* . Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 74 (1998)

- [11] Arroyo, A. Rodriguez-Hertz, F. *Homoclinic bifurcations and uniform hyperbolicity for three-dimensional flows*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), no. 5, 805-841.
- [12] Bamón, R. Labarca, R. Mañé, R. Pacifico, M. *The explosion of singular cycles*. Publ. Math IHES No. 78 (1993), 207-232.
- [13] Bessa, M. *A generic incompressible flow is topological mixing*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 21-22, 1169-1174.
- [14] Bessa, M. Rocha, J. *On C^1 -robust transitivity of volume-preserving flows*. J. Differential Equations 245 (2008), no. 11, 3127-3143.
- [15] Bessa, M. Rocha, J. *Three-dimensional conservative star flows are Anosov*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 26 (2010), no. 3, 839-846.
- [16] Bessa, M. Ferreira, C. Rocha, J. *On the stability of the set of hyperbolic closed orbits of a Hamiltonian*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 149 (2010), no. 2, 373-383.
- [17] Bonatti, C. Crovisier, S. *Réurrence et généricité*. Invent. Math. 158 (2004), no. 1, 33-104.
- [18] Bonatti, C. Díaz, L. *Robust heterodimensional cycles and C^1 -generic dynamics*. J. Inst. Math. Jussieu 7 (2008), no. 3, 469-525.
- [19] Bonatti, C. Gourmelon, N. Vivier, T. *Perturbations of the derivative along periodic orbits*. Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 5, 1307-1337.
- [20] Carballo, C. Morales, C. Pacifico, M. *Homoclinic classes for generic C^1 vector fields*. Ergodic Theory Dyn. Sys. 23 (2003), no. 2, 403-415.
- [21] de Melo, W. Palis, J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Publicação IMPA, Projeto Euclides, (1978).
- [22] Díaz, L. *Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles*. Ergodic Theory Dynam. Systems 15 (1995), no. 2, 291-315.
- [23] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. Publicação IMPA, Projeto Euclides, (2008)

- [24] Doering, C. *Persistently transitive vector fields on three-dimensional manifolds*. Pitman Res. Notes Math. Ser., 160, Longman Sci. Tech., Harlow, (1987), 59-89.
- [25] Doering, C. *Campos de vetores sem pontos errante em variedades tridimensionais compactas*. Tese, IMPA (1979)
- [26] Ferreira, C. *Stability properties of divergence-free vector fields*. Preprint. Arxiv.
- [27] Franks, J. *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*. Trans. Amer. Math. Soc. 158, (1971), 301-308
- [28] Gan, S. *A generalized shadowing lemma*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 8 (2002), no. 3, 627-632
- [29] Gan, S. *Another proof for C^1 stability conjecture for flows*. Science in China (Series A) 41 (1998), no. 10, 1076–1082.
- [30] Gan, S. Wen, L. *Nonsingular star flows satisfy Axiom A and the no-cycle condition*. Invent. Math. 164 (2006), no. 2, 279-315.
- [31] Gan, S. Wen, L. Zhu, S. *Indices of singularities of robustly transitive sets*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), no. 3, 945–957.
- [32] Hayashi, S. *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjectures for flows*. Ann. of Math. (2) 145 (1997), no. 1, 81-137.
- [33] Hayashi, S. *Diffeomorphisms in \mathcal{F}^1 satisfy Axiom A*. Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), no. 02, 233-253.
- [34] Hirsch, M. Pugh, C. Shub, M. *Invariant manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977).
- [35] Labarca, R. Pacífico, M. *Stability of singularity horseshoes*. Topology 25 (1986), no. 3, 337-352.
- [36] Li, C. Wen, L. *X^* plus Axiom A does not imply no-cycle*. J. Differential Equations 119 (1995), no. 2, 395-400.
- [37] Li, Y. *Chaos and shadowing lemma for autonomous systems of infinite dimensions*. J. Dynam. Diff. Eq. 15 (2003), no.4, 699-730.

- [38] Liao, S. T. *Obstruction sets I*. Acta Math. Sinica 23 (1980), no. 03, 411-453.
- [39] Liao, S. T. *Obstruction sets II*. Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis 2 (1981), 1-36.
- [40] Liao, S. T. *On the stability conjecture*. Chinese Ann. Math. 1 (1980), no. 1, 9-30.
- [41] Mañé, R. *Introdução à Teoria Ergódica*. Projeto Euclides, IMPA, (1983).
- [42] Mañé, R. *Quasi-Anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 351-370.
- [43] Mañé, R. *Persistent manifolds are normally hyperbolic*. Trans. Amer. Math. Soc. 246, (1978), 261-283
- [44] Mañé, R. *An ergodic closing lemma*. Ann. of Math (2), (1982), no. 3, v.116, 503-540.
- [45] Mañé, R. *A proof of the C^1 Stability Conjecture*. Publ. Math. I. H. E. S., (1988), 66, 161-210.
- [46] Mañé, R. *Contributions to the stability conjecture*. Topology 17 (1978), no. 4, 383-396.
- [47] Mañé, R. *Expansive diffeomorphisms*. Lect. Notes in Math v. 468. Springer (1975), 162-174
- [48] Metzger, R Morales, C. *Sectional-hyperbolic systems*. Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 5, 1587-1597
- [49] Milnor, J. *Topology from the differentiable viewpoint* Princeton University Press, (1997)
- [50] Morales, C. Pacifico, M. *A dichotomy for three-dimensional vector fields*. Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 5, 1575-1600.
- [51] Morales, C. Pacifico, M. Pujals, E. *Singular hyperbolic systems*. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 11, 3393-3401.

- [52] Morales, C. Pacifico, M. Pujals, E. *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers.* Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 2, 375-432.
- [53] Morales, C. *Singular-Hyperbolic Attractors With Handlebody Basins.* Journal of Dyn. and Control Syst. Vol. 13, (2007), No. 1, 15-24.
- [54] Newhouse, S. *Hyperbolic limit sets.* Trans. AMS 167 (1972), 125-150.
- [55] Palis, J. *Ω -explosions.* Proc. Amer. Math. Soc. 27 (1971), 85-90.
- [56] Palis, J. *On the C^1 Ω -stability conjecture.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 211-215.
- [57] Peixoto, M. *Structural stability on two-dimensional manifolds.* Topology 1 (1962), 101-120.
- [58] Pliss, V. *Analysis of the necessity of conditions of Smale and Robbin for structural stability for periodic systems of differential equations.* Diff. Uravnenija 8 (1972), 972-983.
- [59] Pliss, V. *On a conjecture due to Smale.* Diff. Uravnenija 8 (1972), 268-282.
- [60] Pugh, C. *The C^1 Closing lemma.* Amer. J. Math. 89 (1967), 956-1009
- [61] Pugh, C. *An improved closing lemma and a general density theorem.* Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021
- [62] Pugh, C. Robinson, C. *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians.* Ergodic Theory and Dynam. Systems 3 (1983), no. 2, 261-313.
- [63] Pujals, E. and Sambarino, M. *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms.* Ann. of Math. (2) v.151, (2000), no. 3, 961-1023.
- [64] Robinson, C. *C^r -structural stability implies Kupka-Smale.* Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, (1973), 443-449.
- [65] Sacker, R. Sell, G. *Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems I.* J. Diff. Eq. 15 (1974), 429-458.

- [66] Selgrade, J. *Isolated invariant sets for flows on vector bundles*. Trans. Amer. Math. Soc. 203 (1975), 359-390.
- [67] Shilnikov, L. Turaev, D. *An example of a wild strange attractor*. (Russian) Mat. Sb. 189 (1998), no. 2, 137-160; translation in Sb. Math. 189 (1998), no. 1-2, 291-314
- [68] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [69] Sodero, T. *Sectional-Anosov flows on certain compact 3-manifolds*. Preprint.
- [70] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias Projeto Euclides*, IMPA. (1979)
- [71] Toyoshiba, H. *A property of vector fields without singularities in $\mathcal{G}^1(M)$* . Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no.1, 303-314.
- [72] Toyoshiba, H. *Vector fields in the interior of Kupka-Smale systems satisfy Axiom A*. J. Differential Equations 177 (2001), no. 1, 27-48.
- [73] Vivier, T. *Projective hyperbolicity and fixed points*. Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 3, 923-936.
- [74] L. Wen, *On the preperiodic set*. Discrete Contin. Dynam. Systems 6 (2000), no. 1, 237-241
- [75] Wen, L. *A uniform C^1 connecting lemma*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 8 (2002), no. 1, 257-265
- [76] Wen, L. Xia, Z. *C^1 connecting lemmas*. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 11, 5213-5230
- [77] Wen, L. *The selecting lemma of Liao*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 20 (2008), no. 1, 159-175
- [78] Zuppa, C. *Régularisation C^∞ des champs vectoriels qui préservent l'élément de volume*. Bol. Soc. Brasil. Mat. 10 (1979), no. 2, 51-56.