Hiperbolicidade Essencial em Superfícies

Bruno Rodrigues Santiago

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Rio de Janeiro
Julho de 2011

Hiperbolicidade Essencial em Superfícies

Bruno Rodrigues Santiago
Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza - IM/UFRJ

Prof. Jairo Bochi - PUC/RJ

Profa. Maria José Pacífico - IM/UFRJ

Prof. Carlos Morales - IM/UFRJ (Suplente)

Rio de Janeiro
Julho de 2011

Agradecimentos

A ordem na qual os nomes aparecem nesta lista é cronológica, exceto a última pessoa, que não poderia, jamais, deixar de ser a mais importante.

Um mestrado em matemática jamais teria acontecido sem a ajuda e o incentivo que eu recebi de meu tio Francisco. A oportunidade que ele me deu não só foi responsável por eu conseguir entrar na universidade, como foi fundamental para que eu descobrisse como é divertido estudar matemática. Agradeço também ao meu tio Vítor, pelo apoio durante os meus estudos e porque ele foi muito importante para minha formação, e nunca me deixou esquecer de que meus estudos foram custeados pela sociedade. Agradeço também ao Fabrício, por ter sido um grande amigo.

Agradeço a minha orientadora na graduação, Profª Stefanella Boatto, por ter me dado a primeira oportunidade na gradução, e por ter sempre me apoiado a progredir.

Agradeço à CAPES e ao CNpQ pelo apoio financeiro.

Agradeço muito a todos os meus amigos da UFRJ, Davi, Danilo, Cláudio, Hugo, João, Gabriel, Nicolau, Daniel, Pedro, Filipe, Roberto, Paloma, Tatiana, Cecília e Bernardo. O talento e a competência deles transformou este lugar num paraíso da boa matemática, e num ambiente perfeito para quem deseja aprender. Pode não parecer, mas faz uma diferença brutal quando se pode comartilhar a alegria de comprender um teorema bonito, uma demonstração elegante, ou uma técnica poderosa.

Agradeço ao Alexander, por ser um orientador brilhante que me ensinou muita matemática e me proprcionou, com isso, momentos de inesquecível alegria. Também por ele ser um grande matemático e um grande amigo em todos os momentos do mestrado. E que venha o doutorado.

Agradeço à Nathália, porque eu a amo, e porque ela sempre me faz ir mais longe e dar o mlehor de mim.

Ficha Catalográfica

Santiago, Bruno Rodrigues.
S586l Hiperbolicidade Essencial em Superfícies/ Bruno Rodrigues Santiago. - Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.
viii,123f.: 30cm.
Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.
Referências Bibliográficas: f.121-123.
1. Atratores (Matemática)-Tese. 2. Dinâmica 3. Teoria Ergódica. I.Mendoza, Alexander Eduardo Arbieto II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Título.

Hiperbolicidade Essencial em Superfícies

Bruno Rodrigues Santiago

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

O objetivo deste trabalho é estudar o problema da existência de atratores hiperbólicos para difeomorfismos em superfícies. Com as fecundas técnicas introduzidas por Mañé na década de 80, é possível dar uma solução completa para o problema: todo difeomorfismo genérico em superfícies ou bem possui infinitos poços, ou possui um número finito de atratores hiperbólicos cuja união das bacias de atração cobre um conjunto com medida de Lebesgue total. A segunda condição ganhou importância recentemente, com os trabalhos de S. Crovisier e E. Pujals [12] sobre a conjectura de Palis, e recebeu o nome de hiperbolicidade essencial.

O teorema cuja prova apresentamos foi dado por A. Araújo, em sua tese de doutorado, [3]. No entanto, o trabalho de E. Pujals e M. Sambarino [33] sobre a conjectura de Palis em superfícies, introduziu novas técnicas que permitem simplificar uma parte substancial da prova original de Araújo. É esta demonstração que apresentamos aqui. O objetivo secundário do trabalho é usar as idéias e ferramentas da prova para obter outros resultados sobre difeomorfismos em superfícies.

Essential Hyperbolicity on Surfaces

Bruno Rodrigues Santiago

Advisor: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

The main purpose of this work is to answer the question concerning the existence of hyperbolic attractors on surfaces. With the profound techniques introduced by Mañé in the eighties, one can give a complete solution to the following question: for a generic diffeomorphism on a surface, either it has an infinite number of sinks, or a finite number of hyperbolic attractors whose union of the basins of attraction covers a full Lebesgue measure set. The second condition gains importance recently, with the work of S. Crovisier and E. Pujals [12] about Palis' Conjecture, and received the name of essential hyperbolicity.

The theorem that we present here was originally proved by A. Araújo, in his doctoral thesis [3]. However, with the work of E. Pujals and M. Sambarino [33] about Palis' Conjecture on surfaces, new techniques were introduced. These techniques allows us to make substantial simplifications in the original proof of Araújo. Here, we present this simplified proof. The secondary purpose of this monograph is to use the ideas and tools developed along the proof, to obtain other results concerning the dynamics of diffeomorphisms on surfaces.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos tem como um de seus principais objetivos descrever o comportamento assintótico das órbitas, para a maioria dos sistemas. Este propósito, bem como a teoria em si, possuem uma longa história que remonta a Newton e as leis da mecânica clássica expressas em termos de equações diferencias. Acreditava-se que resolvendo tais equações, poderia chegar-se ao pleno conhecimento sobre o universo, tanto no passado como futuro.

Um dos exemplos mais expressivos desta crença, foi sem dúvida o *problema de n-corpos*: o sistema de equações diferenciais originado ao aplicar-se a segunda lei de Newton a um conjunto de n massas no espaço sujeitas somente a sua atração gravitacional mútua. Este problema, modela por exemplo o nosso sistema solar, e portanto tem grande importância. Resolver a equação significa determinar a posição e a velocidade de cada partícula em cada instante do tempo. Como a mecânica de Newton teve esplendoroso sucesso em explicar diversos fenômenos, esperava-se que mais cedo ou mais tarde uma solução para o problema de n-corpos apareceria. No entanto, mesmo que uma tal solução surgisse, os exemplos foram mostrando que ela poderia ser tão complicada a ponto de ser inútil para a descrição do fenômeno!

Nesse ponto surgiu uma revolução no ponto de vista, liderada pelo matemático francês Henri Poincaré, de que as características interessantes do fenômeno poderiam ser obtidas *analisando-se* a equação, mas sem resolvê-la! Além disso, a dificuldade de se entender exemplos específicos fez com que surgisse uma teoria geral, capaz de gerar resultados que norteiem o entendimento dos exemplos específicos. Esta teoria trata de modo abstrato, tanto as soluções das equações diferenciais, bem como qualquer outra lei matemática que modele situações concretas. Neste trabalho iremos estudar uma questão de fundamental importância dentro dessa teoria, a qual passamos a descrever de modo preciso a seguir.

Definições e Resultados

Neste trabalho, um sistema dinâmico significa um difeomorfismo $f : M \to M$ numa variedade riemanniana M compacta, conexa e sem bordo M. Iremos indicar por $d(x, y)$, com $x,\ y \in M$ a distância induzida pela métrica riemannina. O espaço $\mathrm{Diff}^r(M)$ dos difeomorfismos de classe C^r em M, munido da topologia C^r,

$$d(f, g) = \max\left\{\sup_{x\in M}\{d(f(x), g(x))\}, \sup_{x\in M}\{\|df(x) - dg(x)\|\}, ..., \sup_{x\in M}\{\|d^r f(x) - d^r g(x)\|\}\right\},$$

é um espaço de Baire e portanto todo residual é denso.[1] Dizemos que uma propriedade vale para a *maioria* dos sistemas quando ela vale num residual de $\mathrm{Diff}^r(M)$. Dado um ponto $p \in M$, a *órbita* de p é o conjunto $O(p) = \{f^n(p); n \in \mathbb{Z}\}$. Uma pergunta que norteia quase toda a teoria é qual o comportamento assintótico das órbitas (i.e. quais são os limites de $f^n(p)$ quando o tempo n tende a $+\infty$ ou $-\infty$) de um determinado sistema? Naturalmente, responder a esta pergunta para um sistema arbitrário é impossível, e por isso tentamos respondê-la em residuais de $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Um exemplo de comportamento assintótico de órbitas bem entendido é fornecido pela aplicação $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, dada por $f(x) = \frac{x}{2}$,[2] pois é imediato que $f^n(x) \to 0$, quando $n \to +\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Ou seja, a órbita positiva de todo ponto "morre"na origem. Dada a sua simplicidade, podemos nos perguntar se um comportamento dessa natureza ocorre para a maioria dos sistemas, ao menos localmente. Isto leva a a seguinte definição.

Definição 1.0.1. *Um ponto p é* periódico *quando existe $n > 0$ tal que $f^n(p) = p$. Ao menor valor de n, damos o nome de* período *de p, e o denotamos sempre por $\pi(p)$. Dizemos que um ponto periódico p é um* poço *para f se todos os autovalores de $df^{\pi(p)}(p)$ possuem módulo menor do que* 1*. Denotamos o conjunto de poços de f por $S(f)$.*

Veremos no capítulo 03, que todo poço p admite uma vizinhança U tal que para todo ponto em U, a sua órbita positiva converge para p, de modo semelhante ao exemplo anterior, porém localmente. No entanto, também não é verdade que a maioria dos sistemas sequer possua poços, por exemplo sistemas robustamente transitivos (que serão estudados mais tarde).

Ao invés de olhar para órbitas periódicas, podemos olhar para subconjuntos invariantes. Um compacto $\Lambda \subset M$ é f-invariante, qundo $f(\Lambda) = \Lambda$. Podemos então usar estes conjuntos para generalizar a noção de poço.

Definição 1.0.2. *Um compacto invariante Λ é dito um* atrator *para f, se $f|_\Lambda$ é transitivo*[3] *e existe uma vizinhança U de Λ, dita a* bacia local*, tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $\cap_{n\geq 0} f^n(U) = \Lambda$. A* bacia de atração *de Λ é o conjunto*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U).$$

[1] Ver [13]

[2] Apesar de não estar definida num domínio compacto, o exemplo é instrutivo

[3] Isto significa que existe um ponto $x \in \Lambda$ tal que para todo $p \in \Lambda$ existe uma subsequência da órbita de x, tal que $f^{n_k}(x) \to p$. Em outras palavras, a órbita positiva de x é densa em Λ

A primeira condição significa que Λ não pode ser decompor em partes invariantes fechadas disjuntas e a segunda garante que todo ponto no aberto U morre em Λ no "futuro". A definição mais geral perde um pouco a simpliciadade da motivação original, até mesmo porque, em princípio, não sabemos muito sobre a dinâmica *dentro* de Λ. Por isso, estudamos uma classe especial de atratores: os atratores hiperbólicos. Um conjunto invariante Λ é dito hiperbólico se existe uma decomposição $E^s \oplus E^u$ do fibrado tangente restrito $T_\Lambda M$, tal que $df(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ (similarmente para E^u) e ainda tal que

$$\|df^n(x)|_{E^s}\| \leq C\lambda^n \text{ e } \|df^{-n}(x)|_{E^u}\| \leq C\lambda^n,$$

para todo $x \in \Lambda$. Quando um atrator é hiperbólico, a sua dinâmica é bem entendida, logo a dinâmica de todos os pontos da bacia de atração também é conhecida. Além disso, todo poço é um atrator hiperbólico.[4]

Por isso, uma pergunta importante é se existem sistemas que possuem um número finito de atratores hiperbólicos cuja união das bacias de atração é "grande"em M, por exemplo um conjunto denso. Isto garante que, para a maioria (no sentido topológico) dos pontos em M, o comportamento assintótico é conhecido: ou o ponto pertence a um atrator hiperbólico, e nesse caso sabemos o que pode ocorrer com a sua órbita, ou a sua órbita acaba morrendo num atrator.

Guiados por isto, dizemos que $f : M \to M$ é *essencialmente hiperbólico* se f possui um número finito de atratores hiperbólicos cuja união das bacias de atração cobre um subcojunto de M com medida de Lebesgue total,[5] em particular é aberto e denso. O conceito de hiperbolicidade essencial, surgiu nos trabalhos recentes de S. Crovisier e E. Pujals, [12], muito embora a definição de [12] exija apenas que união das bacias seja aberta e densa em M. Sua importância está ligada a um dos principais problemas atualmente em sistemas dinâmicos, a chamada conjectura de Palis. Iremos tecer alguns comentários sobre este problema em capítulos subsequentes.

O resultado principal deste trabalho, fornece uma resposta parcial a pergunta acima, no caso em que M possui dimensão dois, através de uma dicotomia: ou o sistema é essencialmente hiperbólico, ou então ele admite um número infinito de poços.

Teorema 1.0.3 (Araújo)**.** *Seja M uma superfície. Então, existe um residual $\mathcal{R}$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *tal que todo difeomorfismo $f \in \mathcal{R}$ cumpre uma das seguintes condições*

- *f possui infinitos poços*
- *f é essencialmente hiperbólico*

O teorema de Araújo foi obtido em sua tese de doutorado [3], em 1987. No entanto, com os trabalhos de E. Pujals e M. Sambarino, [33] é possível simplificar uma parte substancial da prova original. Neste trabalho iremos apresentar uma demonstração do teorema de Araújo com esta simplificação.

[4]Isto irá ficar claro no capítulo 03

[5]A medida de Lebesgue em M é obtida usando-se a forma de volume riemanniana.

Um corolário do teorema de Araújo, é que num residual de $\text{Diff}^1(M)$, todo difeomorfismo f admite um atrator. Uma pergunta natrural é se o resultado vale em dimensão mais alta. Esta pergunta foi respondia negativamente, em [7].[6] Outra pergunta natural é se podemos estender o resultado para topologias mais altas. No entanto, isto ainda está muito longe, pois atualmente os resultados de perturbação que temos estão disponíveis apenas na topologia C^1.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 02 apresentamos os principais resultados de teoria ergódica que serão utilizados ao longo do trabalho. Resultados auxiliares sobre este tema também são provados nesse capítulo. No capítulo 03 introduzimos com mais detalhes o conceito de hiperbolicidade, e apresentamos os resultados de dinâmica hiperbólica que usaremos. Embora os dois primeiros capítulos tenham um sabor de *survey*, também são apresentados alguns conceitos e resultados que já vão na direção da prova do teorema de Araújo. Um dos capítulos mais importantes é o capítulo 04, onde falamos um pouco sobre o importante conceito de dominação, e o aplicamos para obter resultados que serão usados na prova do teorema de Araújo. No capítulo 05, apresentamos o resultado de Pujals e Sambarino que irá simplificar uma parte da prova original de Araújo, e cujo papel, essencialmente é obter hiperbolicidade a partir da dominação. No capítulo 06, provamos o teorema de Araújo.

Em todos esses primeiros capítulos o objetivo é que leitor possa ir diretamente ao resultado principal, e por isso algumas demonstrações são deixadas para o apêndice. Em seguida, no capítulo 07 comentamos uma outra prova do teorema de Araújo, que é devida a R. Potrie, e usa resultados muito mais recentes. No capítulo 08 discutimos outros resultados interessantes e importantes que seguem das idéias e técnicas introduzidas ao longo do texto, idéias das demonstrações são apresentadas. Deixamos estes comentários pro final, pois pensamos que poderiam confundir o leitor se colocadas nos capítulos iniciais. Por último, no apêndice apresentamos as demonstrações dos resultados técnicos que foram postergadas.

Notação e Pre-requisitos

Em todo o texto M sempre denotará uma variedade riemanniana compacta, conexa e sem bordo. A partir do capítulo 04, a menos de menção em contrário, M será uma superfície. Os resultados e seções que são verdadeiros em dimensão qualquer, com uma prova análoga ao caso de superfícies, serão explicitados. Como trabalhamos a maior parte do tempo com medidas de probabilidade, adotaremos a convenção de chamá-las simplesmente de medidas. Quando esta convenção não for adotada seremos explícitos.

Para acompanhar o texto, o leitor deve estar familiarizado com as noções básicas sobre variedades diferenciáveis, ao nível de [20], teoria da medida, como exposta na parte 3 de [36] e as noções iniciais de um curso de geometria riemanniana, para as quais os primeiros capítulos de [22] são suficientes. Ao longo do texto, sempre que for necessário, daremos mais referências.

[6] De fato, em [7] os autores provam a existência de um aberto $\mathcal{U}$ em $\text{Diff}^r(M^d)$, com $d > 2$ tal que o conjunto $\{f \in \mathcal{U};\ f \text{ não possui atratores}\}$ é residual.

Capítulo 2

Teoria Ergódica

Como comentamos brevemente na introdução, uma das principais motivações históricas para a teoria moderna de Sistemas Dinâmicos foi o problema de n-corpos. Este é um exemplo de sistema de equações diferenciais ordinárias com a seguinte propriedade notável: se considerarmos o fluxo gerado pelas soluções das equações e deixarmos, por exemplo, um cubo evoluir por esse fluxo, então o volume dele não sofrerá alteração com o tempo, embora sua forma possa mudar. Usando esta propriedade, Poincaré provou o seu famoso Teorema de Recorrência que diz que para a *maioria* dos dados iniciais o sistema retorna a condições arbitrariamente próximas da inicial.

Neste capítulo iremos estudar sistemas que possuem a propriedade descrita acima num contexto muito mais geral. Embora muitos teoremas deste capítulo possuam enunciados mais gerais, para não fugirmos em demasia do objetivo principal deste trabalho, em sua maioria os resultados não serão enunciados em toda sua generalidade. Também não daremos demonstrações de muitos deles, mas remetemos o leitor interessado aos excelentes livros [21], [41] e [23].[1]

Começamos definindo o objeto principal:

Definição 2.0.4. *Dadas uma uma medida μ e um difeomorfismo $f : M \to M$, dizemos que μ é* invariante *por f (ou simplesmente f-invariante) se, para todo conjunto A, $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.*

Exemplo 2.0.5. *Seja $x \in M$ e considere a medida dada por $\delta_x(B) = 1$ se $x \in B$ e $\delta_x(B) = 0$ se $x \notin B$. A esta medida damos o nome de* medida de Dirac *centrada em x. Se $p \in M$ é um ponto fixo para f, então é claro que δ_p é uma medida f-invariante. Generalizando isto, se p é um ponto periódico podemos definir uma medida invariante pondo*

$$\mu_p := \frac{1}{\pi(p)} \sum_{i=0}^{\pi(p)-1} \delta_{f^i(p)}.$$

A esta medida damos o nome de medida periódica *associada ao ponto p.*

[1] O livro [21] é bem mais introdutório do que os outros e pressupõe pouco. Já [41] possui mais pré-requisitos e é muito mais abrangente, enquanto [23] também satisfaz esta condição, porém tem um enfoque maior na chamada Teoria Ergódica Diferenciável.

A Teoria Ergódica estuda a dinâmica de sistemas que possuem medidas invariantes. Acontece que a presença de uma medida invariante dá uma certa complexidade ao comportamento da transformação, ao menos do ponto de vista da medida. Em outras palavras, uma transformação que admite uma medida invariante possui uma certa riqueza inerente no comportamento das órbitas que são vistas pela medida. Em grande parte esta riqueza é fornecida pelos dois teoremas iniciais do assunto: o Teorema de Recorrência de Poincaré e o Teorema Ergódico de Birkhoff. Estes dois resultados são o tema da próxima seção.

2.1 Recorrência e o Teorema Ergódico

Um tipo de complexidade que aparece na presença de uma medida invariante é a recorrência. Um ponto $x \in M$ é dito *recorrente* se, para toda vizinhança U de x existe um iterado $f^n(x) \in U$, com $n > 0$. Intuitivamente, um ponto é recorrente se a sua órbita positiva retorna arbitrariamente próxima dele mesmo. Note que isto implica que toda órbita periódica é recorrente.

Exemplo 2.1.1. *Considere no círculo S^1 a transformação $f_\theta : S^1 \to S^1$, onde θ é um número real, que leva um ponto $(\cos x, \sin x)$ em $f_\theta(p) = (\cos(x+\theta), \sin(x+\theta))$.*[2] *Se $\theta = \frac{p}{q}2\pi$, com p e $q \neq 0$ inteiros, então a órbita de qualquer ponto $x \in S^1$ é periódica de período q. Se $\theta = \lambda 2\pi$, com $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é possível mostrar que a órbita de todo ponto é densa. Em ambos os casos, temos que* todo *ponto do círculo é recorrente.*

Exemplo 2.1.2. *Considere agora o intervalo $[0,1]$ com os extremos identificados, e $f(0) = f(1) = 0$, e $f(x) = x/2$, e $x \neq 0, 1$. Então, a órbita de qualquer ponto converge a 0, e 0 é o único ponto recorrente, porque é um ponto fixo. Em particular, $f|_{(0,1)}$ não possui pontos recorrentes. Note que $(0,1)$ não é compacto. Observe também que a medida de Dirac centrada em 0 é invariante por f.*

Nos dois exemplos acima, presenciamos comportamentos opostos em relação à "quantidade"de pontos recorrentes. No entanto, na presença de uma medida invariante, esta "quantidade"é sempre relevante do ponto de vista da medida.

Dizemos que uma certa propriedade vale *μ-quase todo ponto* se o conjunto dos pontos de M que gozam da referida propriedade possui medida μ total.

Teorema 2.1.3 (Teorema de Recorrência de Poincaré)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e μ uma medida f-invariante. Então, μ-quase todo ponto é recorrente.*

Observação 2.1.4. *Pode ocorrer que o ponto de vista da medida seja trival. Por exemplo, a transformação do exemplo 2.1.2 possui um único ponto recorrente, logo a única medida que pode ser invariante por f é a que da peso total ao único ponto recorrente, ou seja, a única medida invariante pela transformação é a medida de Dirac centrada no 0.*

[2]Tal transformação também pode ser vista no intervalo $[0,1]$ identificando-se os pontos extremos, e pondo $f_\theta(x) = (x+\theta)\text{mod}1$.

Suponha agora que temos f e μ como no enunciado acima e considere um conjunto B com $\mu(B) > 0$. Em particular B é não vazio. O enunciado acima diz apenas que μ-quase todo ponto $x \in B$ retorna arbitrariamente próximo de x, mas não garante que para algum iterado positivo temos $f^n(x) \in B$, ou seja, não temos garantia de que a órbita de algum ponto $x \in B$ irá intersectar B no futuro.

Para responder a esta pergunta, é possível dar uma versão "mensurável"do Teorema de Recorrência de Poincaré, (a qual inclusive implica o enunciado acima, ver [21]), que diz que dado um conjunto B, com $\mu(B) > 0$, então para μ-quase todo ponto $b \in B$, existem infinitos valores de n para os quais $f^n(b) \in B$.

No entanto observe que isto não responde, por exemplo, a perguntas ligeiramente mais quantitativas, como por exemplo: com que frequência os iterados de b retornam ao conjunto B? Existem pontos $b \in B$ que retornam *exatamente* nos iterados $f^p(b)$, com p primo? Note que, de certa maneira, estas perguntas são de natureza estatística.

Por isso mesmo, uma tentativa razoável de respondê-las seria fazer uma média do número de visitas ao conjunto B dos iterados de 1 até n, e enxergar o comportamento assintótico dessa média. Em outras palavras, para cada número n de iterados, calculamos quantas vezes a órbita do ponto $b \in B$ intersecta o conjunto B via

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_B\left(f^j(b)\right)$$

onde χ_B é a função característica do conjunto B, e tomamos o limite quando $n \to \infty$.

Definição 2.1.5. *O limite*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_B\left(f^j(b)\right),$$

quando existe, é dito o tempo médio de permanência *da órbita de b em B.*

Uma pergunta natural, é se este limite existe, pelo menos para a maioria dos pontos. A resposta é dada pelo Teorema Ergódico de Birkhoff.

Teorema 2.1.6 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo que preserva uma medida μ. Então, dada qualquer função μ-integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\left(f^j(x)\right)$$

existe para μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, $\widetilde{\varphi}$ é uma função μ-integrável com

$$\int\widetilde{\varphi}d\mu = \int\varphi d\mu. \tag{2.1}$$

Um ítem do teorema acima merece atenção especial. Imagine que ao invés de calcular as médias assintóticas do número de visitas ao conjunto B, queiramos obter esta informação *a priori*. Como tudo que sabemos sobre B é a sua medida, a única maneira de obtermos isso é havendo alguma relação entre $\mu(B)$ e o tempo médio de permanência da órbita de b em B. O que a igualdade 2.1 diz (colocando nela $\varphi = \chi_B$) é que a média com respeito a μ dos tempos de permanência é igual ao peso que μ dá ao conjunto B.

Além disso, se φ é (como na linguagem dos físicos) um observável, i.e., descreve algum comportamento em M (como por exemplo a temperatura), podemos dar uma interpretação semelhante à equação 2.1. Isto é, podemos generalizar a noção de tempo médio de permanência, apenas trocando em sua definição a função característica por qualquer função μ-integrável:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)),$$

e damos a esta quantidade o nome de *média orbital* com respeito à função (ou ao observável) φ. Com esta linguagem, a equação 2.1 diz que, em média com respeito a medida invariante, as médias orbitais com respeito a uma função φ são iguais a média (espacial) de φ em M. Para elucidar melhor este ponto, apresentamos abaixo um exemplo informal, que representa a filosofia da Mecânica Estatística de Boltzman.

Exemplo 2.1.7. *Suponha que M é a união das partículas de um gás, e que f é uma lei que diz como as partículas do gás se mexem dentro de um recipiente. Por um lado, temos uma temperatura média em M. Por outro lado, imagine que fixemos um ponto $p \in M$ e consideramos a sua órbita pelo sistema f. Em cada ponto $\{p, f(p), f^2(p), ...\}$ podemos medir a temperatura e considerar a média dos resultados obtidos no limite quando o número de iterados que tomamos tende a ∞. O que o teorema ergódico diz (na equação 2.1) é que, em média, o que vamos encontrar ao fazer isso para todos os pontos de M é a temperatura média de M.*

2.2 Existência de Medidas Invariantes

Uma outra pergunta bastante natural, que surge imediatamente após apresentarmos a definição de medida invariante, é se dado um difeomorfismo $f : M \to M$, existe uma medida invariante para f. Veremos nesta seção um modo construtivo de responder a esta pergunta, o qual tem ainda outras aplicações.

A idéia básica da construção é começar com uma medida qualquer definida em M e tentar forçar a invariância do seguinte modo: suponha que a medida seja ν. Consideramos as medidas dadas por $\nu_i(B) = \nu(f^{-i}(B))$, fazemos uma média dessas medidas para $i = 0, ..., n$, e tomamos o limite quando $n \to +\infty$. Como tomamos uma média, com um número grande de iterados a ação de f vai sendo cada vez menos sentida, e no final iremos obter uma medida invariante.

No entanto, para que tudo isso faça algum sentido preciso, necessitamos de uma noção de limite para medidas, ou seja, precisamos colocar uma topologia no espaço das medidas. Mais ainda, precisamos ter garantia que este limite exista, pelo menos depois de passarmos a uma subsequência, ou seja, precisamos de compacidade nessa topologia.

Como o espaço das medidas é o dual do espaço das funções contínuas, pelo teorema de Riesz, a topologia usada será a topologia fraca*, e a compacidade será garantida pelo teorema de Banach-Alaouglu.[3]

No entanto, para tornar o texto mais auto-contido, preferimos seguir a apresentação feita em [21], e vamos a definir a topologia fraca* explicitamente. Como será preciso usar medidas que não necessariamente são medidas de probabilidade, somente nesta seção, não iremos adotar a convenção que fizemos na introdução de que sempre que falarmos de medida estaremos nos referindo a medidas de probabilidade.

Considere $\mathcal{M}_1(M)$ o conjunto das medidas em M, tais que para toda $\mu \in \mathcal{M}_1$, $\mu(M) \leq 1$. Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, e dado um conjunto finito $F = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ de funções contínuas $\phi_i : M \to \mathbb{R}$, e dado $\epsilon > 0$, definimos o conjunto

$$V(\mu, F, \epsilon) := \left\{ \nu \in \mathcal{P}(M); \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon, \text{ para todo } \phi_i \in F \right\}.$$

É fácil ver que os conjuntos $V(\mu, F, \epsilon)$ com μ e F variáveis definem uma base para uma topologia em $\mathcal{M}_1(M)$.

Definição 2.2.1. *A* topologia fraca* *em* $\mathcal{M}_1(M)$ *é definida como a topologia dada pela base* $\{V(\mu, F, \epsilon)\}$.

Os resultados a seguir expressam propriedades muito úteis da topologia fraca*. A sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 3 de [21]. O primeiro deles mostra como é a convergência de sequências em $\mathcal{M}_1(M)$ munido da topologia fraca*, e o segundo diz que esse espaço realmente tem as propriedades que esperávamos acima.

Lema 2.2.2. *Uma sequência* $\{\mu_n\}$ *em* $\mathcal{M}_1(M)$ *converge a uma medida* μ *em* $\mathcal{M}_1(M)$ *na topologia fraca* se, e só se,* $\int \phi d\mu_n \to \int \phi d\mu$, *para toda função contínua* $\phi : M \to \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.3. *O espaço* $\mathcal{M}_1(M)$ *munido da topologia fraca* é metrizável e compacto.*

Defina $\mathcal{P}(M)$ como o espaço das probabilidades de $\mathcal{M}_1(M)$. Pelo lema 2.2.2 é imediato que $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{M}_1(M)$ é um subespaço fechado, em particular é compacto, pelo teorema 2.2.3.

Suponha que tenhamos um difeomorfismo $f : M \to M$. Dada uma probabilidade μ, podemos usar f e gerar uma nova probabilidade em $\mathcal{P}(M)$ via

$$f_* \mu(B) = \mu(f^{-1}(B)),$$

para todo conjunto B. Ao operador $f_* : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ damos o nome de operador de *push-forward*. Como f é contínuo, o operador de *push-forward* também é contínuo (novamente, ver [21], pg. 34). Note que μ é invariante se, e só se, $\mu = f_* \mu$.

[3] Ver [39], ou qualquer outro livro de Análise Funcional.

Agora podemos responder a pergunta que motivou esta seção. A estratégia heurística que apresentamos acima pode ser implementada sem problemas para mostrar que toda transformação contínua em M admite uma medida invariante, e o leitor pode encontrar este argumento no lema 3.10 de [21]. Vamos provar um enunciado ligeiramente mais geral aqui, muito embora o argumento seja praticamente o mesmo. Note que, dado $f : M \to M$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_*\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{f^i(x)} \tag{2.2}$$

Proposição 2.2.4. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Considere uma sequência de pontos $\{x_n\}$ em M e considere a sequência de probabilidades $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x_n)}$. Então todo ponto de acumulação de $\{\mu_n\}$ é uma probabilidade invariante por f. Em particular, como $\mathcal{P}(M)$ é compacto, existe uma probabilidade invariante por f.*

Demonstração. Não há perda de generalidade supor que $\mu_n \to \mu$. Nosso objetivo é provar que $f_*\mu = \mu$. Mas como f_* é contínuo, e como

$$\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x_n)},$$

usando 2.2 temos que

$$f_*\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{f^i(x_n)}.$$

No entanto, a expressão do lado direito pode ser reescrita como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x_n)} - \delta_{x_n} + \delta_{f^n(x_n)}\right).$$

Portanto, para completar a prova, basta observar que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\delta_{x_n} = 0$ bem como $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\delta_{f^n(x_n)} = 0$, pois isto implica que

$$f_*\mu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x_n)} = \mu.$$

Para ver que as afirmações são verdadeiras, note que para toda probabilidade ν, e para todo boreliano B, temos que

$$\frac{1}{n}\nu(B) \leq \frac{1}{n},$$

donde $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\nu(B) = 0$, e como δ_{x_n} e $\delta_{f^n(x_n)}$ são probabilidades o resultado segue.[4] □

[4] Pelo lema 2.2.2 é fácil provar que a convergência pontual nos borelianos, também chamada de convergência forte, implica a convergência fraca*. A recíproca não é verdadeira em geral (cf. exercício 3.2 de [21]).

Daqui em diante, todos os conceitos serão definidos relativamente a um difeomorfismo $f : M \to M$ fixado.

Definição 2.2.5. *Dado $x \in M$, denotamos por $M(x)$ o conjunto dos pontos de acumulação das medidas $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}$. Cada medida $\mu \in M(x)$ é chamada uma* medida orbital *do ponto x. Como cada μ_n é uma probabilidade, toda medida $\mu \in M(x)$ é uma probabilidade.*

Como consequência automática da proposição anterior no caso em que x_n é uma sequência constante, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.2.6. *Toda medida orbital é uma probabilidade invariante por f.*

As medidas orbitais serão muito usadas ao longo deste trabalho. Iremos agora estudar algumas de suas propriedades básicas. A partir daqui, e em todo o resto do trabalho não usaremos mais nenhuma medida que não seja medida de probabilidade. Por esta razão, voltaremos a adotar, daqui em diante, a convenção de chamar as medidas de probabilidade simplesmente de medidas.

Suponha que exista um ponto p tal que uma certa medida orbital de x dá peso positivo a toda vizinhança desse ponto. Então, é razoável esperar que a órbita de x irá acumular em p. Para tratar dessa questão de modo adequado, vamos relembrar a definição e algumas propriedades do suporte de uma medida.

Definição 2.2.7. *Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ definimos o seu* suporte *como sendo o conjunto* $\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in M;\ \mu(V) > 0, \text{ para toda vizinhança } V \text{ de } x\}$.

É fácil ver que o suporte de μ é um subconjunto fechado de M e portanto é compacto. Além disso, observe que se $x \notin \mathrm{supp}(\mu)$, então existe uma vizinhança V de x tal que $\mu(V) = 0$. Como $M - \mathrm{supp}(\mu)$ é aberto, podemos no máximo obter uma quantidade enumerável de abertos V_n tal que $\cup_{n\geq 0} V_n$ cobre $M - \mathrm{supp}(\mu)$ e cada V_n cumpre $\mu(V_n) = 0$. Desse modo, obtemos que $\mu(M - \mathrm{supp}(\mu)) = 0$, portanto o suporte de uma medida recebe sempre peso total. Além disso, se μ é invariante por um difeomorfismo f, então o suporte de μ é um conjunto invariante, pois dados $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ e V uma vizinhança de $f(x)$, como $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x, e como μ é invariante, temos que $\mu(V) > 0$. Finalmente,

Lema 2.2.8. *Seja μ uma medida orbital de um ponto x. Então* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \omega(x)$.

Demonstração. Considere $\mu_{n_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\delta_{f^i(x)}$ tal que $\mu_{n_j} \to \mu$. Seja $p \notin \omega(x)$. Então, existe uma vizinhança V de p tal que $f^n(x) \notin V$ para todo $n \geq 0$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $B(p, 2\epsilon) \subset V$. Em particular, para todo j, temos que

$$\mu_{n_j}(B(p, 2\epsilon)) = 0.$$

Considere uma função *bump* $\phi : M \to [0,1]$, i.e., $\phi \equiv 1$ em $B(p,\epsilon)$ e $\phi \equiv 0$ em $M - B(p, 2\epsilon)$ e ϕ é de classe C^∞. Então,

$$\int \phi d\mu_{n_j} \leq \mu_{n_j}(B(p, 2\epsilon)),$$

e como $\int \phi d\mu_{n_j} \to \int \phi d\mu$, segue que

$$\int \phi d\mu = 0.$$

No entanto, $\mu\left(B(p,\epsilon)\right) \leq \int \phi d\mu$, e portanto

$$\mu\left(B(p,\epsilon)\right) = 0,$$

donde segue que $p \notin \mathrm{supp}(\mu)$. □

Se $x \in \Lambda$, onde Λ é um compacto invariante, então $\omega(x) \subset \Lambda$. Como corolário, obtemos que para toda medida orbital de x, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Lambda$. No entanto, o mesmo argumento empregado no lema anterior se presta automaticamente a seguinte generalização:

Lema 2.2.9. *Suponha que Λ é um compacto invariante, e temos uma sequência $x_n \in \Lambda$, e uma sequência de probabilidades μ_n como na proposição 2.2.4. Então, se μ é qualquer ponto de acumulação da sequência μ_n, vale que* $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Lambda$*.*

Apesar de terem uma certa ingenuidade, tais resultados garantem um certo controle sobre o suporte de medidas orbitais e serão importantes nas aplicações que faremos para estes tipos de medidas invariantes.

2.3 Medidas Ergódicas e o Teorema de Decomposição

Agora que já temos garantia da existência de medidas invariantes, vamos retomar o exemplo 2.1.7. Lembre que o teorema ergódico nos dava garantia de que os valores das temperaturas médias ao longo de órbitas oscilavam em torno da temperatura média de M. Ainda assim, não temos uma informação precisa sobre o valor da temperatura média em *cada* órbita. Contudo, imagine que estivéssemos na situação ideal, na qual, *para a maioria dos pontos*, ao calcularmos a temperatura média ao longo de sua órbita, obtivéssemos a temperatura média de M. Isto seria como se cada partícula guardasse em si o comportamento de todo o sistema.

Num contexto geral, esta propriedade poderia ser traduzida assim: dada uma medida μ invariante por um difeomorfismo f, para μ-quase todo ponto, a média orbital com respeito a qualquer observável φ é igual ao valor médio desse observável com respeito a μ. Em outras palavras, para x num conjunto de medida μ total vale que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \int \varphi d\mu, \tag{2.3}$$

para toda função μ-integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Se μ é uma medida com esta propriedade, dizemos que μ é uma *medida ergódica*. É evidente que as medidas ergódicas são especiais. Nesta seção, iremos estudar um pouco as suas propriedades e tratar a questão de como obter medidas ergódicas.

De modo análogo a noção de conjunto invariante por um difeomorfismo, dizemos que $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é uma *função invariante* se $\varphi \circ f = \varphi$. A próxima proposição diz que um conjunto Λ invariante por um difeomorfismo f que admite uma medida ergódica μ não pode ter medida $0 < \mu(\Lambda) < 1$.

Proposição 2.3.1. *Seja μ uma medida invariante para um difeomorfismo $f : M \to M$. Então, as afirmações a seguir são equivalentes.*

1. *μ é uma medida ergódica para f.*
2. *Para todo suconjunto $A \subset M$ invariante, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$*
3. *Toda função invariante é constante num subconjunto de medida total.*

A prova deste resultado é bastante simples e pode ser encontrada no capítulo 5 de [21].

Exemplo 2.3.2. *Se p um ponto periódico para f, e μ_p é a medida periódica, então μ_p é ergódica. Com efeito, se A é um conjunto invariante com $\mu_p(A) > 0$, então então A contém um ponto da órbita de p, e por invariância deve conter a órbita de p inteira. Portanto $\mu_p(A) = 1$. Pela proposição 2.3.1 segue que μ_p é ergódica.*

Exemplo 2.3.3. *Considere um conjunto $B \subset M$ e μ uma medida invariante e ergódica para f. Neste contexto, podemos responder a uma pergunta feita anteriormente. Seja $P \subset M$ tal que para todo $b \in P$, $f^p(b) \in B$, se, e só se, p é um número primo. Pelo Teorema dos Números Primos*[5]*, isto implica que o tempo médio de permanência da órbita b em B é zero, para todo $b \in P$. Com efeito, para $b \in P$, ao calcularmos o tempo médio de permanência da órbita de b em B, iremos obter*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n},$$

onde $\pi(n)$ é quantidade de números primos menores ou iguais do que n. O Teorema dos Números Primos diz que, assintoticamente, $\frac{\pi(n)}{n} \sim \frac{1}{\log n}$, e portanto $\frac{\pi(n)}{n} \to 0$. Como μ é ergódica, se $\mu(P) > 0$, então existe pelo menos um ponto $b \in P$ tal que o tempo médio de permanência da órbita de b em B é igual a $\mu(B)$, e portanto $\mu(B) = 0$. Isto prova que se B tem medida positiva, então os pontos que retornam a B exatamente nos iterados primos são desprezíveis do ponto de vista da medida.

A seguir vamos apresentar um teorema que diz como é possível obter uma medida ergódica a partir de uma medida invariante. A sua prova pode ser encontrada em [23]

Definição 2.3.4. *Dizemos que um subcojunto $\Lambda \subset M$ possui* probabilidade total *se $\mu(\Lambda) = 1$, para toda medida invariante μ.*

Teorema 2.3.5 (Teorema de Decomposição Ergódica)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Então, existe um subconjunto $\mathcal{E}_M \subset M$ de probabilidade total tal que, dada uma medida*

[5]Para o enunciado preciso e uma prova, ver [4].

invariante μ, para μ-quase todo ponto $x \in \mathcal{E}_M$ existe uma medida ergódica μ_x de forma que $x \in \operatorname{supp}(\mu_x) \subset \operatorname{supp}(\mu)$, toda função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ μ-integrável é μ_x integrável e

$$\int_M \left(\int_M \varphi d\mu_x \right) d\mu = \int_M \varphi d\mu.$$

A cada medida ergódica μ_x, como no teorema, damos o nome de *representante da decomposição ergódica* de μ. Para os nossos propósitos, o resultado pode ser visto assim: dada uma medida invariante com alguma propriedade especial expressa por meio da integral de uma função, sempre podemos escolher um representante da sua decomposição ergódica, de modo que a propriedade ainda valha. Isso nos permitirá, em diversas situações, ao encontrar uma medida invariante, supor (sem perda de generalidade) que ela é ergódica. Na próxima seção, teremos oportunidade de empregar tal procedimento.

2.4 Órbitas J-fracas

Obviamente, as órbitas periódicas são aquelas cujo comportamento assintótico é o mais trivial possível. Por isso mesmo, sua importância na descrição da dinâmica de determinados sitemas é monumental. De fato, em certos contextos é possível obter propriedades extremamentes fortes a partir de comportamentos simples de órbitas periódicas que persistam por perturbações suficientemente pequenas. Um exemplo disto, é o próprio Teorema de Araújo, no qual, como veremos no decorrer dos próximos capítulos, a partir da condição de finitude robusta do número de poços é possível concluir hiperbolicidade essencial. Situações semelhantes irão aparecer no capítulo 08. Nesta seção, vamos introduzir uma classe de órbitas periódicas que é muito importante, quando estamos nesta condição de finitude robusta do número de poços.[6] Em toda esta seção estarão fixados um difeomorfismo $f : M \to M$ e um número $\delta > 0$.

Definição 2.4.1. *O conjunto $P(\delta, f)$ é o conjunto dos pontos periódicos p tais que*

$$\frac{1}{\pi(p)} \log |\det df^{\pi(p)}(p)| < \delta.$$

É imediato que $S(f) \subset P(\delta, f)$, pois se p é um poço $|\det df^{\pi(p)}(p)| < 1$. Mas, pode ocorrer que existam pontos em $P(\delta, f)$ que não sejam poços.

Exemplo 2.4.2. *Suponha M tem dimensão 2 e que p é um ponto fixo tal que $df(p)$ possui 2 e $\frac{1}{2}$ como autovalores. Então é claro que $p \in P(\delta, f)$. Por outro lado, se os autovalores são 20 e $\frac{1}{2}$, e se δ for pequeno, então p não pertence a $P(\delta, f)$.*

O exemplo acima dá um significado intuitivo ao conjunto $P(\delta, f)$ a partir da contração e da expansão que $df^{\pi(p)}(p)$ apresenta. Se $p \in P(\delta, f)$, e a derivada apresenta uma

[6] A definição precisa desta condição será dada no capítulo 04.

expansão, então ela tem que apresentar uma contração suficientemente forte para "compensar"o determinante. Em particular, se $\delta < 1$, $P(\delta, f)$ não pode conter fontes.

Por outro lado, note que se $p \in P(\delta, f)$, então p está no suporte de uma medida ergódica, pois a medida periódica μ_p é ergódica. Além disso, vale que

$$\int \log|\det df| d\mu_p = \frac{1}{\pi(p)} \sum_{j=0}^{\pi(p)-1} \log|\det df(f^j(p))| = \frac{1}{\pi(p)} \log|\det df^{\pi(p)}(p)| < \delta.$$

Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.4.3. *Dizemos que uma probabilidade invariante ergódica μ pertence a $M(\delta, f)$ se $\int \log|\det df| d\mu < \delta$. Definimos o conjunto $\Sigma(\delta, f) = \overline{\cup_{\mu \in M(\delta,f)} \operatorname{supp}(\mu)}$*

Observe que toda medida periódica de um ponto em $P(\delta, f)$ pertence a $M(\delta, f)$, portanto $\overline{P(\delta, f)} \subset \Sigma(\delta, f)$. Além disso, como o suporte de uma medida invariante é um conjunto invariante, e como o fecho de um conjunto invariante é um conjunto invariante, é fácil ver que $\Sigma(\delta, f)$ é um subconjunto compacto e invariante de M.

Dado um difeomorfismo arbitrário não é garantido que $P(\delta, f) \neq \emptyset$. Para contornar essa dificuldade, usamos o conjunto $\Sigma(\delta, f)$, que, conforme vamos provar a seguir, é não-vazio. Mais ainda, veremos um meio muito simples de se produzir medidas que enxergam $\Sigma(\delta, f)$. Tudo começa em olhar as órbitas, não necessariamente periódicas, mas que apresentam um comportamento parecido com os pontos em $P(\delta, f)$.

Definição 2.4.4. *Uma órbita $O(x)$ é dita J-*fraca *se, existe $N > 0$ tal que $n \geq N$ implica*

$$|\det df^n(x)| < (1+\delta)^n.$$

Denotamos por $\Lambda(\delta, f)$ o conjunto de todas as órbitas J-fracas. O próximo lema garante que este conjunto é relevante sob o ponto de vista da medida de Lebesgue de M.

Lema 2.4.5. *Se m é a medida de Lebesgue normalizada de M então $m(\Lambda(\delta, f)) = 1$.*

Demonstração. Tome um $\epsilon > 0$ e dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\Lambda_n = \{x \in M; |\det df^n(x)| \geq (1+\delta)^n\}$. Observe que para todo $N > 0$,

$$\bigcap_{n=N}^{+\infty} (M - \Lambda_n) \subset \Lambda(\delta, f),$$

e portanto

$$m(\Lambda(\delta, f)) \geq 1 - m\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} \Lambda_n\right) \geq 1 - \sum_{n=N}^{+\infty} m(\Lambda_n). \tag{2.4}$$

Por outro lado, como f^n é um difeomorfismo, aplicando a fórmula da mudança da variáveis a função constante igual a 1, temos

$$1 = \int_M |\det df^n| dm \geq \int_{\Lambda_n} |\det df^n| dm \geq (1+\delta)^n m(\Lambda_n),$$

donde segue que

$$m(\Lambda_n) \leq \frac{1}{(1+\delta)^n}.$$

Logo, tomando N grande o bastante para que $\sum_{n=N}^{\infty} m(\Lambda_n) < \epsilon$ segue de 2.4, que

$$m(\Lambda(\delta, f)) \geq 1 - \sum_{n=N}^{+\infty} m(\Lambda_n) \geq 1 - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, o lema está provado. □

É razoável esperar que se considerarmos a medida orbital gerada por uma órbita J-fraca, ela pertença a $M(\delta, f)$. De fato, é isto que diz o próximo lema.

Lema 2.4.6. *Se $x \in \Lambda(\delta, f)$ e $\mu \in M(x)$ então $\int \log|\det df| d\mu < \delta$.*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda(\delta, f)$, e considere $\mu \in M(x)$. Então, por definição, existe uma subsequência $n_i \to +\infty$ tal que

$$\mu = \lim_{i \to +\infty} \mu_i = \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \delta_{f^j(x)}.$$

Como $x \in \Lambda(\delta, f)$, existe $N > 0$ tal que $n \geq N$ implica $|\det df^n(x)| < (1+\delta)^n$. Além disso, pelo teorema do valor médio, $\log(1+\delta) < \delta$. Portanto, tomando i suficientemente grande temos que

$$\begin{aligned} \int \log|\det df| d\mu_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \log|\det df(f^j(x))| = \frac{1}{n_i} \log|\det df^{n_i}(x)| \\ &\leq \frac{1}{n_i} \log(1+\delta)^{n_i} = \log(1+\delta), \end{aligned}$$

portanto $\int \log|\det df| d\mu = \lim_{i \to +\infty} \int \log|\det df| d\mu_i \leq \log(1+\delta) < \delta$. □

Observe que a medida orbital gerada por uma órbita J-fraca, não necessariamente é ergódica e por isso não podemos dizer de imediato que ela pertence a $M(\delta, f)$. No entanto, isto pode ser contornado usando o Teorema da Decomposição Ergódica. Com efeito, se $\mu \in M(x)$ com $x \in \Lambda(\delta, f)$, pelo Teorema da Decomposição Ergódica, existe $\mathcal{E}_M \subset M$ conjunto de probalidade total tal que a cada $y \in \mathcal{E}_M$ está associada μ_y probalidade invariante e ergódica para f, com $y \in \operatorname{supp}(\mu_y)$, e satisfazendo

$$\int_M \log|\det df| d\mu = \int_{\mathcal{E}_M} \left(\int_M \log|\det df| d\mu_y \right) d\mu.$$

Observe que o conjunto

$$C = \{y \in \mathcal{E}_M; \int \log|\det df| d\mu_y < \delta\}$$

possui medida μ positiva, pois, se $A = M - C$ e $\mu(A) = 1$ então

$$\begin{aligned}\int_M \log|\det df| d\mu &= \int_{\mathcal{E}_M}\left(\int_M \log|\det df| d\mu_y\right) d\mu \\ &= \int_A \left(\int_M \log|\det df| d\mu_y\right) d\mu \geq \delta\mu(A) = \delta,\end{aligned}$$

violando o lema 2.4.6. Desse modo, existe um representante da decomposição ergódica de μ que pertence a $M(\delta, f)$. Usando isto, sempre que aplicarmos o lema 2.4.6, podemos supor que μ é ergódica.

Além disso, observe que $y \in C$ implica $\mu_y \in M(\delta, f)$, e desse modo $y \in \mathrm{supp}(\mu_y) \subset \Sigma(\delta, f)$. Portanto $\mu_y(\Sigma(\delta, f)) \geq \mu_y(\mathrm{supp}(\mu_y)) = 1$. Com isto, obtemos que

$$\begin{aligned}\mu(\Sigma(\delta, f)) &= \int_{\mathcal{E}_M} \mu_y(\Sigma(\delta, f))\, d\mu \geq \int_C \mu_y(\Sigma(\delta, f))\, d\mu \\ &\geq \int_C 1 d\mu = \mu(C) > 0.\end{aligned}$$

Em particular, segue que $\Sigma(\delta, f)$ é não vazio. Ou seja, provamos o

Lema 2.4.7. *Para todo $\delta > 0$ e Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ temos que para toda $\mu \in M(x)$, $\mu(\Sigma(\delta, f)) > 0$. Em particular, $\Sigma(\delta, f)$ é não vazio.*

O lema acima garante que ao provarmos resultados sobre $\Sigma(\delta, f)$, não estaremos falando do vazio. Por outro lado, ao *tentar* provar alguma coisa sobre $\Sigma(\delta, f)$ (como por exemplo, hiperbolicidade) esbarramos na dificuldade conceitual, pois sua definição envolve de modo crucial o uso de medidas ergódicas, e pode ser difícil relacioná-las com a conclusão desejada. Um caminho, pode ser usar novamente as órbitas periódicas $P(\delta, f)$, via perturbações. Na próxima seção iremos aprender a fazer este tipo de perturbação que nos permite "trocar" um ponto em $\Sigma(\delta, f)$ por um ponto em $P(\delta, g)$, com g próximo de f.

2.5 O Ergodic Closing Lemma de Mañé

Como as órbitas periódicas são fundamentais em certos contextos, principalmente quando valem propriedades que persistem por perturbações suficientemente pequenas, é natural tentar realizar uma pequena perturbação que transforme uma órbita recorrente, por exemplo, numa órbita periódica. Existe um resultado clássico, devido a Charles Pugh [34], que permite fazer isto.

Teorema 2.5.1 (Closing Lemma). *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 e p um ponto recorrente para f. Para toda vizinhança $\mathcal{U}$ de f, na topologia C^1, existe $g \in \mathcal{U}$ tal que p é um ponto periódico para g.*

No entanto, há uma dificuldade séria no *closing lemma* a qual impede, por exemplo, que o apliquemos para que um ponto x no suporte de uma medida em $M(\delta, f)$ se torne um ponto em $P(\delta, g)$, para um difeomorfismo g próximo de f. Isto se dá, porque o *closing lemma* não controla a órbita periódica criada, de modo que a g órbita de x poderia se afastar de sua f órbita, e isto poderia fazer a média temporal de x para g, com respeito a função $\log|\det dg|$, se afastar de δ, e portanto poderíamos não ter $p \in P(\delta, g)$. Ou seja, a dificuldade toda está em fazer com que a órbita periódica criada pela perturbação esteja *sempre* próxima da órbita recorrente original.

Em [24] Mañé provou que é possível realizar isto, se nos restringirmos a um conjunto de probabilidade total de pontos em M. A seguir, iremos enunciar o seu *ergodic closing lemma*.

Dado $\epsilon > 0$, seja $B_\epsilon(f, x) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B(f^n(x), \epsilon)$. Considere $\Sigma(f)$ o cojunto dos pontos $x \in M$ com a seguinte propriedade: para toda vizinhança $\mathcal{U}$ de f e todo $\epsilon > 0$ existem $g \in \mathcal{U}$ e $p \in Per(g)$, $g = f$ em $M - B_\epsilon(f, x)$ e

$$d(f^i(x), g^i(p)) < \epsilon \ \text{ para todo } \ 0 \leq j \leq \pi(p),$$

onde $\pi(p)$ é o período de p.

Teorema 2.5.2 (Ergodic Closing Lemma). *$\Sigma(f)$ é um conjunto de probabilidade total.*

Antes de prossegirmos, é oportuno estabelecermos uma linguagem que facilitará a referência a alguns resultados deste capítulo, e fará com que muitos enunciados fiquem mais límpidos.

Definição 2.5.3. *Dada uma medida μ, invariante e ergódica para f, $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ é dito um* ponto genérico *se x cumpre todas as propriedades que valem para μ-quase todo ponto deste trabalho.*[7] *Em particular, x é recorrente, satisfaz a equação 2.3, e pertence a $\Sigma(f)$.*

Observe que os pontos genéricos são densos no suporte da medida. Com efeito, dado $y \in \operatorname{supp}(\mu)$, e dada V vizinhança de y, como $\mu(V) > 0$, e como o conjunto dos pontos genéricos possui medida total, segue que existe um ponto genérico em V.

Exemplo 2.5.4. *Considere uma medida $\mu \in M(\delta, f)$, e $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ um ponto genérico. Então, como x é genérico,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log|\det df(f^j(x))| = \int \log|\det df| d\mu < \delta,$$

e como $|\det df^n(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |\det df(f^j(x))|$, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\det df^n(x)| < \delta.$$

Isto prova que se um ponto genérico $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ é periódico, então $x \in P(\delta, f)$, pois nesse caso $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\det df^n(x)| = \frac{1}{\pi(x)} \log|\det df^{\pi(x)}(x)|$.

[7] Além dos resultados deste capítulo, somente a seção 3.4, do próximo capítulo, contém outras propriedades que valem para quase todo ponto com respeito a medidas invariantes.

Com o *ergodic closing lemma*, podemos provar que um ponto genérico no suporte de uma medida em $M(\delta, f)$ pode ser aproximado por pontos periódicos em $P(\delta, g)$, para difeomorfismo próximos de f.

Antes de provar o teorema, vamos explicar informalmente a idéia do argumento. Suponha que x é um ponto genérico, e que g é um difeomorfismo próximo de f possuindo um ponto periódico p cuja g-órbita acompanha a f-órbita de x, como dado pelo *ergodic closing lemma*. Se considerarmos as funções $\psi := \log|\det dg|$ e $\phi := \log|\det df|$, como g está C^1-próxima de f, ψ está C^0-próxima de ϕ. Logo, os valores de ϕ e ψ em pontos *próximos* diferem pouco.

E aí entra o ponto crucial, pois como a g-órbita de p está próxima da f-órbita de x, podemos provar que $\psi(g^j(p)) \sim \phi(f^j(x))$, para todo j. Com isto, teremos que a média temporal para g da função ψ está próxima da média temporal para f da função ϕ. Como a média temporal para f da função ϕ está próxima de $\int \phi d\mu < \delta$, a média temporal para g da função ψ também será menor do que δ, implicando que o ponto periódico p pertence a $P(\delta, g)$.

Teorema 2.5.5. *Dado $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, se $x \in \Sigma(\delta, f)$, existem $g_n \to f$ na topologia C^1, possuindo $p_n \in P(\delta, g_n)$, $p_n \to x$.*

Demonstração. Basta provar que todo ponto no suporte de uma medida $\mu \in M(\delta, f)$ pode ser aproximado por pontos periódicos em $P(\delta, g_n)$, para difeomorfismos g_n próximos de f. Como os pontos genéricos são densos no suporte de μ, é suficiente provar que todo ponto genérico no suporte de μ possui tal propriedade. Fixemos então $\mu \in M(\delta, f)$ e um ponto genérico $x \in \mathrm{supp}(\mu)$.

O primeiro passo é obter uma sequência $g_n \to f$, possuindo pontos periódicos $p_n \to x$, cujas respectivas medidas periódicas $\mu_n \to \mu$, na topologia fraca*. Daí seguirá que para todo n suficientemente grande, temos $p_n \in P(\delta, g_n)$.

Fixe um $n \in \mathbb{N}$ e tome $V = V(\mu, F, \beta)$, com $F = \{\phi_1, ..., \phi_N\} \subset C^0(M)$, uma vizinhança básica de μ na topologia fraca* tal que $\nu \in V$ implica $d(\nu, \mu) < \frac{1}{n}$. Como μ é ergódica e x é um ponto genérico, para cada $j = 1, ..., N$, existe um $n_j \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \geq n_j$, então

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \phi_j(f^i(y)) - \int \phi_j \, d\mu \right| < \frac{\beta}{2}.$$

Considere $\overline{n} = \max\{n_j\}$ e tome $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma < \min\{d(f^i(x), x); 1 \leq i \leq \overline{n}\},$$

e ainda de forma que se $d(a, b) < \gamma$ então $d(\phi_j(a), \phi_j(b)) < \frac{\beta}{2}$, para todo $1 \leq j \leq N$, via continuidade uniforme das funções ϕ_j.

Como $x \in \Sigma(f)$, existe $g_n \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\frac{1}{n}$-próximo de f, possuindo um ponto periódico p_n tal que

$$d(f^i(x), g_n^i(p_n)) < \frac{\gamma}{2},$$

para todo $1 \le i \le k$, onde $k = \pi(p_n)$. Em particular, pela escolha de γ isto implica que $k \ge \overline{n}$. Além disso, para todo $1 \le j \le N$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int \phi_j\, d\mu_p - \int \phi_j\, d\mu\right| &\le \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\phi_j(g_n^i(p)) - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\phi_j(f^i(y))\right| + \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\phi_j(f^i(y)) - \int \phi_j\, d\mu\right| \\ &< \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} < \beta,\end{aligned}$$

e portanto a medida periódica μ_n associada a p_n pertence à V, o que implica que $d(\mu_n, \mu) < \frac{1}{n}$.

Por fim, sejam $\phi = \log|\det df|$ e $\psi_n = \log|\det dg_n|$. Como $\mu \in M(\delta, f)$, temos que

$$\int \phi d\mu < \delta,$$

logo existe um número $\alpha > 0$ tal que se

$$\left|\int \psi_n d\mu_n - \int \phi d\mu\right| < 2\alpha,$$

então $\int \psi_n d\mu_n < \delta$. Como $g_n \to f$, temos $\psi_n \to \phi$ na topologia C^0 e como $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca*, segue que para todo n suficientemente grande $\|\psi_n - \phi\| < \alpha$ e $\left|\int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu\right| < \alpha$. Portanto, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}\left|\int \psi_n d\mu_n - \int \phi d\mu\right| &\le \int |\psi_n - \phi| d\mu_n + \left|\int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu\right| \\ &< \alpha + \alpha = 2\alpha,\end{aligned}$$

e isto prova que para todo n suficientemente grande, $p_n \in P(\delta, g_n)$. □

Capítulo 3

Dinâmica Hiperbólica

Um objetivo central na teoria dos sistemas dinâmicos é entender a estrutura de órbitas (tanto do ponto de vista topológico quanto do ponto de vista estatístico) da maioria dos sistemas. Uma classe que inicialmente achava-se que constituiria a maioria é a classe dos sistemas estruturalmente estáveis, aqueles cuja estrutura topológica de órbitas permanece inalterada por perturbações suficientemente pequenas. Naturalmente, caracterizar esta classe de sistemas é de suma importância para decidir se de fato eles constituem a maioria. A noção de hiperbolicidade surge então como uma fonte de estabilidade, nos trabalhos de Anosov [2] sobre o fluxo geodésico em variedades de curvatura negativa. Matemáticos como Hopf, Andronov e Peixoto também obtiveram resultados nessa direção.

Com os trabalhos de Smale [37], e outros matemáticos, surgiu a noção central de sistema Axioma A, e o conceito de hiperbolicidade ganhou força uma vez que foi provado que ele implicava em estabilidadde. A questão recíproca, de saber se a estabilidade também implicava hiperbolicidade ficou conhecida na década de 70 como a Conjectura da Estabilidade. Este tornou-se um problema central, já que, com a intensa pesquisa a estrutura de órbitas dos sistemas hiperbólicos acabou tornando-se razoavelmente bem entendida e, portanto, uma resposta afimativa à Conjectura da Estabilidade implicaria no conhecimento da estrutura de órbitas dos sistemas estáveis. Por outro lado, também implicaria que a maioria dos sitemas não seria estável, uma vez que já se conheciam exemplos de conjuntos abertos inteiramente formados por sitemas não hiperbólicos. A conjectura teve uma resposta afirmativa, com a solução de Mañé [25] no final dos anos 80 para o problema.

Neste capítulo iremos definir hiperbolicidade e estudar suas principais propriedades. Para não fugirmos ao tema principal do trabalho, as relações mencionadas acima entre hiperbolicidade e estabilidade serão discutidas somente no capítulo 08.

Assim como o capítulo anterior, este tem somente a intensão de ser um *survey* sobre o assunto, e coletar pre-requisitos necessários ao entendimento das principais demonstrações. Para maiores detalhes remetemos o leitor aos livros [13], [28], [10], [35] e [40].

3.1 Hiperbolicidade Local

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e considere p um ponto fixo para f, ou seja, $f(p) = p$. Dizemos que p é *hiperbólico* se $df(p) : T_pM \to T_pM$ não possui autovalores de módulo igual a 1. Isto faz com que T_pM se decomponha como $E^s \oplus E^u$, onde E^s é o subespaço gerado pelos autovalores de módulo menor do que 1, e chamado o *subespaço estável* e E^u é o subespaço gerado pelos autovalores de módulo maior do que 1, chamado o *subespaço instável*. Além disso, para todo vetor $v \in E^s$, $df^n(p)v \to 0$ quando $n \to +\infty$ e para todo vetor $u \in E^u$, $df^{-n}(p)u \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Ou seja, o comportamento qualitativo da derivada num ponto fixo hiperbólico é muito simples: todo vetor no subespaço estável sofre contração pela ação positiva da derivada e todo vetor no subespaço instável sofre contração pela açao negativa da derivada, o que implica em expansão.[1] Como a derivada é a linearização do difeomorfismo, é razoável esperar que o difeomorfismo, ao menos topologicamente, também se comporte assim numa vizinhança de p. Este é o conteúdo do teorema de Hartman-Grobman.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Hartman-Grobman)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto fixo hiperbólico. Então, existem uma vizinhança U de p, uma vizinhança V de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : U \to V$ que leva órbitas de f em órbitas de $df(p)$, i.e. $h \circ f = df(p) \circ h$.*

Um ponto periódico p é dito *hiperbólico* se é um ponto fixo hiperbólico para $f^{\pi(p)}$. Trocando f por $f^{\pi(p)}$, obtemos o teorema de Hartman-Grobman para pontos periódicos hiperbólicos.

Exemplo 3.1.2. *Seja $p \in S(f)$ um poço para f. Então é claro que p é um ponto periódico hiperbólico. Similarmente, se p é um poço para f^{-1}, p é um ponto periódico hiperbólico, pois, neste caso, todos os autovalores de $df^{\pi(p)}(p)$ possuem módulo maior do que* 1.

Um poço para f^{-1} é dito uma *fonte* para f. Usando o teorema de Hartman-Grobman podemos descrever o comportamento de f numa vizinhança de um poço.

Definição 3.1.3. *Seja $p \in S(f)$, e seja U a vizinhança de p dada pelo teorema de Hartman-Grobman. Dizemos que U é a* bacia de atração local *de p, ou simplesmente a* bacia local *de p. Considere $B(p) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$. Dizemos que $B(p)$ é a* bacia *de p.*

Note que, se p é um poço e $B(p)$ é a sua bacia, então para todo ponto $x \in B(p)$, $d(f^{k\pi(p)}(x), p) \to 0$. Isto permite descrever intuitivamente a bacia de p (a qual é aberta!) como o conjunto dos pontos cuja órbita futura "morre"em p. Em particular, nenhum ponto $x \in B(p) - \{p\}$ é recorrente. Com efeito, por continuidade existem $r_0 > 0$, $r_1 > 0$,...,$r_{n-1} > 0$, onde $n = \pi(p)$, tais que

$$B(f^i(p), r_i) \cap B(f^j(p), r_j) = \emptyset,$$

[1] Dizer que um vetor é expandido pela ação positiva da derivada não caracteriza o subespaço instável, pois todo vetor fora do subespaço estável é expandido pela ação positiva da derivada.

se $i \neq j$, e ainda tais que

$$f\left(B(f^i(p), r_i)\right) \subset B(f^{i+1}(p), r_{i+1}),$$

para todo $i = 0, ..., n-2$, e

$$f\left(B(f^{n-1}(p), r_{n-1})\right) \subset B(p, r_0).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \in B(p, r_0) \subset B(p)$. Daí, temos que x só pode retornar a $B(p, r_0)$ nos iterados da forma $k\pi(p)$, $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, tomando um $r > 0$ tal que $B(p, r) \cap B(x, r) = \emptyset$, e $B(x, r) \subset B(p, r_0)$, como $f^{k\pi(p)}(x) \to p$ quando $k \to +\infty$, existe um $N > 0$, tal que $k \geq N$ implica $f^{k\pi(p)}(x) \in B(p, r)$. Logo, para todo $k \geq N$, $f^{k\pi(p)}(x) \notin B(x, r)$. Como os iterados de x que não são múltiplos de $\pi(p)$ estão fora de $B(p, r_0)$, temos que a órbita de x não retorna infinitas vezes a $B(x, r)$. Portanto x não é recorrente. Usando isso, temos o seguinte

Lema 3.1.4. *$\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é um compacto invariante*

Demonstração. Como os pontos recorrentes são densos em $\Sigma(\delta, f)$, não pode existir nenhum ponto de $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ dentro da bacia de um poço, pois isto levaria a existência de pontos recorrentes dentro da bacia do poço, o que, como vimos acima é impossível. Como a bacia de um poço é aberta, isto prova que $S(f) \subset \Sigma(\delta, f)$ é isolado, e portanto $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é fechado. Como M é compacta, $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é compacto. Além disso, como $S(f)$ é formado somente por pontos periódicos, e $\Sigma(\delta, f)$ é invariante, é claro que $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é invariante. □

De fato, os argumentos usados acima para provar que os poços são isolados em $\Sigma(\delta, f)$ também se prestam para provar que os poços são isolados no conjunto não-errante.[2] Vamos destacar isto como um corolário para uso futuro.

Corolário 3.1.5. *$S(f)$ é um subconjunto isolado de $\Omega(f)$*

Obviamente, valem resultados análogos para fontes. No caso de um ponto periódico que não é poço nem fonte, a descrição obtida pelo teorema de Hartman-Grobman não fornece uma informação tão precisa, como a existência de uma bacia de atração. No entanto, observe que os pontos no subespaço estável são assintóticos à origem pela ação da derivada. Logo, a sua imagem pela conjugação fornece um subconjunto de pontos de M que são assintóticos ao ponto p. Como no caso de poços obtivemos um *aberto* com esta propriedade, é natural perguntar se seria possível obter uma estrutura de subvariedade para este conjunto. A resposta é fornecida pelo teorema da variedade estável. Antes de enunciá-lo, vamos estabelecer uma outra propriedade importante sobre pontos periódicos hiperbólicos e dar algumas definições.

Note que se p é um ponto periódico hiperbólico para f, então $df^{\pi(p)}(p) - Id$ é um isomorfismo. Usando este fato e tendo em vista o terema da função implícita em espaços de Banach podemos provar que pontos fixos hiperbólicos são isolados e persistem por perturbações suficientemente pequenas.

[2] O cojunto não-errante, denotado por $\Omega(f)$, é formado pelos pontos $p \in M$, tais que para toda vizinhança U de p existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Usando a compacidade de M é possível provar que $\Omega(f) \neq \emptyset$. Ver, [41] capítulo 05.

Teorema 3.1.6 (Continuação Analítica)**.** *Sejam f um difeomorfismo de classe C^r em M e p um ponto periódico. Então existem uma vizinhança C^r $\mathcal{U}$ de f e uma vizinhança U de p tais que todo se $g \in \mathcal{U}$ então existe um único ponto periódico de perído $\pi(p)$ para g em U. Além disso, a função que a cada $g \in \mathcal{U}$ associa o ponto periódico para g de periódo $\pi(p)$ é contínua.*

Demonstração. Como o problema é local, podemos supor que $M = R^n$. Daí, o mapa

$$F : \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

definido por $F(g, x) = g^{\pi(p)}(x) - x$, satisfaz $F(f, p) = 0$, $\partial_g F = Id$ e $\partial_x F = dg^{\pi(p)} - Id$. Com isso, podemos aplicar o teorema da função implícita e obter vizinhanças $\mathcal{U}$ de f, U de p e uma função contínua $\zeta : \mathcal{U} \to U$, tal que se $\zeta(g) = p_g$ então $F(g, p_g) = 0$, portanto p_g é ponto periódico de período $\pi(p)$ para g. □

Daqui em diante sempre que dissermos *a continuação analítica de p* ou *a vizinhança dada pela continuação analítica* estaremos nos referindo ao teorema anterior.

Definição 3.1.7. *Dado p um ponto periódico hiperbólico de um difeomorfismo $f : M \to M$. Definimos, respectivamente, o* conjunto estável *de p e o* conjunto instável *de p por*

$$W^s(p) = \{x \in M;\ d(f^n(x), f^n(p)) \to 0,\ \text{ quando } n \to +\infty\},$$

e

$$W^u(p) = \{x \in M;\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to 0,\ \text{ quando } n \to +\infty\}.$$

Dado $\beta > 0$ definimos também o conjunto estável local *e o* conjunto instável local *de p pondo, respectivamente,*

$$W^s_\beta(p) = \{x \in M;\ d(f^n(x), f^n(p)) < \beta,\ \text{ para todo } n \geq 0\},$$

e

$$W^u_\beta(p) = \{x \in M;\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) < \beta,\ \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Note que os conjuntos estável/instável de p são invariantes por f.

Definição 3.1.8. *Sejam S e R subvariedades de classe C^r de M e $\epsilon > 0$. Dizemos que S e R estão ϵ-C^r-próximas se existe um difeomorfismo de classe C^r $h : R \to S$, tal que $I_S \circ h$ está ϵ-próximo de I_R na topologia C^r, onde $I_S : S \to M$ e $I_R : R \to M$ denotam as aplicações de inclusão.*

Teorema 3.1.9 (Teorema da Variedade Estável)**.** *Sejam $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ e p um ponto periódico hiperbólico. Considere E^s o subespaço estável de T_pM por $df^{\pi(p)}(p)$. Então, vale o seguinte*

a) $W^s(p)$ é uma subvariedade de classe C^r imersa injetivamente em M, e o espaço tangente a $W^s(p)$ em p é E^s. Além disso, existe um $\beta > 0$ tal que $W^s_\beta(p) \subset W^s(p)$ e é um disco mergulhado de classe C^r.[3]

[3]Ou seja, é a imagem de uma bola em E^s por um difeomorfismo de classe C^r.

b) *Considere a vizinhança $\mathcal{U}$ de f dada pela continuação analítica de p. Dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{V}$, existe um disco mergulhado $D \subset W^s_\beta(p_g)$ ϵ-C^r próximo de $W^s_\beta(p)$, onde p_g é a continuação analítica de p.*

Trocando f por f^{-1} obtemos um resultado análogo para a variedade instável. Daqui por diante, sempre que nos referirmos a variedade estável/instável (local) de p estaremos nos referindo aos conjuntos estável/instável (locais) de p dados pelo teorema da variedade estável.

O próximo resultado que iremos enunciar é um teorema clássico, e extremamente útil. Para uma prova, remetemos o leitor a [13].

Teorema 3.1.10 (λ-lema)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto fixo hiperbólico para f. Considere D um disco mergulhado de mesma dimensão que $W^u(p)$, que intersecta transversalmente $W^s(p)$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que se $n \geq n_0$ etão $f^n(D)$ está ϵ-C^1 próximo da variedade instável local de p*

Ou seja, se tomamos um disco D transversal à variedade estável, com mesma dimensão que a variedade instável, então os iterados $f^n(D)$ são subvariedades que vão acumulando em $W^u_\beta(p)$, quando $n \to +\infty$.

Os resultados enunciados acima forncecem bastante informação sobre a dinâmica próxima a um ponto periódico hiperbólico. No entanto, podemos nos perguntar se órbitas periódicas hiperbólicas são frequentes o bastante para que tais resultados possuam alguma utilidade. A resposta é que, genericamente (de fato C^r genericamente!), todo difeomorfismo possui somente órbitas periódicas hiperbólicas. O teorema que responde isto, é conhecido como Teorema da Kupka-Smale, e ele ainda diz mais do que isso.

Definição 3.1.11. *Dadas V e N subvariedades de M, dizemos que V e N são transversais se $V \cap N = \emptyset$ ou, para cada $p \in V \cap N$, tivermos $T_pN + T_pV = T_pM$.*

Teorema 3.1.12 (Kupka-Smale)**.** *Para todo $r \geq 1$, existe um residual KS^r tal que todo difeomorfismo f em KS^r cumpre*

a) *Todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos*

b) *Para todo par de pontos periódicos p e q de f, $W^s(p)$ e $W^u(q)$ são transversais*

Logo, a questão de saber se a hiperbolicidade de órbitas periódicas é ou não abundante fica reduzida a saber se a existência de órbitas periódicas é, ou não, uma propriedade abundante. Está pergunta ainda está em aberto para topologias C^r com $r > 1$, e na topologia C^1 a resposta é fornecida pelo *closing lemma*, que enunciamos no capítulo anterior. De fato, usando o *closing lemma*, pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.13 (Teorema de Densidade Geral de Pugh)**.** *Existe um residual em* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *tal para todo f neste residual tem-se $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.*

Como o conjunto não-errante é sempre não vazio, o resultado acima garante que C^1-genericamente órbitas periódicas existem. Uma prova do Teorema de Densidade Geral de Pugh, assumindo o *closing lemma*, pode ser encontrada em [35] e [29].

3.2 Conjuntos Hiperbólicos

A hiperbolicidade de um ponto fixo implica em contração e expansão exponenciais pela ação da derivada, em direções complementares de T_pM. Se pretendemos generalizar isto para um conceito semi local, podemos trocar o ponto fixo por um compacto invariante Λ, e pedir, por definição, a existência de direções complementares, agora em $T_\Lambda M$, nas quais ocorram, respectivamente, contração e expansão exponenciais.

Definição 3.2.1. *Dizemos que um compacto $\Lambda \subset M$ invariante por um difeomorfismo f, é um* conjunto hiperbólico *se existe uma decomposição do fibrado tangente restrito a Λ, $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ df-invariante, ou seja $df(x)E^\sigma_x = E^\sigma_{f(x)}$, $\sigma = s, u$, e tal que existam constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ satisfazendo, para todo $x \in \Lambda$ e todo $n \in \mathbb{N}$,*

1. $\left\| df^n(x)|_{E^s} \right\| \leq C\lambda^n$,
2. $\left\| df^{-n}(x)|_{E^u} \right\| \leq C\lambda^n$.[4]

A definição acima exige que as taxas de contração e expansão não dependam do ponto escolhido em Λ, e esta é uma hipótese forte. Por esta razão, em certos contextos, um conjunto Λ como na definição acima é dito *uniformemente hiperbólico*. Não iremos adotar esta terminologia aqui, no entanto, mais a frente, discutiremos um pouco o contexto não-uniformemente hiperbólico.

Propriedades de Conjuntos Hiperbólicos

Nesta seção vamos tentar explorar um pouco a definição de um conjunto hiperbólico. Começamos apresentando uma reformulação da noção de hiperbolicidade que é muito útil.

Definição 3.2.2. *Se Λ é um compacto invariante por um difeomorfismo f, e E é um subfibrado df-invariante de $T_\Lambda M$, dizemos que E é* contrator *para f, se existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

$$\left\| df^n(x)|_E \right\| \leq C\lambda^n,$$

para todo $x \in \Lambda$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que E é expansor *se é contrator para f^{-1}.*

Observe que se Λ é um conjunto hiperbólico, e $E^s \oplus E^u$ é a sua decomposição hiperbólica, então E^s é um subfibrado contrator para f, e E^u é um subfibrado expansor para f. Sempre iremos nos referir à direção contratora de uma decomposição hiperbólica como *estável*, e à direção expansora como *instável*. O lema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para que uma decomposição em soma direta e df-invariante de $T_\Lambda M$ seja uma decomposição hiperbólica.

[4]Em todo este trabalho, se E é um subfibrado, adotamos a notação $df(x)|_E$, significando a ação da derivada $df(x)$ restrita à fibra $E_x \subset T_xM$.

Lema 3.2.3. *Sejam Λ um compacto invariante por um difeomorfismo f, e E é um subfibrado df-invariante de $T_\Lambda M$. Então, E é contrator se, e somente se, existe em $N > 0$ tal que*

$$\left\| df^N(x)|_E \right\| < \frac{1}{2},$$

para todo $x \in \Lambda$.

Demonstração. A necessidade é óbvia. Para provar a suficiência, tome $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^N$,

$$c = \max\left\{1, \sup\{\|df^j(x)\|;\ x \in \Lambda,\ 1 \le j \le N\}\right\},$$

e $k > 0$ tal que $1 \le k\lambda^N$. Em particular, $1 \le k\lambda^r$, para todo $1 \le r < N$, pois $0 < \lambda < 1$. Daí, se $n \in \mathbb{N}$, pelo algorítmo da divisão de euclides, existem naturais $q \ge 0$ e $r < N$ tais que $n = qN + r$. Portanto, pela regra da cadeia,

$$\left\| df^n(x)|_E \right\| \le c^r \left(\frac{1}{2}\right)^q \le c^r \lambda^{qN} \le c^N k \lambda^{qN+r},$$

e basta tomar $C = c^N k$. O lema está provado. □

A seguir vamos apresentar um resultado que investiga o que ocorre na ausência de hiperbolicidade. Para esse estudo, a seguinte terminologia é útil: uma *corda* é qualquer pedaço finito $\{x, ..., f^n(x)\}$ de órbita, com $n > 0$. Vamos provar que se um subfibrado de $T_\Lambda M$ contínuo E não é contrator, então existem cordas arbitrariamente grandes em Λ que apresentam uma contração média muito fraca. O argumento é devido a Mañé, e, em conjunto com o *ergodic closing lemma*, pode ser usado para obter hiperbolicidade, quando existe alguma uniformidade nas taxas de contração e expansão de órbitas periódicas, que valha robustamente. Em capítulos subsequentes veremos como conseguir tal cenário, e portanto teremos oportunidade de aplicar o teorema abaixo para obter hiperbolicidade.

Teorema 3.2.4. *Seja Λ um compacto invariante por um difeomorfismo f, e considere um subfibrado de $T_\Lambda M$ contínuo E. Se E não é contrator, então existe uma medida μ invariante e ergódica para f, tal que para um ponto genérico $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ temos*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| df(f^j(x))|_E \right\| \ge 0.$$

Tomando um ponto genérico x no suporte da medida ergódica dada pelo teorema e tomando um n grande, obtemos uma corda $\{x, ..., f^n(x)\}$ com contração média arbitrariamente fraca na direção E.

Demonstração. Pelo lema 3.2.3, se E não é contrator então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_n \in \Lambda$ tal que

$$\frac{1}{2} \le \left\| df^n(x_n)|_E \right\| \le \prod_{j=0}^{n-1} \left\| df^j(x_n) \right\|,$$

e portanto,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\left\|df^j(x_n)|_E\right\| \geq -\frac{\log 2}{n}. \tag{3.1}$$

Considere as medidas $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x_n)}$. Por compacidade e pela proposição 2.2.4, a menos de passar a uma subsequência, podemos supor que $\mu_n \to \mu$, onde μ é uma medida f-invariante. Além disso, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Lambda$ via o lema 2.2.9. Como a desigualdade 3.1 diz que

$$\int \log\left\|df|_E\right\| d\mu_n \geq -\frac{\log 2}{n},$$

e como $\int \log\left\|df|_E\right\| d\mu_n \to \int \log\left\|df|_E\right\| d\mu$, obtemos

$$\int \log\left\|df|_E\right\| d\mu \geq 0.$$

Pelo Teorema da Decomposição Ergódica, como no capítulo 02, podemos supor que μ é ergódica. Com a desigualdade acima, pela definição de medida ergódica, tomando um ponto genérico $x \in \Lambda$, o teorema segue. □

Como pontos periódicos hiperbólicos sempre persistem por pequenas perturbações, é natural perguntar se vale o mesmo para conjuntos hiperbólicos. Uma resposta positiva parcial é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 3.2.5 (Robustez de Conjuntos Hiperbólicos)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r e Λ um conjunto hiperbólico para f. Então, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f, na topologia C^r, e uma vizinhança U de Λ tais que para todo $g \in \mathcal{U}$, o invariante maximal de U por g, $\Lambda_g = \cup_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$, é um conjunto hiperbólico para g.*

O teorema acima, em princípio não é suficiente para garantir que conjuntos hiperbólicos sobrevivem por pequenas perturbações, pois nada garante que o invariante maximal de U por g com g próximo de f será não-vazio. Iremos garantir isto, mais a frente, quando o conjunto hiperbólico contar com uma hipótese adicional.

Prosseguindo com a tentativa de generalizar os resultados que valem para pontos fixos hiperbólicos, também podemos nos perguntar se vale um teorema da variedade estável para conjuntos hiperbólicos. A resposta é sim, e é um dos principais resultados sobre conjuntos hiperbólicos. Podemos definir os conjuntos estáveis/instáveis da mesma forma que definimos para pontos. O teorema da variedade estável diz que tais conjuntos são subvariedades imersas, tangentes as direções estável/instável, respectivamente.

Definição 3.2.6. *Seja Λ um conjunto hiperbólico. Dado $p \in \Lambda$, definimos, respectivamente, o* conjunto estável *de p e o* conjunto instável *de p por*

$$W^s(p) = \{x \in M;\ d(f^n(x), f^n(p)) \to 0,\ \text{ quando } n \to +\infty\},$$

e

$$W^u(p) = \{x \in M;\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \to 0,\ \text{ quando } n \to +\infty\}.$$

Dado $\beta > 0$ definimos também o conjunto estável local *e o* conjunto instável local *de p pondo, respectivamente,*

$$W^s_\beta(p) = \{x \in M;\ d(f^n(x), f^n(p)) < \beta, \text{ para todo } n \geq 0\},$$

e

$$W^u_\beta(p) = \{x \in M;\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) < \beta, \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Para uma prova do teorema da variedade estável, bem como da robustez de conjuntos hiperbólicos, sugerimos ao leitor consultar [40].

Teorema 3.2.7 (Teorema da Variedade Estável)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, e Λ um conjunto hiperbólico, com decomposição $E^s \oplus E^u$. Então, existe $\beta > 0$ tal que, para todo $p \in \Lambda$, $W^s_\beta(p)$ é um disco mergulhado de classe C^r em M, $T_pW^s_\beta(p) = E^s_p$. Além disso, $W^s(p) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}\left(W^s_\beta(p)\right)$ (donde segue que $W^s(p)$ é subvariedade imersa) e pedaços compactos de $W^s(p)$ variam continuamente com p. O mesmo vale para o conjunto instável.*

Com a existência de *variedades* invariantes possuindo comportamento dinâmico, e com uma hipótese adicional de isolamento (no sentido de o cojunto não ser acumulado por outros compactos invariantes) é possível obter uma descrição da dinâmica dentro de um conjunto hiperbólico bastante satisfatória. A propriedade de isolamento de um conjunto hiperbólico, está intimamente relacionado com as interseções entre as variedades estável/instável dos pontos do conjunto.

Definição 3.2.8. *Sejam f um difeomorfismo e um conjunto hiperbólico Λ. Dizemos que Λ possui* estrutura de produto local *se existe um $\epsilon > 0$ tal que $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \subset \Lambda$, para todos $x,\ y \in \Lambda$.*

Note que, em consequência do teorema da variedade estável, para quaisquer dois pontos $x,\ y$ num conjunto hiperbólico Λ e suficientemente próximos, $W^s(x)$ sempre intersecta transversalmente $W^u(y)$ num *único* ponto. Com efeito, como $W^s(x)$ intersecta transversalmente $W^u(x)$ num único ponto, o próprio x, e como W^u varia continuamente, existe um $\epsilon > 0$ tal que se $d(y, x) < \epsilon$, então $W^u(y)$ intersecta transversalmente $W^s(x)$. Como Λ é compacto podemos obter um $\epsilon > 0$ que não dependa de x. Isso mostra que a parte da definição de estrutura de produto local não-trivial de se obter, é que $W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Lambda$.

Definição 3.2.9. *Um compacto Λ invariante por um difeomorfismo f é dito* isolado *se existe uma vizinhança U de Λ, tal que $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$, i.e., Λ coincide com o invariante maximal de U por f.*

Surpreendentemente, para um conjunto hiperbólico, ser isolado e ter estrutura de produto local são conceitos equivalentes. Isto é consequência de outro teorema fundamental, que vamos apresentar a seguir, conhecido como *shadowing lemma*. Este resultado fala da possibilidade de se obter órbitas que acompanham sequências de pontos que são "quase"órbitas.

Definição 3.2.10. *Dado um número real $\alpha > 0$, uma α-*pseudo-órbita *é uma sequência $\{x_i\}$ de pontos em M, com $-\infty \leq n_1 \leq i \leq n_2 \leq +\infty$, tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$, para todo i. Uma pseudo-órbita é dita* periódica, *se existe $n > 0$ tal que $x_{i+n} = x_i$, para todo i.*

Observe que se uma sequência $\{x_i\}$ é uma órbita, por definição, tem-se $f(x_i) = x_{i+1}$. Daí, podemos interpretar uma pseudo-órbita como uma sequência que deixa de ser uma órbita por erros pequenos. Acontece que, próximo a um conjunto hiperbólico, toda pseudo-órbita pode ser "sombreada"por uma órbita verdadeira, no seguinte sentido: dada $\{x_i\}$, uma pseudo-órbita, dizemos que uma órbita $O(x)$ *β-sombreia* esta pseudo-órbita, se $d(f^i(x), x_i) < \beta$, para todo i. Também dizemos que x é uma sombra para a pseudo-órbita.

Teorema 3.2.11 (Shadowing Lemma)**.** *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo f. Dado $\beta > 0$, existem $\alpha > 0$ e $\eta > 0$, tais que para toda α-pseudo-órbita $\{x_i\}$, satisfazendo $d(x_i, \Lambda) < \eta$, para todo i, existe um ponto x cuja órbita β-sombreia a pseudo-órbita. Além disso, se $\{x_i\}$ é periódica, então x é um ponto periódico; se $n_1 = -\infty$ e $n_2 = +\infty$ então a sombra é única; finalmente, se Λ possui estrutura de produto local, então $x \in \Lambda$.*

A prova do teorema acima, o leitor pode encontrar em [35] e [10]. Para a prova do fato que estrutura de produto local e isolamento são conceitos equivalentes para um conjunto hiperbólico, sugerimos [28] e [9].

A importância do *shadowing lemma* para a teoria dos sistemas hiperbólicos é monumental, e está intimamente relacionada com a estabilidade de tais sistemas. De fato, adcionando-se a hipótese de isolamento e usando o *shadowing lemma* podemos melhorar substancialmente o teorema da robustez de conjuntos hiperbólicos, e provar que de fato o conjunto persiste por pequenas perturbações e, mais ainda, a dinâmica também persiste.

Teorema 3.2.12 (Estabilidade de Conjuntos Hiperbólicos Isolados)**.** *Seja Λ um conjunto hiperbólico isolado para um difeomorfismo de classe C^1 f. Então existem vizinhanças U de Λ em M e $\mathcal{U}$ de f em $\mathrm{Diff}^1(M)$ tais que para todo $g \in \mathcal{U}$, $\Lambda_g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U)$ é um conjunto hiperbólico isolado para g. Além disso, existe um homeomorfismo $h_g : \Lambda \to \Lambda_g$ tal que $g \circ h_g = h_g \circ f$ e h_g varia continuamente com g.*

O homeomorfismo h_g deve ser visto como uma mudança de coordenadas contínua que leva órbitas de f em órbitas de g, e portanto a estrutura topológica de órbitas de g e f é a mesma. No capítulo 08 iremos provar o teorema acima no caso em que $\Lambda = M$, e discutiremos como adaptar a prova para o caso geral. A estabilidade de conjuntos hiperbólicos será muito importante para nós, exatamente porque ela garante que um conjunto hiperbólico não "morre"ao perturbarmos um pouco o difeomorfismo original. Discutiremos este ponto com mais detalhes na seção final deste capítulo.

Pontos Homoclínicos

A definição de um conjunto hiperbólico, diferente da definição de um ponto fixo hiperbólico, é bem mais rebuscada, pois envolve a existência de subfibrados invariantes, e uma pergunta natural é como obter isto. Veremos nas próximas linhas, um resultado que dá a existência de um conjunto hiperbólico, a partir de um mecanismo bastante simples.

Definição 3.2.13. *Dado um ponto periódico p, dizemos que $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ é um* ponto homoclínico *associado a p. Se $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são transversais em x, dizemos que x é um ponto homoclínico transversal.*

Teorema 3.2.14 (Birkhoff-Smale)**.** *Seja p um ponto periódico para um difeomorfismo $f : M \to M$, e x um ponto homoclínico transversal associado a p. Então, existem um inteiro $N > 0$ e um conjunto hiperbólico Λ para f^N, contendo p e x.*

Para uma prova, ver [35].

Como aplicação do teorema de Birkhoff-Smale e do *shadowing lemma*, temos o seguinte resultado.

Lema 3.2.15. *Sejam $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\delta > 0$ e $p \in P(\delta, f)$. Então, todo ponto homoclínico transversal associado a p pertence a $\Sigma(\delta, f)$.*

Demonstração. Seja $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ (interseção transversal). Como $\overline{P(\delta, f)} \subset \Sigma(\delta, f)$, é suficiente provar que x pode ser aproximado por pontos em $P(\delta, f)$. Trocando f por $f^{\pi(p)}$, podemos supor que p é um ponto fixo hiperbólico para f, satisfazendo

$$\frac{1}{m} \log |\det df(p)| < \delta,$$

onde $m = \pi(p)$. Pelo teorema de Birkhoff-Smale, existe um inteiro $n > 0$ e um conjunto hiperbólico Λ para f^n, contendo p e x.

Informalmente, a idéia da prova é usar o *shadowing lemma* para criar órbitas periódicas de período muito grande, mas que passem a maior parte do tempo próximas a p, e depois se aproximem de x. Como $|\det df(p)|$ é próximo de 1, isto irá passar para os pontos da órbita que ficam perto de p, e como estes serão a maioria da órbita, na média, teremos $|\det df|$ perto de 1, e portando a órbita periódica estará em $P(\delta, f)$.

Para realizar o argumento preciso, considere a função contínua $\varphi := \frac{1}{m} \log |\det df(p)|$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $\delta - 2\epsilon > 0$, e tome $r > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\varphi(y) < \delta - 2\epsilon, \tag{3.2}$$

para todo $y \in B(p, r)$, e

$$\varphi(y) - \varphi(z) < \frac{\epsilon}{m} \tag{3.3}$$

para todo par de pontos y, z β-próximos em M. Considere $\alpha > 0$ dado pelo *shadowing lemma* e defina uma α-pseudo-órbita periódica centrada em x e contida em Λ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x_0 &= x,\ x_1 = f^n(x),\ x_2 = f^{2n}(x), \ldots, x_k = f^{kn}(x), \\ x_{k+1} &= f^{-kn}(x),\ x_{k+2} = f^{-kn+1}(x), \ldots, x_{2k+1} = x, \end{aligned}$$

onde $k > 0$ é grande o bastante para que

$$d(f^{kn+1}(x), p) < \frac{\alpha}{2} \text{ e } d(f^{-kn}(x), p) < \frac{\alpha}{2}.$$

Pela desigualdade triangular, isto implica que

$$d(f(x_k), x_{k+1}) \leq d(f^{kn+1}(x), p) + d(p, f^{-kn}(x)) < \alpha,$$

e desse modo $\{x_i\}$ é uma α-pseudo-órbita. Pela escolha de α, existe um ponto periódico y, cuja órbita β-sombreia $\{x_i\}$. Seja $m_y = \pi(y) = 2k + 1$.

Afirmamos que se $k > 0$ é suficientemente grande, então

$$\frac{m}{m_y} \sum_{i=0}^{m_y-1} \varphi(x_i) < \delta - \epsilon \tag{3.4}$$

De fato, seja $c = \sup\{\varphi(z); z \in M\}$ e considere $k_0 > 0$ tal que $f^{nk_0}(x)$ e $f^{-nk_0}(x)$ pertencem a $B(p, r)$. Essencialmente, esse é o tempo em que a pseudo-orbita fica fora da $B(p, r)$. Temos que fazer com que $k - k_0$ (o tempo no qual a pseudo-órbita permanece em $B(p, r)$) seja muito maior do que k_0. Para tanto, é suficiente observar, via 3.2, que

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_y} \sum_{i=0}^{m_y-1} \varphi(x_i) &= \frac{m}{m_y} \left(\sum_{i=0}^{k_0-1} \varphi(x_i) + \sum_{i=k_0}^{2kn-k_0} \varphi(x_i) + \sum_{2kn-k_0+1}^{m_y-1} \varphi(x_i) \right) \\ &< \frac{2k_0 mc}{m_y} + \frac{2nk - 2k_0}{m_y}(\delta - 2\epsilon), \end{aligned}$$

pois, a partir daí, lembrando que $m_y = 2k + 1$, temos que se k é grande o bastante para que $\frac{2k_0 mc}{m_y} < \epsilon$, como $\frac{2k - 2k_0}{m_y} < 1$, então a desigualdade 3.4 se verifica.

Por fim, como

$$d(f^i(y), x_i) < \beta,$$

para todo $0 \leq i \leq m_y$, podemos passar a estimativa 3.4 para a órbita de y, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_y} \log|\det df^{m_y}(y)| &= \frac{m}{m_y} \sum_{i=0}^{m_y-1} \varphi(f^i(y)) = \frac{m}{m_y} \sum_{i=0}^{m_y-1} \left(\varphi(f^i(y)) - \varphi(x_i) + \varphi(x_i)\right) \\ &< \epsilon + \delta - \epsilon < \delta, \end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos respectivamente, a desigualdade 3.3 e a estimativa 3.4. Isto prova que $y \in P(\delta, f)$ e, como $\beta > 0$ é tão pequeno quanto quisermos, estabelece o lema. □

A importância do lema anterior será vista na próxima seção.

3.3 Classes Homoclínicas

Já comentamos que as órbitas periódicas são centrais na descrição da dinâmica de alguns sistemas, devido a sua simplicidade. De fato, uma filosofia comum em matemática é tentar entender objetos complicados decompondo-os, de alguma forma, em objetos simples cuja descrição seja bem conhecida. Nesta seção, vamos introduzir uma relação de equivalência entre órbitas periódicas, a qual terá o papel de dividi-las em "blocos"distintos. Mais tarde, estes blocos serão utilizados para decompormos $\Sigma(\delta, f)$, seguindo essa filosofia.

Dado um ponto periódico hiperbólico p para um difeomorfismo $f : M \to M$, considere $W^s(O(p)) = \bigcup_{x \in O(p)} W^s(x)$, e similarmente para $W^u(O(p))$.

Definição 3.3.1. *Dados p e q pontos periódicos hiperbólicos para f, dizemos que p e q são* homoclinicamente relacionados *se $W^s(O(p))$ intersecta transversalmente $W^u(O(q))$ e $W^u(O(p))$ intersecta transversalmente $W^s(O(q))$.*

A definição acima permite introduzir uma relação no conjunto $\mathrm{Per}_h(f)$ dos pontos periódicos hiperbólicos pondo $p \sim q$ se p e q são homoclinicamente relacionados. É imediato que esta relação é reflexiva e simétrica. Observe também que todo ponto $x \in O(p)$ é homoclinicamente relacionado com p. Usando o λ-lema, é possível provar que tal relação também é transitiva, ver [28], pg. 25. Mais ainda, definindo a *classe homoclínica* de p por $H(p) = \overline{\{q;\ q \sim p\}}$, temos o seguinte resultado, cuja demonstração, o leitor também pode encontrar em [28], pq. 26.

Proposição 3.3.2. *$H(p)$ é um conjunto compacto, invariante e transitivo.*

Um fato importante sobre a relação homoclínica é que, dentro de um conjunto hiperbólico Λ, quaisquer dois pontos periódicos suficientemente próximos são homoclinicamente relacionados. De fato, anteriormente (logo após a definição de estrutura de produto local) observamos que, dado um conjunto hiperbólico Λ existe $\epsilon > 0$ tal que para quaisquer dois pontos $x,\ y$ em Λ, com $d(x, y) < \epsilon$, então $W^s(x)$ intersecta transversalmente $W^u(y)$. Por simetria, é claro que $W^u(x)$ intersecta transversalmente $W^s(y)$. Portanto, se x e y são pontos periódicos, então $x \sim y$. Mais ainda, usando a robustez de conjuntos hiperbólicos e o mesmo argumento, temos que existe uma vizinhança U de Λ tal que se $p,\ q \in U$ são periódicos e suficientemente próximos, então $p \sim q$.

Usando isto, podemos deduzir importantes propriedades de classes homoclínicas. A primeira delas é uma caracterização para a classe homoclínica de p considerando o conjunto

$$HT(p) = \overline{\{x;\ x \text{ é ponto homoclínico transversal associado a } p\}}.$$

Como f é um difeomorfismo, temos que $HT(p)$ é um conjunto invariante. O lema a seguir, em geral, é um exercício nos textos de dinâmica hiperbólica. Como os argumentos usados na demonstração irão aparecer também em resultados importantes do trabalho, por uma questão didática, optamos por fazer um esboço da prova.

Lema 3.3.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto periódico hiperbólico. Se $H(p) \neq O(p)$, então $H(p) = HT(p)$.*

Demonstração. Como $H(p) \neq O(p)$, existe um ponto periódico $q \notin O(p)$, tal que $q \sim p$. Tomando uma potência de f, podemos supor que p e q são pontos fixos distintos homoclinicamente relacionados. Logo, existem pontos $y \in W^s(p) \cap W^u(q)$ e $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$, com ambas interseções transversais. Daí, por um lado temos que qualquer disco mergulhado suficientemente próximo do disco mergulhado $D \subset W^u(q)$ tal que $y \in D$ intersecta $W^s(p)$ transversalmente. Por outro lado, pelo λ-lema, se $\overline{D} \subset W^s(p)$, tal que $x \in \overline{D}$, é um disco mergulhado, então $f^n(\overline{D})$ acumula em D. Portanto, y é acumulado por pontos homoclínicos transversais associados a p, e como $HT(p)$ é um conjunto invariante segue que $q \in HT(p)$. Isto prova que $H(p) \subset HT(p)$. Reciprocamente, se $x \in HT(p)$, então usando o teorema de Birkhoff-Smale e tomando um potência de f, podemos supor que existe um conjunto hiperbólico Λ para f contendo o ponto fixo p e contendo x. Assim como fizemos no lema 3.2.15, podemos criar uma pseudo-órbita periódica centrada em x que passa muito próximo de p. Pelo *shadowing lemma* existe uma órbita periódica $O(q)$ tal que q está perto de p, e um iterado $f^k(q)$ está perto de x. Pelas observações feitas acima, $z \sim p$, para todo $z \in O(q)$, e portanto x é acumulado por pontos homoclinicamente relacionados com p. Segue que $HT(p) \subset H(p)$. □

Os argumentos usados no lema anterior, também se prestam para provar um outro resultado importante.

Lema 3.3.4. *Seja $H(p)$ uma classe homoclínica hiperbólica para um difeomorfismo f. Então $H(p)$ possui estrutura de produto local*

Demonstração. Sejam x e y em $H(p)$ tais que $W^s(x) \cap W^u(y) = \{a\}$, e $W^u(x) \cap W^s(y) = \{b\}$. Pela definição de $H(p)$, existe um ponto periódico q próximo de x, e um ponto periódico r próximo de y. Pelo teorema da variedade estável, existem pontos $a_1 \in W^s(q) \cap W^u(r)$ próximo de a e $b_1 \in W^u(q) \cap W^s(r)$ próximo de b, pois as variedades invariantes variam continuamente. Vamos provar que $a \in H(p)$. O argumento para ver que $b \in H(p)$ é o mesmo. Pelo λ-lema, como na proposição anterior a_1 é acumulado por pontos homoclínicos transversais associados a q. Usando o teorema de Birkhoff-Smale e o *shadowing lemma*, como no lema anterior, os pontos homoclínicos transversais são acumulados por pontos periódicos homoclinicamente relacionados com q, portanto, como a relação homoclínica é transitiva, segue que a_1 é acumulado por pontos periódicos homoclinicamente relacionados com p. Como podemos tomar a_1 tão perto de a quanto quisermos, isto prova que $a \in H(p)$. □

Como consequência imediata do lema 3.3.3 e do lema 3.2.15, temos o

Corolário 3.3.5. *Dados $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\delta > 0$ e $p \in P(\delta, f)$, então $H(p) \subset \Sigma(\delta, f)$.*

O resultado acima torna natural tentar usar as classes homoclínicas de pontos em $P(\delta, f)$ como "blocos"básicos cuja união constitua o conjunto $\Sigma(\delta, f)$, seguindo a filosofia discutida no começo desta seção. Para levar a cabo esta idéia, será preciso que os pontos periódicos $P(\delta, f)$ sejam densos em $\Sigma(\delta, f)$. Na próxima seção, apresentamos um *shadowing lemma* mais geral, o qual, no próximo capítulo, terá o papel de garantir que, sob certas condições, $\overline{P(\delta, f)} = \Sigma(\delta, f)$. Por outro lado, na seção seguinte, iremos estudar a relação entre $\Sigma(\delta, f)$ e os atratores hiperbólicos de f, a qual nos dará um indício de que realmente, $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto adequado para estudarmos se queremos obter hiperbolicidade essencial.

3.4 Dinâmica Não-Uniformemente Hiperbólica

Nesta seção iremos estudar a noção de hiperbolicidade sob um ponto vista bem mais geral, a qual, por conseguinte, não pressupõe que as taxas de contração e expansão sejam as mesmas para *todos* os pontos. Para começar, precisamos definir os conceitos de contração e expansão, sem o auxílio de subfibrados invariantes. Considere $f : M \to M$ um difeomorfismo e um ponto $x \in M$. Para cada vetor $v \in T_xM$, ao invés de nos perguntamos *a priori* se v é expandido ou contraído pela ação da derivada $df(x)$, poderíamos simplesmente medir o que ocorre com v, ao longo de sua órbita por $df(x)$. Ou seja, podemos calcular $\|df^n(x)v\|$, para cada $n \geq 0$, e medir o crescimento exponencial médio da órbita de v, via

$$\frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)v \right\|,$$

e depois tomar o limite quando $n \to \infty$. É razoável pensar que se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)v \right\| < 0,$$

então, em média, v foi contraído ao longo de sua órbita, e similarmente se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)v \right\| > 0,$$

então v sofreu expansão ao longo de sua órbita. Isto nos leva a pensar que, se em todos os pontos $x \in M$, o limite acima nunca é zero, então é razoável dizer que f é não-uniformemente hiperbolico. Apesar de não ser garantido que os limites tomados existam, poderíamos simplesmente forçar a existência, por definição, e depois tentar provar que o conjunto dos pontos $x \in M$ e dos vetores $v \in T_xM$ nos quais o limite existe é, em algum sentido, grande. Formalmente é basicamente isto o que ocorre.

Por simplicidade, em toda esta seção suporemos que M é uma superfície.

Expoentes de Lyapunov

Seja f como acima. Um ponto $x \in M$ é dito *regular* se existem números reais $\lambda_1(x) < \lambda_2(x)$ e uma decomposição

$$T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x),$$

tais que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\|df^n(x)v\right\| = \lambda_j(x),$$

para todo vetor $0 \neq v \in E_j(x)$, com $j = 1, 2$. Os números $\lambda_j(x)$ são chamados os *expoentes de Lyapunov* de f em x, e os subespaços $E_j(x)$ são chamados os *subespaços próprios* de f em x. É possível provar que os expoentes de Lyapunov e os subespaços próprios num ponto regular x são univocamente determinados para cada x, ver [23], pg. 340.

Podemos considerar o conjunto Λ, formado por todos os pontos regulares de M. Tome um ponto $x \in \Lambda$, e suponhamos que $\dim E_1(x) = \dim E_2(x) = 1$. Então, $df(x)E_1(x)$ e $df(x)E_2(x)$ são subespaços unidimensionais de $T_{f(x)}M$, tais que $df(x)E_1(x) \oplus df(x)E_2(x) = T_{f(x)}M$. Além disso, se $v \in df(x)E_1(x)$, então $v = df(x)v_1$, com $v_1 \in E_1(x)$ e portanto $df^n(f(x))v = df^{n+1}(x)v_1$, donde segue que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|df^n(f(x))v\right\| = \lambda_1(x).$$

Similarmente, se $u \in df(x)E_2(x)$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|df^n(f(x))u\right\| = \lambda_2(x).$$

Logo, $f(x) \in \Lambda$. Similarmente, podemos provar que $f^{-1}(x) \in \Lambda$. Analogamente, se $\dim E_1(x) = 2$, também concluímos que $f(x)$, $f^{-1}(x) \in \Lambda$. Com isto, provamos que Λ é um conjunto invariante. Mais ainda, o argumento que apresentamos prova que

$$\begin{aligned} df(x)E_j(x) &= E_j(f(x)) \\ \lambda_j(f(x)) &= \lambda_j(x), \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2$.

Apesar disso, ainda não temos garantia, sequer, de que Λ é não-vazio. O teorema a seguir, mostra que, do ponto de vista ergódico, a situação na verdade é bastante satisfatória, porém é preciso que f possua mais regularidade.

Teorema 3.4.1 (Oseledec)**.** *Se f é de classe C^1, então o conjunto dos pontos regulares de f possui probabilidade total.*

Para uma prova do teorema de Oseledec, em qualquer dimensão, sugerimos ao leitor [23]. Além disso, é possível provar que os expoentes de Lyapunov são funções mensuráveis, e como provamos acima que são funções invariantes, se μ é uma medida invariante e ergódica para f, então para μ-quase todo ponto em M, os expoentes de Lyapunov são constantes. Além disso, também é possível provar que a dimensão dos subespaços próprios é constante num subconjunto de medida total.

Agora, podemos introduzir o conceito de hiperbolicidade não-uniforme. Dizemos que uma medida invariante e ergódica μ é *hiperbólica*, se para μ-quase todo ponto os expoentes de Lyapunov são diferentes de zero. Se f possui uma medida hiperbólica, dizemos que f é *não-uniformemente* hiperbólico.

Uma pergunta natural, é quais resultados que valem para conjuntos hiperbólicos também são verdadeiros para sistemas não-uniformemente hiperbólicos. Não trataremos deste assunto aqui, mas existe uma vasta literatura sobre isso, ver por exemplo [5] ou [31]. No entanto, um resultado que será de vital importância para nossos propósitos, é uma certa generalização do *shadowing lemma*, devida a A. Katok.

O *shadowing lemma* quando aplicado a cordas recorrentes é conhecido como *Anosov closing lemma*. Ou seja, tal resultado permite sombrear órbiras recorrentes em conjuntos hiperbólicos por órbias periódicas. O resultado de Katok, que enunciamos a seguir, permite fazer o mesmo, só que no contexto não-uniformemente hiperbólico. A forma como o apresentamos aqui esta contida na prova do teorema 4.1 em [18].[5]

Teorema 3.4.2 (Katok). *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^2, que admite uma medida hiperbólica μ. Então, para todo ponto genérico $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, dado $\epsilon > 0$, existem um $n > 0$ e um ponto periódico p, tal que $\pi(p) = n$, e $d(f^j(p), f^j(x)) < \epsilon$, para todo $1 \leq j \leq n$.*

Com o teorema acima, no próximo capítulo poderemos provar que $P(\delta, f)$ é denso em $\Sigma(\delta, f)$, quando f é de classe C^2 e cumpre uma hipótese adicional, a qual também será estudada no próximo capítulo.

3.5 Atratores Hiperbólicos

Considere $f \in \operatorname{Diff}^1(M)$ e $\Lambda \subset M$ compacto e invariante, tal que $f|_\Lambda$ é transitivo. Lembre que tal conjunto é dito um *atrator* se existe um aberto U, chamado a *bacia local* de Λ, contendo Λ tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $\Lambda = \cap_{n\geq 0} f^n(U)$. Ao conjunto $W^s(\Lambda) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ damos o nome de *bacia global*, ou simplesmente a *bacia* de Λ. Note que a bacia de um atrator é um conjunto aberto. Nesta seção, iremos estudar algumas propriedades gerais de atratores hiperbólicos.

Fixe f e Λ como na definição acima.

O primeiro corolário automático da definição é que atratores são sempre isolados, pois

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = \left(\bigcap_{n<0} f^n(U)\right) \cap \left(\bigcap_{n\geq 0} f^n(U)\right) \subset \Lambda,$$

e como obviamente,

$$\Lambda \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U),$$

segue que Λ é isolado. Note também que toda vizinhança de Λ contida na bacia local de Λ também é uma bacia local.

Vamos examinar o que ocorre com os pontos na bacia $W^s(\Lambda)$. Observe que, se $x \in U$, então a órbita positiva de x está inteiramente contida em U. Considere $a \in \omega(x)$. Por

[5] De fato, o teorema que enunciamos é provado tomando um ponto genérico no suporte da medida e aplicando-se o *main lemma* do mesmo artigo, como na prova do teorema 4.1 de [18].

definição, existe $n_k \to \infty$, tal que

$$a = \lim f^{n_k}(x).$$

Logo, dado $l > 0$, temos

$$f^{-l}(a) = \lim f^{-l+n_k}(x),$$

e como para todo k suficientemente grande $f^{-l+n_k}(x) \in U$, segue que $f^{-l}(a) \in U$. Portanto, $a \in f^l(U)$, para todo $l \geq 0$, ou seja,

$$a \in \bigcap_{l \geq 0} f^l(U) = \Lambda.$$

Isto prova que $\omega(x) \subset \Lambda$. Além disso, se $x \in W^s(\Lambda)$, então existe um iterado $N > 0$ tal que $f^N(x) \in U$, e portanto

$$\omega(x) = \omega\left(f^N(x)\right) \subset \Lambda.$$

Em resumo, temos o seguinte

Lema 3.5.1. *Se $x \in W^s(\Lambda)$ então $\omega(x) \subset \Lambda$.*

O lema acima diz que a definição formal de um atrator realiza o que era esperado intuitivamente. A seguir vamos dar uma condição necessária e suficiente para que um conjunto hiperbólico seja um atrator. Na prova, usaremos um lema devido a Smale, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [28], pg. 47.

Lema 3.5.2 (Smale)**.** *Suponha que Γ seja um compacto invariante por f que admite uma vizinhança U satisfazendo $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \Gamma$. Então, existe uma vizinhança V de Γ, com $\overline{V} \subset U$ tal que $f(\overline{V}) \subset V$.*

O lema de Smale diz que para provarmos que um compacto invariante e transitivo Γ é um atrator, é suficiente provarmos que existe uma vizinhança U de f tal que $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \Gamma$. Note que esta condição significa que se $x \in U$ e $f^{-n}(x) \in U$ para todo $n \geq 0$ então $x \in \Gamma$.

Proposição 3.5.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico transitivo para um difeomorfismo f. Então, Λ é um atrator, se, e somente se, para todo $x \in \Lambda$, $W^u(x) \subset \Lambda$.*

Demonstração. Suponha que Λ seja um atrator. Tome ϵ tal que, se $p \in M$ e $d(p, \Lambda) < \epsilon$ então $p \in U$, onde U é a bacia local de Λ. Logo, para todo $x \in \Lambda$ se $p \in W^u_\epsilon(x)$, então $d(f^{-n}(p), \Lambda) < \epsilon$, para todo $n \geq 0$. Portanto, para todo $p \in W^u_\epsilon(x)$, $f^{-n}(p) \in U$, para todo $n \geq 0$. Como U é a bacia local de Λ, concluímos que $p \in \Lambda$. Isto prova que $W^u_\epsilon(x) \subset \Lambda$, para todo $x \in \Lambda$. Por outro lado, reduzindo ϵ, se necessário, temos também que $W^u(x) = \cup_{n \geq 0} f^n\left(W^u_\epsilon(x)\right)$, e segue que $W^u(x) \subset \Lambda$, para todo $x \in \Lambda$. Reciprocamente, $\epsilon > 0$, a determinar, e U a vizinhança de Λ tal que, para todo $y \in U$, $d(y, \Lambda) < \epsilon$. Seja $\beta > 0$ tal que $W^u_\beta(x) \subset \Lambda$, para todo $x \in \Lambda$. Suponha que $\epsilon < \beta/2$, e tome $0 < \gamma < \beta/2$. Então $\epsilon + \gamma < \beta$. Pelo *shadowing lemma*, existe $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo-órbita pode ser γ sombreada. Suponhamos também que $\epsilon < \alpha/2$ e tome $0 < r < \alpha/2$. Então, $r + \epsilon < \alpha$. Por fim, pela continuidade uniforme de f^{-1}, se ϵ é pequeno, temos que

$d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < r$, sempre que $d(a,b) < \epsilon$. Agora vamos provar que se ϵ satisfaz estas hipóteses, então a correspondente vizinhança U cumpre

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(U) = \Lambda.$$

Para estabelecermos isto, suponha que $y \in U$ é tal que $f^{-n}(y) \in U$, para todo $n \geq 0$. Segue daí que existem pontos $x_n \in \Lambda$, tais que $d(x_n, f^{-n}(y)) < \epsilon$. Pela desigualdade triangular,

$$d(x_{n+1}, f^{-1}(x_n)) \leq d(x_{n+1}, f^{-n-1}(y)) + d(f^{-n-1}(y), f^{-1}(x_n)) < \epsilon + r < \alpha,$$

donde segue que $\{x_n\}$ é uma α-pseudo-órbita. Logo, existe um ponto $p \in \Lambda$ cuja órbita γ-sombreia a sequência $\{x_n\}$. Portanto, para todo $n \geq 0$, temos

$$d(f^{-n}(p), f^{-n}(y)) \leq d(f^{-n}(p), x_n) + d(x_n, f^{-n}(y)) < \gamma + \epsilon < \beta,$$

donde segue que $y \in W^u_\beta(p) \subset \Lambda$. Portanto, $\Lambda = \cap_{n\geq 0} f^n(U)$ e, pelo lema de Smale, segue que Λ é um atrator. □

Como atratores são sempre isolados, e como dissemos acima que que isolamento e estrutura de produto local são conceitos equivalentes para conjuntos hiperbólicos, todo atrator hiperbólico possui estrutura de produto local. No entanto, a proposição acima também oferece uma outra prova desse fato, o qual destacamos no corolário abaixo, para referência no futuro.

Corolário 3.5.4. *Todo atrator hiperbólico possui estrutura de produto local.*

Demonstração. Basta tomar $\epsilon > 0$ tal que se $x,\ y \in \Lambda$ e $d(x,y) < \epsilon$ então $W^s(x) \cap W^u(y)$, pois como $W^u(y) \subset \Lambda$, pela proposição anterior, segue que $W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Lambda$. □

Como conjuntos hiperbólicos persistem por perturbações suficientemente pequenas, podemos nos perguntar se a continuação de um atrator hiperbólico é ainda um atrator hiperbólico. Para responder a esta pergunta, usaremos a estabilidade de conjuntos hiperbólicos isolados.

Com efeito, tome $\mathcal{U}$ e V as vizinhanças de f e de Λ, respectivamente, dadas pela estabilidade de conjuntos hiperbólicos isolados. Sabemos que para todo $g \in \mathcal{U}$, o invariante maximal da vizinhança V é um conjunto hiperbólico para g. Vamos provar que este conjunto é um atrator. Seja

$$\Gamma_g = \bigcap_{n\geq 0} g^n(V).$$

Reduzindo V se necessário, podemos supor que $f(\overline{V}) \subset V$, e como $f(\overline{V})$ é compacto, a distância entre $f(\overline{V})$ e $M - V$ é positiva, logo se g está suficientemente próximo de f, temos que $g(\overline{V}) \subset V$. Como $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(V)$ é óbvio que

$$\Lambda_g \subset \bigcap_{n\geq 0} g^n(V).$$

Por outro lado, como $\Gamma_g \subset V$ implica $g^m(\Gamma_g) \subset V$ temos que

$$\Gamma_g \subset g^{-m}(V),$$

para todo $m \geq 0$. Isto implica que

$$\Gamma_g \subset \bigcap_{m \leq 0} g^m(V),$$

donde segue que

$$\Gamma_g = \left(\Gamma_g\right) \cap \left(\bigcap_{m \geq 0} g^m(V) \right) \subset \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} g^m(V).$$

Portanto, para toda g suficientemente próxima de f, temos que Λ_g é um conjunto hiperbólico para g, o qual admite uma vizinhança V, tal que $g(\overline{V}) \subset V$ e

$$\Lambda_g = \bigcap_{n \geq 0} g^n(V).$$

Além disso, como existe um homeomorfismo $h_g : \Lambda \to \Lambda_g$ tal que $h_g \circ f = g \circ h_g$, e como Λ é transitivo para f, temos que Λ_g também é um conjunto transitivo para g. Portanto, Λ_g é um atrator para g. Em resumo, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5.5 (Estabilidade de Atratores Hiperbólicos). *Sejam f um difeomorfismo de classe C^1 e Λ um atrator hiperbólico. Então, existem uma vizinhança V de Λ, contida na bacia local de Λ (em particular também é uma bacia local) e uma vizinhança $\mathcal{V}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{V}$, $\Lambda_g = \cap_{n \geq 0} g^n(V)$ é um atrator hiperbólico para g, tal que V é uma bacia local para Λ_g. Além disso, existe um homeomorfismo $h_g : \Lambda \to \Lambda_g$ tal que $h_g \circ f = g \circ h_g$, e h_g varia continuamente com g.*

O teorema acima garante que, todo difeomorfismo suficientemente próximo de f possui um atrator hiperbólico Λ_g próximo de Λ e Λ_g possui a mesma bacia local de Λ.

Agora vamos estudar a relação entre o conjunto $\Sigma(\delta, f)$ e os atratores hiperbólicos de f.

Proposição 3.5.6. *Sejam $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\delta > 0$ e Λ um atrator hiperbólico para f. Então, existe $y \in \Lambda$ tal que $y \in \overline{P(\delta, f)}$.*

Demonstração. Como $W^s(\Lambda)$ é um subconjunto aberto de M, $m\left(W^s(\Lambda)\right) > 0$. Pelo lema 2.4.5, $m\left(\Lambda(\delta, f)\right) = 1$. Logo, existe $x \in \Lambda(\delta, f) \cap W^s(\Lambda)$. Considere uma medida orbital $\mu \in M(x)$. Como $x \in W^s(\Lambda)$, $\omega(x) \subset \Lambda$, e, de acordo com o lema 2.2.8, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \omega(x) \subset \Lambda$. Por outro lado, como $x \in \Lambda(\delta, f)$, usando o teorema da decomposição ergódica e o lema 2.4.6 temos que $\mu \in M(\delta, f)$. Seja y um ponto genérico no suporte de μ. Se y é periódico, então $y \in P(\delta, f)$ e não há nada para provarmos. Suponha então que y não é periódico. Vamos provar que ele é acumulado por pontos periódicos em $P(\delta, f)$.

Em linhas gerais a idéia do argumento é a seguinte: como y é genérico e μ é ergódica, tomando uma corda $\{y, ..., f^N(y)\}$ da órbita de y, suficientemente grande, a média temporal (com respeito à função $\log|\det df|$) associada a esta corda estará próxima de

$$\int \log|\det df| d\mu < \delta,$$

e portanto também será menor do que δ. Como y é recorrente, podemos usar o *shadowing lemma* e obter uma órbita periódica sombreando $\{y, ..., f^N(y)\}$. O sombreamento implicará que a média temporal ao longo da órbita periódica estará próximo da média temporal associada a corda, e como esta é menor do que δ, aquela também será.[6]

Formalmente, o argumento é assim: considere $b = \int \log|\det df| d\mu$. Tome $\epsilon > 0$ tal que, se

$$|x - b| < 2\epsilon,$$

então $x < \delta$. Considere também $\varphi := \log|\det df|$, e como esta função é contínua, existe $\beta > 0$ tal que para quaisquer dois pontos x, y de M β-próximos vale $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$. Pelo *shadowing lema*, existe $\alpha > 0$ tal que que toda α-pseudo-órbita periódica em Λ pode ser β-sombreada por uma órbita periódica. Como μ é ergódica e $y \in \text{supp}(\mu)$ é genérico, existe um N grande satisfazendo,

$$d(f^N(y), y) < \alpha,$$

e

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(y)) - b\right| < \epsilon.$$

Defina a sequência periódica $\{x_i\}$, $x_0 = y$, $x_1 = f(y)$,...,$x_{N-1} = f^{N-1}(y)$ e $x_N = y$. Então,

$$d\left(x_N, f(x_{N-1})\right) < \alpha,$$

pela escolha de N, e segue que $\{x_i\}$ é uma α pseudo-órbita periódica centrada em y. Seja $p \in M$ o ponto periódico cuja órbita β-sombreia $\{x_i\}$. Vamos provar que a medida periódica μ_p pertence a $M(\delta, f)$. Note que, para todo $0 \leq i \leq N-1$,

$$|\varphi(f^i(p)) - \varphi(f^i(y))| < \epsilon,$$

e portanto

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(p)) - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(y))\right| < \epsilon.$$

Como

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(y)) - b\right| < \epsilon,$$

pela desigualdade triangular segue que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(p)) - b\right| < 2\epsilon.$$

[6]De fato, esta idéia de sombrear um ponto genérico no suporte de uma medida em $M(\delta, f)$ já foi usada na prova do teorema 2.5.5. A diferença, é que lá era necessário perturbar, via o *ergodic closing lemma* para obter um ponto periódico em $P(\delta, g)$.

Devido a escolha de ϵ, isto prova que $\mu_p \in M(\delta, f)$. Como β é tão pequeno quanto se queira, e como o sombremento implica $d(p, y) < \beta$, o resultado segue. $\square$

Observação 3.5.7. *Note que, no meio da demonstração, obtivemos o seguinte "fato geral": se um ponto genérico no suporte de uma medida $\mu \in M(\delta, f)$ pode ser sombreado por órbitas periódicas, então estas órbitas estão em $P(\delta, f)$. Esta observação é importante, porque em diversos contextos temos outros resultados que fazem o papel do* shadowing lemma*, como por exemplo o teorema de Katok e o* ergodic closing lemma*, e isto nos permite ainda assim obter pontos periódicos em $P(\delta, f)$ (ou $P(\delta, g)$, com $g \sim f$, no caso do* ergodic closing lemma*), a partir de pontos genéricos no suporte de uma medida em $M(\delta, f)$.*

Como atratores são isolados, a órbita periódica encontrada pelo *shadowing lemma* na proposição anterios pertence a Λ. Com isto, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.5.8. *Se f é um difeomorfismo como na proposição anterior então todo atrator hiperbólico de f contém pontos periódicos em $P(\delta, f)$.*

Desse modo, existe pelo menos um ponto periódico $p \in P(\delta, f)$ em Λ. O próximo resultado examina a relação entre a classe homoclínica de p e Λ.

Proposição 3.5.9. *Seja f um difeomorfismo que admite uma atrator hiperbólico Λ. Suponha que existe uma classe homoclínica $H(p)$ tal que $H(p) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Então $H(p) = \Lambda$.*

Demonstração. Seja $q \in \Lambda \cap H(p)$. Pela proposição 3.3.2, $H(p)$ é transitivo, logo existe um ponto $x \in H(p)$ tal que $\omega(x) = H(p)$. Em particular, como $q \in \Lambda$, e como a bacia local de Λ contém Λ, existe um iterado $f^n(x)$ que pertence à bacia local, digamos U, de Λ. Se $f^n(x) \in \Lambda$, então $\omega(x) \in \Lambda$, e segue que $H(p) \subset \Lambda$. Se, no entanto, $f^n(x) \in U - \Lambda$, como os pontos de U são assintóticos à Λ, temos, da mesma forma, que $\omega(x) \subset \Lambda$. Portanto, $H(p) \subset \Lambda$.

Para estabelecer a inclusão contrária devemos provar que todo ponto de Λ é acumulado por pontos periódicos homoclinicamente relacionados com p. Para isso, basta provar que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma órbita periódica ϵ-densa em Λ que é homoclinicamente realcionada com p, pois isto implica que todo ponto de Λ é acumulado por pontos periódicos $q \sim p$, donde segue que $\Lambda \subset H(p)$

A idéia é usar a transitividade de Λ para obter uma corda $\frac{\epsilon}{2}$-densa em Λ e recorrente, e daí usar o *shadowing lemma* para $\frac{\epsilon}{2}$-sombrear essa corda por uma órbita periódica, e portanto esta órbita periódica deverá ser ϵ-densa em Λ. Como Λ é um conjunto hiperbólico, se ϵ é pequeno esta órbita será homoclinicamente relacionada com p.

Com efeito, seja $y \in \Lambda$ cuja órbita futura é densa em Λ e tome $\epsilon_1 > 0$ tal que quaisquer dois pontos periódicos em Λ ϵ_1-próximos são homoclinicamente relacionados e tome $\epsilon \leq \epsilon_1$. Pelo *shadowing lemma*, existe $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo-órbita pode ser $\epsilon/2$ sombreada. Por compacidade podemos cobrir Λ com um número finito de bolas $B(x_i, \frac{\epsilon}{4})$. Para cada i existe $n_i > 0$ tal que $f^{n_i}(y) \in B(x_i, \frac{\epsilon}{4})$. Além disso, existe $N > \max\{n_i\}$ tal que $d(y, f^N(y)) < \alpha$. Definimos a sequência periódica $y_0 = y, \ldots, y_{N-1} = f^{N-1}(y)$ e $y_N = y$. Com o mesmo argumento usado na proposição anterior, vemos que $\{y_j\}$ é uma

α-pseudo-órbita periódica. Além disso, dado $z \in \Lambda$, existe algum i tal que $z \in B(x_i, \frac{\epsilon}{4})$, logo

$$d(z, f^{n_i}(y)) \leq d(z, x_i) + d(x_i, f^{n_i}(y)) < \frac{\epsilon}{2},$$

e segue $\{y_j\}$ é $\epsilon/2$-densa em Λ. Pelo *shadowing lemma* existe um ponto periódico $q \in \Lambda$ cuja órbita $\epsilon/2$-sombreia a pseudo-órbita $\{y_j\}$. É imediato que a órbita de q é ϵ-densa em Λ. Em consequência disso, existe um ponto da órbita de q ϵ-próximo de p. Como $\epsilon \leq \epsilon_1$, segue que p e q são homoclinicamente relacionados. Isto conclui a prova. □

Finalmente, dado um difeomorfismo f de classe C^1 e Λ um atrator hiperbólico para f, o corolário 3.5.8 diz que existe um ponto periódico $p \in P(\delta, f) \cap \Lambda$. Pela proposição 3.5.9, $\Lambda = H(p)$. Portanto, pelo corolário 3.3.5, $\Lambda \subset \Sigma(\delta, f)$, e provamos assim o

Teorema 3.5.10. *Dados $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e Λ um atrator hiperbólico para f então $\Lambda \subset \Sigma(\delta, f)$.*

Este teorema diz que para tentarmos provar que um certo difeomorfismo f é essencialmente hiperbólico uma tentativa é estudar o conjunto $\Sigma(\delta, f)$. A propriedade que buscamos obter é a hiperbolicidade, pois, como veremos no capítulo 06, ela irá garantir que f é essencialmente hiperbólico. No meio do caminho, aparece uma dificuldade, pois para provarmos que $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico será preciso exigir mais regularidade de f. Para contornar esta dificuldade iremos usar o fato que $\mathrm{Diff}^2(M)$ é denso em $\mathrm{Diff}^1(M)$.[7] Contudo, como somente isto não será suficiente, teremos um trabalho adicional no fim do próximo capítulo.

[7]Ver [13], pg. 25, ou qualquer livro de Topologia Diferencial

Capítulo 4

Dominação

A idéia de dominação surgiu em diversos trabalhos ao longo da década de 70, e foi usada de maneira central por Mañé e Liao no estudo da conjectura da estabilidade. Inicialmente, ela foi pensada como um mero passo auxiliar para se obter hiperbolicidade, mas nos dias atuais é um conceito central, especialmente no entendimento dos sistemas não hiperbólicos.

Tudo começa em tentar enfraquecer um pouco a definição de hiperbolicidade. Lembre que hiperbolicidade significa contração e expansão em direções complementares. Ou seja, os comportamentos nas direções complementares são absolutos. Uma maneira de enfraquecer a definição é tornar estes comportamentos relativos: o que acontece numa direção depende do que acontece na outra.

De modo preciso, a definição de dominação é a seguinte.

Definição 4.0.11. *Dizemos que um conjunto $\Lambda \subset M$ invariante por um difeomorfismo $f : M \to M$ admite uma* decomposição dominada *se existe uma decomposição em soma direta do fibrado tangente restrito a Λ, df-nvariante, $T_\Lambda M = E \oplus F$, e existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

$$\left\|df^n(x)|_E\right\| \left\|df^{-n}(f^n(x))|_F\right\| \leq C\lambda^n,$$

para todo $x \in \Lambda$[1]

É imediato que toda decomposição hiperbólica $E^s \oplus E^u$ é uma decomposição dominada.

O significado intuitivo da definição acima é o seguinte: se ao longo de uma órbita existe uma contração (ou uma expansão muito fraca) na direção F, então, nesta órbita, tem que haver uma contração ainda mais forte na direção E. Similarmente, se acontece alguma expansão (ou uma contração muito fraca) na direção E, tem que haver uma expansão mais forte ainda na direção F. Observe que a definição não é simétrica. Em outras palavras, se $E \oplus F$ é uma decomposição dominada, isto não implica que $F \oplus E$ seja. Mesmo que isto seja verdade, são decomposições dominadas diferentes.

[1]Em todo este trabalho, optamos por usar a notação $df(x)|_E$ para denotar a ação da derivada no ponto x restrita à fibra E_x, omitindo a menção ao ponto base na fibra.

Este é um dos principais capítulos do trabalho. Seguindo a estratégia de Mañé, para obter hiperbolicidade em $\Sigma(\delta, f)$, primeiro vamos obter uma decomposição dominada.

Algumas propriedades básicas

Note que enunciamos a noção de dominção num subconjunto qualquer da variedade, não necessariamente compacto. No entanto, é fácil provar que se Λ admite uma decomposição dominada, então $\overline{\Lambda}$ também admite.

Lema 4.0.12. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante que admite uma decomposição dominada $E \oplus F$. Então, $\overline{\Lambda}$ admite uma decomposição dominada.*

Demonstração. Essencialmente, a prova consiste em usar a compacidade do grassmaniano[2] para, dada uma sequência x_n em Λ, obter um limite para E_{x_n} e F_{x_n}, pois a estimativa da dominação segue pela continuidade da derivada.

Com efeito, se $x \in \overline{\Lambda}$ e $x_n \in \Lambda$, $x_n \to x$, pela compacidade do grassmaniano, podemos supor, a menos de passar a subsequências, que E_{x_n} e F_{x_n} convergem a subespaços E_x e F_x em T_xM. Em seguida, a menos de passar a uma subsequencia novamente, podemos supor que $E_{f(x_n)}$ e $F_{f(x_n)}$ convergem a subespaços $E_{f(x)}$ e $F_{f(x)}$. Mediante um processo diagonal[3], podemos supor que $E_{f^j(x_n)}$ e $F_{f^j(x_n)}$ convergem a subespaços $E_{f^j(x)}$ e $F_{f^j(x)}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pela continuidade da derivada, segue que $E_{f(x_n)} = df(x_n)(E_{x_n}) \to df(x)E_x$, e portanto $df(x)E_x = \lim E_{f(x_n)} = E_{f(x)}$. Similarmente, provamos que F é um subfibrado invariante. Finalmente, para provar que E e F satisfazem a estimativa de dominação, fixamos $k \in \mathbb{N}$. Pela dominação em Λ, temos que

$$\left\|df^k(x_n)|_E\right\| \left\|df^{-k}(f^k(x_n))|_F\right\| \leq C\lambda^k,$$

logo, como df^k é contínua,

$$\left\|df^k(x)|_E\right\| \left\|df^{-k}(f^k(x))|_F\right\| \leq C\lambda^k,$$

e o resultado segue. □

Uma forma mais geral de se obter dominação a partir de decomposições dominadas já existentes é fornecida pelo resultado a seguir, o qual é uma extensão do lema anterior e será importante mais a frente.

Lema 4.0.13. *Seja Λ um conjunto invariante por f. Suponha que exista $N \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in \Lambda$ existe uma sequência $f_n \to f$, e pontos $x_n \to x$, com uma*

[2] O grassmaniano de dimensão k da variedade é o fibrado cujas fibras são $G_k(T_xM)$, i.e. o conjunto de todos os subespaços de dimensão k de T_xM, para cada $x \in M$. É possível provar que cada $G_k(T_xM)$ é uma variedade compacta, ver [20] pg. 123. Como as fibras são compactas, este fibrado é compacto. Para o estudo dos fibrados, ver [38].

[3] Como na prova do Teorema de Arzelà-Ascoli, ver [36]

decomposição df_n invariante ao longo da f_n-órbita de x_n, $T_{O_{f_n}(x_n)}M = E^n \oplus F^n$, de maneira que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista um natural $1 \le k = k(x,n) \le N$ tal que

$$\left\| df_n^k(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-k}(f_n^k(x_n))|_{F^n} \right\| \le \frac{1}{2}.$$

Então, Λ admite uma decomposição dominada pra f.

Demonstração. Fixe $x \in \Lambda$. Argumentando como antes, via compacidade do grassmaniano podemos supor que $E^n_{f_n^j(x_n)} \to E_{f^j(x)}$, e similarmente para F^n, e ainda de modo que a invariância de E^n e F^n implique que E e F são df-invariantes, já que $df_n \to df$. A idéia para concluir a prova é mostrar que a hipótese implica que os f_n satisfazem a estimativa de dominação, com constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$, independentes de n. Isto permitirá passar a estimativa ao limite e conseguir a estimativa de dominação ao longo da órbita de $x = \lim x_n$.

Para obtermos a estimativa de dominação ao longo da órbita de x_n, procedemos assim. Dado $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| df_n^m(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m}(f_n^m(x_n))|_{F^n} \right\| &\le \left\| df_n^k(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-k}(f_n^m(x_n))|_{F^n} \right\| \\ &\times \left\| df_n^{m-k}(f_n^k(x_n))|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m+k}(f_n^{m-k}(x_n))|_{F^n} \right\| \\ &\le \frac{1}{2} \left\| df_n^{m-k}(f_n^k(x_n))|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m+k}(f_n^{m-k}(x_n)) \right\|, \end{aligned}$$

onde $k = k(x,n)$ do enunciado. Se $m - k > N$, considerando $k(f^{k(x,n)}(x), n)$, podemos aplicar o mesmo raciocínio seguidamente, mas como $k(x,n) \le N$, para todo x e todo n, isto só poderá ocorrer, no máximo $\left[\frac{m}{N}\right]$ vezes, e concluímos que

$$\left\| df_n^m(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m}(f_n^m(x_n))|_{F^n} \right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{m}{N}\right]} \left\| df_n^{m-l}(f_n^l(x_n))|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m+l}(f_n^{m-l}(x_n))|_{F^n} \right\|,$$

com $m - l \le N$. Como $df_n \to df$, temos que

$$\sup\{\|df_n(x)\|;\ x \in M\ n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

o que nos permite tomar

$$c = \sup\{\|df_n^i(y)\|, \|df_n^{-i}(y)\|;\ y \in M,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le N\},$$

e da estimativa acima obtemos

$$\left\| df_n^m(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-m}(f_n^m(x_n))|_{F^n} \right\| \le c \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{m}{N}\right]}.$$

Tomando m suficientemente grande, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| df_n^{n_0}(x_n)|_{E^n} \right\| \left\| df_n^{-n_0}(f_n^{n_0}(x_n))|_{F^n} \right\| < \frac{1}{2},$$

para todo n e todo $x \in \Lambda$. Agora, tomando

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0},$$

$c_0 = \max\left\{1, \sup\{\|df_n^j(y)\|, \|df_n^{-j}(y); \ y \in M, \ 1 \leq j \leq n_0, \ n \in \mathbb{N}\}\right\}$, $k_0 > 0$ tal que $1 \leq k_0\lambda^{n_0}$ e $C = c_0k_0$, com um argumento análogo àquele usado no lema 3.2.3, obtemos que

$$\left\|df_n^m(x_n)|_{E^n}\right\| \left\|df_n^{-m}(f_n^m(x_n))|_{F^n}\right\| \leq C\lambda^m,$$

para todo $x \in \Lambda$ e todo $m \in \mathbb{N}$. Daí, fixando m e tomando o limite quando $n \to \infty$, segue finalmente que

$$\left\|df^m(x)|_E\right\| \left\|df^{-m}(f^m(x))|_F\right\| \leq C\lambda^m,$$

e isto prova que $E \oplus F$ é uma decomposição dominada para f. □

Algumas propriedades que valem para conjuntos hiperbólico, também valem para decomposições dominadas. Por exemplo, podemos provar que E e F são únicos, fixada sua dimensão,[4] contínuos, e que vale um teorema tipo robustez: existe uma vizinhança de f tal que para todo difeomorfismo g nesta vizinhança, o invariante maximal por g desta vizinhança possui uma decomposição dominada. As provas são similares ao caso hiperbólico, e o leitor pode encontrar em [8], por exemplo.

4.1 Difeomorfismos com Finitos Poços Robustamente

O teorema de Araújo diz que difeomorfismos genéricos com apenas um número finito de poços são essencialmente hiperbólicos. Para provarmos isto vamos considerar difeomorfismos que possuem, robustamente, um número finito de poços. No capítulo 06 veremos que um difeomorfismo genérico com um número finito de poços, sempre cumpre esta condição.

Definição 4.1.1. *Definimos $P(M) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ como o conjunto dos f que admitem uma vizinhança na qual todos os difemorfismos possuem o mesmo número finito de poços.*

Esta finitude robusta do número de poços aliada a sua continuação analítica nos permite localizar e ter controle sobre o conjunto de poços de todos os difeomorfismos na vizinhança de definição de $P(M)$. De fato, temos o seguinte lema, que é uma consequência imediata da definição.

Lema 4.1.2. *Sejam $f \in P(M)$ e $S(f)$ o conjunto de poços de f. Então, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f e uma vizinhança U de $S(f)$ tais que para todo $g \in \mathcal{U}$ os únicos poços de g são aqueles dados pela continução analítica dos poços de f e $S(g) \subset U$.*

[4] À dimensão de E damos o nome de *índice* da decomposição dominada. Como no caso hiperbólico, temos o resultado que diz que, fixado o índice, só existe uma decomposição dominada

Demonstração. Suponha que o conjunto de poços de f é $S(f) = \{p_1, ..., p_n\}$. Seja $\mathcal{U}$ a vizinhança de f dada pela definição de $P(M)$. Pela continuação analítica de pontos periódicos hiperbólicos, podemos supor que para todo $g \in \mathcal{U}$, existe $p_i(g) \in B(p_i, r)$ para todo i, onde $B(p_i, r) \cap B(p_j, r) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Como o número de poços de g é igual ao número de poços de f, temos que $S(g) = \{p_1(g), ..., p_n(g)\}$. Basta tomar $U = \cup B(p_i, r)$. □

Com isso, podemos derivar muitas propriedades importantes gozadas por $P(M)$, mediante argumentos de perturbação, via a seguinte estratégia heurística: de certo modo, $f \in P(M)$ é semelhante a f não possuir poços robustamente, logo para provar um resultado sobre f, podemos supor que o mesmo não é verdadeiro e produzir um poço para uma perturbação. Neste ponto a principal ferramenta é um lema, aparentemente ingênuo, apresentado por Franks em [15], mas que possui uma iportância monumental para a teoria. No Apêndice apresentamos uma prova deste resultado.

Lema 4.1.3 (Lema de Franks). *Sejam $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e $\mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f. Então, existem $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f, e $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $g \in \mathcal{U}_0$ e $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto finito de pontos distintos de M, tal que existam mapas lineares $L_i : T_{x_i}M \to T_{f(x_i)}M$ satisfazendo*

$$\|L_i - dg(x_i)\| < \epsilon,$$

e U é uma vizinhança desse conjunto finito de pontos, então existe $\overline{g} \in \mathcal{U}$, $\overline{g} = g$ em $\{x_1, ..., x_n\} \cup (M - U)$ de tal forma que $d\overline{g}(x_i) = L_i$.

O lema de Franks diz que, ao realizarmos pequenas perturbações lineares da *derivada* de um difeomorfismo, num conjunto finito, é sempre possível obter um difeomorfismo próximo do original, que realiza as perturbações como derivada, ao longo do conjunto finito de pontos. Em particular, ele reduz algumas dificuldades a problemas de Álgebra Linear. Teremos inúmeras oportunidades de ver como isto funciona, pois este será um dos resultados mais utilizados no trabalho. Por exemplo, o leitor pode notar que se $f \in P(M)$ e $p \notin S(f)$ é um ponto periódico que possui um autovalor menor do que 1, então o outro autovalor não pode ser igual a 1, já que, do contrário, usando o lema de Franks, poderíamos transformar p num poço para um difeomorfismo g arbitrariamente próximo de f, e isto viola o lema 4.1.2. De fato, vamos apresentar uma versão mais geral deste argumento no lema a seguir, o qual fornece uma dicotomia sobre as (possíveis) forças de contração/expansão nos periódicos em $P(\delta, f)$ que não são poços.

Lema 4.1.4. *Se $f \in P(M)$ então existem $\delta_0 > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{U}_0$ de f tal que se $g \in \mathcal{U}_0$ e $x \in P(\delta, g) - S(g)$, com $\delta \leq \delta_0$ e $\pi(p) = n$, então os autovalores $|\lambda| \leq |\mu|$ de $dg^n(x)$ cumprem*

$$|\lambda| \geq (1+\delta)^n \text{ ou } |\mu| \geq (1+\delta)^n.$$

Demonstração. Suponha que o lema não é verdadeiro. Então, arbitrariamente próximo de f, existe um difeomorfismo g exibindo um ponto periódico x (que não é poço) de período n, cujos autovalores são tão fracos quanto se queira, i.e, menores que $(1+\delta)^n$, com δ podendo ser escolhido arbitrariamente pequeno.

A idéia da prova é a seguinte: se pudéssemos produzir uma ligeira perturbação $\overline{g}$ de g, tendo ainda x como ponto periódico de período n, mas com a derivada

$$d\overline{g}^n(x) = (1-\delta)^n dg^n(x),$$

como os autovalores de $dg^n(x)$ são dominados por $(1+\delta)^n$, o mapa resultante teria os autovalores com tamanho dominado por

$$[(1+\delta)(1-\delta)]^n = (1-\delta^2)^n < 1,$$

o que implicaria em x ser um poço para $\overline{g}$. Como x não é poço para g, isto faria com que $\overline{g}$ possuísse um poço a mais do que g, portanto e seria uma contradição com $f \in P(M)$.

Para ver que esta idéia realmente funciona, tome $\mathcal{U}_0$ e $\epsilon > 0$ do lema de Franks aplicado a $\mathcal{U}$ vizinhança de f dada pelo lema 4.1.2. Com isto, podemos supor que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$, $S(g) = \{p_1(g), ..., p_k(g)\}$, onde k é o número de poços de f, e cada $p_i(g)$ é a continuação analítica de um poço de f. Além disso, como M é compacta podemos supor também que

$$\sup\{\|dh(p)\|; p \in M,\ h \in \mathcal{U}_0\} < \infty.$$

Considere

$$\delta_0 < \frac{\epsilon}{\sup\{\|dh(p)\|; p \in M,\ h \in \mathcal{U}_0\}}.$$

Supondo o lema falso, dado $\delta > 0$ existe $g \in \mathcal{U}_0$ possuindo um ponto periódico x que não é poço, de período n, tal que os autovalores de $dg^n(x)$ possuem, ambos, módulo dominado por $(1+\delta)^n$.

Tome $A_i : T_{g^i(x)}M \to T_{g^i(x)}M$, dada por $A_i = (1-\delta)Id$, $0 \le i \le n-1$. Daí, se $\delta \le \delta_0$ e $L_i = dg(g^i(x)) \circ A_i$, então

$$\|L_i - dg(g^i(x))\| \le \|dg(g^i(x))\| \cdot \|A_i - Id\| < \epsilon.$$

Pelo Lema de Franks, existe $\overline{g} \in \mathcal{U}$, $\overline{g} = g$ em $\{x, g(x), ..., g^{n-1}(x)\} \cup M - \cup_{i=0}^{n-1} B(g^i(x), r)$, e $d\overline{g}^n(x) = L_0 \circ L_1 \circ ... \circ L_{n-1} = (1-\delta)^n dg^n(x)$. Tomando $r > 0$ suficientemente pequeno, como $O(x)$ é disjunto de $S(g)$, podemos supor $B(g^i(x), r) \cap S(g) = \emptyset$, para todo i. Logo, como $\overline{g} = g$ em $M - \cup_{i=0}^{n-1} B(g^i(x), r)$, cada $p_j(g)$ é um poço para $\overline{g}$.

No entanto, como argumentamos no início da prova, x é poço para $\overline{g} \in \mathcal{U}$. Portanto, $\overline{g}$ possui $k+1$ poços, o que contradiz $f \in P(M)$. □

Com o lema anterior, obtemos uma estimativa uniforme sobre o tamanho dos autovalores de pontos periódicos em $P(\delta, f)$ que não são poços. No próximo resultado, usaremos $\mathcal{U}_0$ e δ_0 dados pelo lema acima.

Lema 4.1.5. *Seja $f \in P(M)$. Então existem $0 < \delta_1 < \delta_0$ e $c > 0$ tais que se $g \in \mathcal{U}_0$ e $x \in P(\delta, g)$ de período n que não é poço, com $\delta \le \delta_1$, então os autovalores λ e μ de $dg^n(x) : T_xM \to T_xM$ satisfazem:*

$$\log|\lambda| < -cn < 0 < cn < \log|\mu|.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, podemos supor sem perda de generalidade que

$$|\mu|^{1/n} > 1 + \delta_0.$$

Como $x \in P(\delta, g)$, temos que

$$\frac{1}{n} \log \left|\det(dg^n(x))\right| < \delta.$$

Faça $\delta = \log(1+\beta)$, $\beta_1 = \frac{\delta_0}{2}$ e $\alpha = \frac{\delta_0}{2(1+\delta_0)}$, e seja $\delta_1 = \log(1+\beta_1)$. Daí, é claro que $\delta \leq \delta_1$ implica $\beta \leq \beta_1$, e temos que

$$\log|\lambda|^{1/n}|\mu|^{1/n} = \log\left|\det(dg^n(x))\right|^{1/n} < \log(1+\beta).$$

Logo,

$$\log|\lambda|^{1/n} + \log|\mu|^{1/n} < \log(1+\beta),$$

donde

$$\log|\lambda|^{1/n} < \log(1+\beta) - \log|\mu|^{1/n} < \log(1+\beta) - \log(1+\delta_0),$$

e portanto

$$\log|\lambda|^{1/n} < \log\left(\frac{1+\beta}{1+\delta_0}\right) \leq \log\left(\frac{1+\beta_1}{1+\delta_0}\right).$$

Como

$$\frac{1+\beta_1}{1+\delta_0} = \frac{1+\frac{\delta_0}{2}}{1+\delta_0} = 1 + \frac{2+\delta_0}{2(1+\delta_0)} - 1 = 1 - \frac{\delta_0}{2(1+\delta_0)} = 1-\alpha,$$

obtemos que $\log|\lambda|^{1/n} < \log(1-\alpha)$ e como

$$1+\delta_0 > 1 + \frac{\delta_0}{2} > 1 + \frac{\delta_0}{2(1+\delta_0)} = 1+\alpha,$$

obtemos também que $\log|\mu|^{1/n} > \log(1+\alpha)$.

Por fim, basta tomar $c = \min\{|\log(1-\alpha)|, |\log(1-\alpha)|\}$. □

Do capítulo anterior, já sabemos que $\Sigma(\delta, f)$ contém todos os atratores hiperbólicos de f. Nosso objetivo, para mostrar que a união de suas de bacias de atração cobre um subcojunto de M com medida de Lebesgue total, é mostrar que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico. Seguindo a estratégia de Mañé e Liao, para isso vamos primeiro obter uma decomposição dominada em $\Sigma(\delta, f)$. Observe que basta considerar $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, pois se $f \in P(M)$, $S(f)$ é finito e portanto é um conjunto hiperbólico. Para obter a decomposição dominada, o lema anterior é peça chave, uma vez que a estimava que ele fornece vale robustamente, e com o lema de Franks temos uma boa ferramenta para realizar perturbações. Na próxima seção iremos montar o cenário que permite colocar isto em prática.

4.2 Dominação em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$

Nesta seção estará fixado um difeomorfismo $f \in P(M)$.[5] Vamos provar que o compacto invariante $\Sigma(\delta, f) - S(f)$[6] admite uma decomposição dominada. O argumento é um pouco elaborado, mas a idéia por trás é simples. Gostaríamos de usar as órbitas periódicas em $P(\delta, f) - S(f)$, pois, pelo lema 4.1.5 elas são hiperbólicas, e portanto cada uma possui uma decomposição dominada. Não temos garantia, em princípio, da existência de tais órbitas, no entanto, via o teorema 2.5.5, moralmente podemos supor que $P(\delta, f)$ é denso em $\Sigma(\delta, f)$, a menos de trocar f por um difeomorfismo g próximo. O trabalho todo, essencialmente será provar que as constantes de dominação para as decomposições hiperbólicas em $P(\delta, f) - S(f)$ (após perturbar) são uniformes, o que como vimos acima, sempre nos permite passar a dominação ao "fecho", como no lema 4.0.13.

Esta uniformidade será garantida pelo mesmo lema 4.1.5, como comentamos informalmente no fim da seção anterior, através da técnica, também devida a Mañé, de relacionarmos o ângulo entre os subespaços instável e instável de um ponto periódico com a decomposição dominada. A seguir, iremos definir de modo preciso o conceito de ângulo entre subespaços.

Ângulo

O conceito de ângulo entre dois subespaços $E \oplus F = \mathbb{R}^2$, apesar de não ser exatamente o mesmo conceito da geometria euclidianda plana clássica, tem um significado bastante intuitivo. Vamos dar a definição formal, e depois explicaremos este significado.

Definição 4.2.1. *Sejam E, F subespaços de $\mathbb{R}^2$, tais que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$, e seja $L : E^\perp \to E$ a única transformação linear tal que*

$$F = \text{graf}(L) = \{v + Lv; v \in E^\perp\}.$$

O ângulo entre E e F é definido como $\angle(E, F) = \|L\|^{-1}$

Se E e F são subespaços de $\mathbb{R}^2$, o ângulo entre E e F, intuitivamente, pode ser visto como o maior comprimento obtido, ao ligar um vetor unitário em E a F, por uma reta paralela a $E^\perp$. No caso de E e F serem retas no plano, $\angle(E, F)$ na nossa definição é igual ao módulo da tangente do ângulo formado pelas retas E e F. Além disso, esta definição funciona em qualquer dimensão, bem como o lema que vamos provar a seguir (com mesma prova), o qual fornece algumas estimativas envolvendo o ângulo entre dois subespaços, e será importante mais a frente.

Lema 4.2.2. *Suponha que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$ e $L : E^\perp \to E$ é como na definição de ângulo entre E e F. Então*

[5] No entanto, para comodidade do leitor, iremos repetir esta hipótese no enunciado dos principais resultados.

[6] Ver lema 3.1.4.

a) Para todo $u \in E$, $v \in F$ temos que

$$\|v - u\| \geq \frac{\angle(E,F)}{1 + \angle(E,F)}\|v\|.$$

b) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um mapa linear então

$$\|T\| \leq \frac{1 + \angle(E,F)}{\angle(E,F)}(\|T|E\| + \|T|F\|).$$

Demonstração. a) Tome $w \in E^\perp$ tal que $w + Lw = v \in F$. Daí, se $u \in E$ então $Lw - u \in E$, e pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$\|v - u\| = \|w + Lw - u\| \geq \|w\|.$$

Contudo, $\|v\| \leq \|w\| + \|L\| \cdot \|w\| = \|w\|(1 + \|L\|)$. Logo,

$$\|w\| \geq (\frac{1}{1 + \|L\|})\|v\|,$$

e finalmente temos

$$\|v - u\| \geq \frac{\angle(E,F)}{1 + \angle(E,F)}\|v\|.$$

b) Se $v \in \mathbb{R}^N$, $v = e + e^\perp$, com $e^\perp \in E^\perp$ e $e \in E$. Daí,

$$\|Tv\| = \|T(e + e^\perp)\| = \|T(e^\perp + Le^\perp) + T(e - Le^\perp)\|$$

$$\leq \|T|E^\perp\|(1 + \|L\|)\|e^\perp\| + \|T|E\|(\|e\| + \|L\|\|e^\perp\|).$$

Como, novamente por Pitágoras, $\|e\| \leq \|v\|$ e $\|e^\perp\| \leq \|v\|$ e como $\|L\| = \angle(E,F)^{-1}$, segue o resultado. $\square$

Observação 4.2.3. *O mapa L da definição acima é obtido usando as projeções ortogonais P_F, de F sobre E, e $P_F^\perp$, de F sobre $E^\perp$. Como F e $E^\perp$ sempre posuem a mesma dimensão, $P_F^\perp$ é invertível e podemos obter L via $P_F \circ (P_F^\perp)^{-1}$. No entanto se E e F possuirem a mesma dimensão (e como estamos em dimensão 2, este é o caso aqui), P_F é invertível também e podemos usar L^{-1} ao invés de L, e nesse caso $\angle(E,F) := \|L\|$. O lema acima continua sendo verdade, com a mesma prova, apenas trocando $E^\perp$ por E, e vice-versa.*

Pela observação acima, podemos adotar $\angle(E,F) := \|L\|$, onde $L : E \to E^\perp$ é tal que $F = \text{graf}(L) = \{w + Lw; w \in E\}$.

Uniformidade do ângulo

Vamos provar agora que o ângulo entre o subespaço estável e o subespaço instável de todo ponto em $P(\delta, g) - S(g)$, para difeomorfismos g suficientemente próximo de f, não pode ser arbitrariamente pequeno.

Proposição 4.2.4. *Seja $f \in P(M)$. Então existem $\delta > 0$, $\mathcal{V}$ uma C^1-vizinhança de f, e $\gamma > 0$ tais que para todo $g \in \mathcal{V}$ e para todo $p \in P(\delta, g) - S(g)$, vale $\angle(E^s_p, E^u_p) > \gamma$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{V}$ e $\epsilon > 0$ do Lema de Franks aplicado a f e à vizinhança $\mathcal{U}_0$ do lema 4.1.5, e considere $\delta > 0$ tal que o lema 4.1.5 valha. Suponha por absurdo que a proposição não seja verdadeira. Então, arbitrariamente próximo a f existe um difeomorfismo g possuindo um ponto periódico $p \in P(\delta, g) - S(g)$ tal que o ângulo entre E^s_p e E^u_p é tão pequeneno quanto se queira.

Pelo lema 4.1.5, temos que p é uma sela hiperbólica para g. Fixe $n = \pi(p)$ e suponha que todos os autovalores de $A := dg^n(p)$ são positivos. Vamos obter uma contradição nesse caso, e em seguida mostrar que o caso geral se reduz a ele.

A idéia para chegar a uma contradição é a seguinte. Os subespaços $E := E^s_p$ e $F := E^u_p$ dividem T_pM em quatro quadrantes, dois dos quais formam um cone de abertura pequena, e os outros dois que formam o complementar deste cone.

Dado um vetor v no cone da abertura pequena, como os autovalores de A são positivos, Av também está no cone de abertura pequena. Daí, se conseguirmos um vetor v tal que $\|Av\| = \|v\|$, compondo A com uma rotação próxima da identidade que leve Av em v, obtemos uma aplicação linear $B : T_pM \to T_pM$ que possui um autovalor 1. Usando o Lema de Franks, obtemos um difeomorfismo $\overline{g}$ que possui p como ponto periódico de período n e realiza B como derivada $d\overline{g}^n(p)$. Como rotações possuem determinante 1 ou -1, teremos $p \in P(\delta, \overline{g})$, mas como B possui um autovalor 1, isso dará uma contradição com o lema 4.1.5.

Seja $\theta > 0$ e suponha que $\angle(E, E) < \theta$. Sejam $0 < \lambda < 1 < \mu$ os autovalores de A e seja $L : E \to E^\perp$ dada pela definição de ângulo.

Considere um vetor $v \in T_pM$, dado por $v = \alpha e + \beta f$, com $e \in E$ unitário e $f = e + Le \in F$ e $\alpha, \beta > 0$. Isto implica que v pertence ao cone de abertura pequena formado por E e F, e como $\lambda, \mu > 0$ temos que Av também pertence ao cone de ângulo pequeno. Em particular, se $\eta := \angle(\langle v \rangle, \langle Av \rangle)$, temos que $\eta \leq \theta$. Por outro lado, $Av = (\lambda\alpha + \mu\beta)e + \mu\beta Le$ e tomando $\alpha = 1$, é fácil ver que existe $\beta > 0$ tal que $\|Av\| = \|v\|$.

Portanto, se θ é pequeno, η também o é, e temos que existe $R_\eta : T_pM \to T_pM$ rotação tal que $R_\eta \circ Av = v$ e

$$\|R_\eta - Id\| < \frac{\epsilon}{\|Dg(g^{n-1}(p)\|}.$$

Considerando $L : T_{g^{n-1}(p)}M \to T_pM$ dada por $L = R_\eta \circ Dg(g^{n-1}(p))$, temos que

$$\|L - dg(g^{n-1}(p))\| < \epsilon.$$

Pelo Lema de Franks, obtemos $\overline{g} \in \mathcal{U}_0$ tal que p é ponto periódico de período n para $\overline{g}$, $\overline{g} = g$ em $\{g^{n-1}(p)\} \bigcup M - B(g^{n-1}(p), r)$, onde $r > 0$ é tomado de forma que não existem pontos da órbita de p em $B(g^{n-1}(p), r)$, além de $g^{n-1}(p)$. Além disso, temos também que $d\overline{g}(g^{n-1}(p)) = L$ e que

$$d\overline{g}^n(p) = R_\eta \circ dg^n(p),$$

e como R_η é uma rotação, temos

$$\det d\overline{g}^n(p) = \det dg^n(p),$$

donde segue que $p \in P(\delta, \overline{g})$.

No entanto, $R_\eta \circ A$ possui um autovetor v associado ao autovalor 1, por construção, e isto viola o lema 4.1.5.

Para reduzir o caso geral ao caso em que os autovalores são ambos positivos, basta trocar f por f^2 e usar a mesma prova, pois se g está próximo de f, então g^2 está próximo f^2, e se $p \in P(\delta, f)$ então $p \in P(2\delta, f)$. Daí, como os autovalores da derivada de g^2 são todos positivos, exigindo que $2\delta \leq \delta_1$, e repetindo o argumento acima obtemos novamente uma contradição com o lema 4.1.5. □

Dominação em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$

Usando a proposição 4.2.4, vamos provar um resultado que é passo essencial para obtermos uma decomposição dominada em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$. Daqui em diante neste trabalho, fixamos um número $\delta > 0$ pequeno, de modo que os resultados anteriores sobre $P(\delta, f)$, com $f \in P(M)$ sejam verdadeiros.[7]

Proposição 4.2.5. *Seja $f \in P(M)$, numa superfície M. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ de f e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $g \in \mathcal{V}_0$ e $p \in P(\delta, g) - S(g)$ então existe $n \leq n_0$ satisfazendo:*

$$\left\|dg^n(p)|_{E^s}\right\| \left\|dg^{-n}(g^n(p))|_{E^u}\right\| < \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Demonstração. A estratégia é mostrar que a cota inferior para o ângulo entre os subespaços estáveis e instáveis dos pontos periódicos de difeomorfismos próximos a f, obtida acima na proposição 4.2.4, gera a estimativa 4.1. Dito de outra forma, vamos supor por absurdo que a proposição não vale. Neste caso, será possível encontrar, mediante uma pequena perturbação, um difeomorfismo g próximo de f, posuindo um ponto periódico $p \in P(\delta, g) - S(g)$, cujo ângulo entre o espaço estável e o espaço instável é tão pequeno quanto se queira, e isto irá prodizir uma contradição, devido a proposição 4.2.4.

Como dissemos acima, vamos supor que o resultado seja falso. Então, existe uma sequência g_n convergindo a f na topologia C^1, possuindo pontos $p_n \in P(\delta, g_n) - S(g_n)$ tais que

$$\left\|dg_n^m(p_n)|_{E^s}\right\| \left\|dg_n^{-m}(g^m(p_n))|_{E^u}\right\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } 0 \leq m \leq n. \tag{4.2}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $g_n \in \mathcal{V}$, para todo n, onde $\mathcal{V}$ é a vizinhança de f dada pela proposição 4.2.4. Além disso, como $f \in P(M)$, temos que todo difeomorfismo em $\mathcal{V}$ possui o mesmo número de poços.

[7]Como vimos no fim da prova da proposição 4.2.4, basta que $2\delta \leq \delta_1$, onde δ_1 é dado pelo lema 4.1.5.

Para simplificar a notação, iremos tomar $g = g_n$, e $p = p_n$, com n grande, a determinar. Como p não é poço para g, e g possui um número finito de poços, podemos tomar uma vizinhança U de $O(p)$ tal que $S(g) \cap U = \emptyset$.

Podemos supor também que $\pi(p)$ é arbitrariamente grande, pois, usando o lema 4.1.5 temos que:

$$\begin{aligned} \left\|dg^{k\pi(p)}|_{E^s}\right\| \left\|dg^{-k\pi(p)}|_{E^u}\right\| &\leq e^{-2ck\pi(p)} \\ &\to 0, \text{ quando } k \to +\infty, \end{aligned}$$

donde existe k_0 (que só depende de c) de modo que

$$\left\|dg^{k_0\pi(p)}|_{E^s}\right\| \left\|dg^{-k_0\pi(p)}|_{E^u}\right\| < \frac{1}{2}$$

e isto implica que $\pi(p) \geq n/k_0$, via 4.2. Como n está sendo considerado arbitrariamente grande, isto nos leva a concluir que $\pi(p)$ também pode ser tomado arbitrariamente grande.

Sejam $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ e $\epsilon > 0$ dados pelo lema de Franks aplicado à g e à vizinhança $\mathcal{V}$. Nas próximas linhas vamos definir uma série de mapas e subespaços auxiliares que usaremos para construir a perturbação.

Tome vetores unitários $v \in E^s_p$ e $u \in E^u_p$. Como estamos supondo que não vale a estimativa de dominação, temos que

$$\frac{1}{2}\|dg^i(p)u\| \leq \|dg^i(p)v\|,$$

para todo $0 < i \leq n$. Defina $L : E^u_p \to E^s_p$ como $Lu = \alpha v$, onde $\alpha > 0$ é pequeno, a determinar.

Usando L, definimos $\widetilde{L} : E^u_p \to E^s_p$, como

$$\widetilde{L} = (1+\alpha)^{\pi(p)}(dg^{\pi(p)}_{/E^s_p}) \circ L \circ dg^{-\pi(p)}_{/E^u_p}.$$

Observe que $\widetilde{L}$ possui norma pequena. De fato, pelo lema 4.1.5 obtemos

$$\left\|\widetilde{L}\right\| \leq (1+\alpha)^{\pi(p)} e^{-2c\pi(p)}\|L\| \leq \alpha,$$

desde que α seja pequeno o bastante para que, por exemplo, $(1+\alpha)e^{-c} < (1+\alpha)e^{-2c} < 1$.

Considere os subespaços $G = \{u + Lu; u \in E^u_p\}$ e $\widetilde{G} = \{u + \widetilde{L}u; u \in E^u_p\}$.

Mais ainda, considere os mapas lineares, $P, S : T_pM \to T_pM$, dados por $Pu = Lu$, $Pv = 0$, $Sv = 0$, $S(u + \widetilde{L}u) = -\widetilde{L}u$. Pela definição dos mapas P e S não é difícil verificar que

$$P|_{E^s_p} = 0,\ (Id + P)E^u_p = G,\ S|_{E^s_p} = 0 \text{ e } (Id + S)\widetilde{G} = E^u_p.$$

Por exemplo, vamos ver que a última igualdade é verdadeira. Note que

$$Su = S(u + \widetilde{L}u - \widetilde{L}u) = -\widetilde{L}u,$$

e portanto $(Id+S)(u+\widetilde{L}u) = Su + u + \widetilde{L}u = u$, e isto prova a igualdade desejada. As demais afirmações são provadas de modo similar.

Além disso, temos também que

$$\det(Id+S) = 1, \text{ e } \det(Id+P) \leq 1+\alpha,$$

pois a matriz de S na base $\{u,v\}$ de T_pM é triangular superior com 1 nas duas entradas da diagonal, e a matriz de P na mesma base é diagonal, com 0 e α nas entradas da diagonal.

Seja $\gamma > 0$ dado pela proposição 4.2.4. Como $\angle(E^s_p, E^u_p) > \gamma$, aplicando o lema 4.2.2, obtemos as estimativas

$$\|P\| \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\alpha \text{ e } \|S\| \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\alpha.$$

Por fim, definimos $T_j : T_{g^j(p)}M \to T_{g^j(p)}M$ como$T_j|_{E^s_{g^j(p)}} = \alpha Id$ e $T_j|_{E^u_{g^j(p)}} = 0$, para todo $0 \leq j \leq \pi(p)$, onde $E^\sigma_{g^j(p)} = dg^j(p)E^\sigma_p$, $\sigma = s,u$. Note que, usando uma base dadas por vetores unitários em $E^s_{g^j(p)}$ e $E^u_{g^j(p)}$, a matriz de T_j é diagonal com α e 0 nas entradas da diagonal, e portanto

$$\det(Id+T_j) = 1+\alpha.$$

Agora estamos em condições de definir os mapas L_j que farão ligeiras perturbações de dg ao longo da órbita de p. Definimos,

$$L_0 = (1+\alpha)^{-1}(Id+T_1)\circ dg(p)\circ(Id+P) : T_pM \to T_{g(p)}M$$

e para $1 \leq j \leq \pi(p)-2$ definimos

$$L_j = (Id+T_{j+1})\circ dg(g^j(p)) : T_{g^j(p)}M \to T_{g^{j+1}(p)}M,$$

e

$$L_{\pi(p)-1} = (Id+S)\circ(Id+T_0)\circ dg(g^{\pi(p)-1}(p)) : T_{g^{\pi(p)-1}(p)}M \to T_pM.$$

Não é difícil verificar, usando a desigualdade triangular, que se α é suficientemente pequeno, temos

$$\|L_j - dg(g^j(p))\| < \epsilon, \text{ para todo } 0 \leq j \leq \pi(p)-1$$

De fato, note que todos os L_j foram obtidos compondo-se dg com ligeiras perturbações da identidade.

Pelo lema de Franks, obtemos $\overline{g} \in \mathcal{V}$, tal que $p \in Per(\overline{g})$, $\overline{g}$ coincide com g na órbita de p e fora da vizinhança U da órbita de p, escolhida acima, a qual é disjunta de $S(g)$. Além disso, $d\overline{g}(g^j(p)) = L_j$. Desse modo, temos que $d\overline{g}^\pi(p)(p) = \prod_{j=o}^{\pi(p)-1} L_j$, donde obtemos

$$\det d\overline{g}^{\pi(p)}(p) = \prod_{j=0}^{\pi(p)-1} \det L_j = (1+\alpha)^{\pi(p)} \det dg^{\pi(p)}(p),$$

e portanto se α é pequeno o suficiente para que $\log(1+\alpha)+\frac{1}{\pi(p)}\log|\det dg^{\pi(p)}| < \delta$, temos que $p \in P(\delta, \overline{g})$. Observe também que p não é poço para $\overline{g}$, pois, como $g = \overline{g}$ fora de U todo poço de g é um poço para $\overline{g}$, logo se $p \in P(\delta, g) - S(g)$ fosse um poço para $\overline{g}$, $\overline{g}$ teria um poço a mais do que g, contradizendo $\overline{g} \in \mathcal{V}$, pois, como vimos acima, todo difeomorfismo em $\mathcal{V}$ possui o mesmo número de poços.

Por simplicidade, denote $E_j^\sigma = E^\sigma_{g^j(p)}$, $\sigma = s, u$. Afirmamos que o E_0^s é o subespaço estável de $d\overline{g}^{\pi(p)}(p)$. Com efeito, como os subespaços E_j^s são invariantes por $Id + T_j$, e E_0 é invariante por $Id + P$ e por $Id + S$, assim como $dg(g^j(p))E_j^s = E_{j+1}^s$, por definição, temos que

$$d\overline{g}(g^j(p))E_j^s = L_j E_j^s = E_{j+1}^s,$$

e portanto E_0^s é invariante por $d\overline{g}^{\pi(p)}(p)$. Além disso, temos que

$$(1+\alpha)\|d\overline{g}^{\pi(p)}(p)|_{E_0^s}\| \leq (1+\alpha)^{\pi(p)}e^{-c\pi(p)} < 1,$$

pois exigimos acima que α é pequeno o bastante para que $(1+\alpha)e^{-c} < 1$. Logo, $d\overline{g}^{\pi(p)}$ contrai na direção (invariante) E_0^s.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} d\overline{g}^{\pi(p)}(p)u &= (Id+S)\left(dg^{\pi(p)}u + (1+\alpha)^{\pi(p)}dg^{\pi(p)}L(dg^{-\pi(p)}dg^{\pi(p)}u)\right) \\ &= (Id+S)\left(dg^{\pi(p)}(p)u + \widetilde{L}(dg^{\pi(p)}(p)u)\right), \end{aligned}$$

e como

$$dg^{\pi(p)}(p)u + \widetilde{L}(dg^{\pi(p)}(p)u) \ \in \widetilde{G},$$

uma vez que $(Id+S)\widetilde{G} = E_0^u$, segue que $d\overline{g}^{\pi(p)}(p)E_0^u = E_0^u$. Como p não é poço para $\overline{g}$ temos que E_0^u é o subespaço instável de $d\overline{g}^{\pi(p)}(p)$.

Finalmente, usando o Lema 4.2.2 vamos estimar o ângulo β entre $E_m^s(\overline{g}) = d\overline{g}^m(p)(E_0^s)$ e $E_m^u(\overline{g}) = d\overline{g}^m(p)(E_0^u)$, para m grande.

Sejam,

$$u_1 = L_m(u) = dg^m(p)u + \delta(1+\delta)^m dg^m(p)v,$$

e

$$u_2 = L_m(\delta v) = \delta(1+\delta)^m dg^m(p)v.$$

Então, pelo Lema 4.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \|dg^m(p)u\| &= \|u_1 - u_2\| \geq \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\|u_1\| \\ &\geq \frac{\beta}{1+\beta}\left(\delta(1+\delta)^m\|dg^m(p)v\| - \|dg^m(p)u\|\right) \end{aligned}$$

Donde,

$$1 \geq \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\delta(1+\delta)^m}{2} - 1\right),$$

pois

$$\frac{1}{2}\|dg^m(p)u\| \leq \|dg^m(p)v\|.$$

Assim, temos que

$$\beta \leq \frac{2}{\delta(1+\delta)^m - 4} \leq \gamma,$$

desde que que m seja grande o bastante para que $\delta(1+\delta)^m \geq 4 + \frac{2}{\gamma}$. o que pode ser feito, pois $\pi(p)$ pode ser tomado tão grande quanto se queira, conforme observamos no início da prova. Isto contradiz a proposição 4.2.4, e termina prova. □

Agora estamos em condições de obter uma decomposição dominada para f sobre $\Sigma(\delta, f) - S(f)$. Com efeito, aplicando o teorema 2.5.5, se $x \in \Sigma(\delta, f) - S(f)$, então existe uma sequência $f_n \to f$, possuindo pontos periódicos $p_n \in P(\delta, f_n)$, $p_n \to x$. Como x está longe de $S(f)$, podemos supor que $p_n \notin S(f_n)$, para todo n. Pela proposição 4.2.5, temos que para todo n existe um $k \leq n_0$, onde $n_0 > 0$ é dado pela proposição 4.2.5, tal que

$$\left\|df_n^k(p_n)|_{E^s_n p_n}\right\| \left\|df_n^{-k}(p_n)|_{E^u_{p_n}}\right\| < \frac{1}{2}.$$

Pelo lema 4.0.13 segue que $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ admite uma decomposição dominada.

Vamos denotar esta decomposição por $E \oplus F$, e supor que as constantes são $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$.

Propriedades da Decomposição Dominada de $\Sigma(\delta, f) - S(f)$

Agora iremos provar que a direção F da decomposição dominada de $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é expansora. A demonstração, a qual é baseada num argumento devido a Mañé [24] explora a finitude robusta do número de poços, de acordo com a seguinte linha de idéias: caso F não seja expansor, pelo teorema 3.2.4, existirão cordas apresentando uma expansão média arbitrariamente fraca. A dominação implicará que tais cordas apresentem contração na direção E. Com isto, usando o *ergodic closing lemma*, poderemos criar pontos periódicos com contração na direção E e expansão muito fraca na direção F, o que irá contradizer o lema 4.1.5.

Teorema 4.2.6. *O subfibrado F é expansor.*

Demonstração. Suponha que F não seja expansor. Pelo teorema 3.2.4 existe uma medida ergódica μ suportada em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, tal que para um ponto genérico $x \in \text{supp}(\mu)$ temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left\|df(f^{-i}(x))|_F\right\| \geq 0. \tag{4.3}$$

Fixe um ponto genérico $x \in \text{supp}(\mu)$. Se x for um ponto periódico (denotaremos $k = \pi(x)$), então $x \in P(\delta, f) - S(f)$, pois, como é um ponto genérico em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, podemos supor que x pertence também ao suporte de uma medida em $M(\delta, f)$. Como F é unidimensional, pela desigualdade 4.3, segue que

$$\frac{1}{k}\log\left\|df^{-k}(x)|_F\right\| = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left\|df^{-i}(f^{-i}(x))|_F\right\| \geq 0. \tag{4.4}$$

Exponenciando e invertendo,

$$\left\|df^{k}(x)|_F\right\| \leq 1. \tag{4.5}$$

Contudo, pela dominação,

$$\left\|df^{k}(x)|_E\right\| \leq \left\|df^{k}(x)|_E\right\|\left\|df^{-k}(x)|_F\right\| \leq C\lambda^k,$$

e portanto

$$\left\|df^{k}(x)|_E\right\|^j \leq C\lambda^{jk}.$$

Isto implica que $\left\|df^{k}(x)|_E\right\| \to 0$, quando $j \to +\infty$. Logo, $df^k(p)$ possui um autovalor menor do que 1 na direção E, o que, juntamente com 4.5 contradiz o lema 4.1.5.

Se x não for periódico, podemos aplicar o *ergodic closing lemma* e chegar a uma contradição semelhante. Com efeito, tome $\mathcal{U}_0$ a vizinhança de f dada pelo lema 4.1.5. Como a aplicação $h \mapsto h^{-1}$ é contínua em $\mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{V}_0 = \{h \in \mathrm{Diff}^1(M); h^{-1} \in \mathcal{U}_0\}$, é uma vizinhança de f^{-1}. Como x é um ponto genérico, podemos aplicar o *ergodic closing lemma* e obter um difeomorfismo g, tão próximo de f^{-1}, quanto se queira, possuindo um ponto periódico p tal que $d(g^j(p), f^{-j}(x))$ é tão pequena quanto se queira, para todo $0 \leq j \leq k := \pi(p)$ (em particular, como p está próximo de $x \notin S(f)$, temos que $p \notin S(g)$, via o lema 4.1.2). Isto possibilitará passar a esitmativa 4.3 para a g órbita de p, e continuar a prova como no caso em que x é periódico.

Para fazer isto, usaremos um argumento um pouco técnico, mas cuja idéia é a seguinte: como a derivada de g em cada ponto da órbita de p está próxima da derivada de f^{-1} em cada ponto da órbita de x, podemos trocar $dg(g^j(p))$ por $df^{-1}(f^{-j}(x))$, usando o lema de Franks e perturbando g. Com isso, a estimativa 4.3 será verdadeira para g, e também poderemos usar a dominação.

Em detalhes, o argumento segue do seguinte modo. Sejam $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$, e $\epsilon > 0$ do lema de Franks aplicado a $\mathcal{V}_0$ e f^{-1} e considere as aplicações lineares $L_i : T_{g^i(p)}M \to T_{g^{i+1}(p)}M$, $0 \leq i \leq k-1$, onde $L_i = A_{i+1}df^{-1}(f^i(x))A_i^{-1}$ e $A_i : T_{f^{-i}(x)}M \to T_{g^i(p)}M$ são mapas lineares tais que, quando restritos a $E_{(f^{-i}(x))}$ e $F_{(f^{-i}(x))}$ são isometrias, para todo $0 \leq i \leq k-1$ e ainda de modo que

$$A_0(E_x) = A_k(E_{(f^{-k}(x))})$$

e

$$A_0(F_x) = A_k(F_{(f^{-k}(x))}).$$

Se g está suficientemente próxima de f, para todo $0 \leq i \leq k$, temos

$$\left\|L_i - dg(g^i(p))\right\| < \epsilon.$$

O papel dos mapas A_i é "transladar"df^{-1} para podermos substituir dg na órbita de p por ela, já que, como $df^{-1}(f^{-j}(x))$ e $dg(g^j(p))$ atuam em espaços diferentes, não faz sentido trocar dg por df diretamente.

Pelo Lema de Franks, obtemos $h \in \mathcal{V}_0$, $h = g$ ao longo da g-órbita de p, tal que $dh(h^i(p)) = L_i$. Segue imediatamente que $A_0(E_x)$ e $A_0(F_x)$ são subespaços de T_pM, invariantes por $dh^k(p)$, e decompoem T_pM em soma direta. Além disso,

$$\left\|dh^{-n}(p)|_{A_0(E_x)}\right\| = \left\|df^n(f^{-n}(x))|_{E_{f^{-n}(x)}}\right\|$$

e

$$\left\|dh^{-n}(p)|_{A_0(F_x)}\right\| = \left\|df^n(f^{-n}(x))|_{F_{(f^{-n}(x))}}\right\|.$$

Seja $\overline{g} = h^{-1}$. Como $h \in \mathcal{V}_0$, $\overline{g} \in \mathcal{U}_0$ e, além disso, é claro que $p \in \mathrm{Per}(g)$. Como p não é poço para g, novamente pelo lema 4.1.2, temos que p não é poço para $\overline{g}$. Como x não é periódico para f, temos que $k \to \infty$ quando $g \to f^{-1}$.[8] Com isso, podemos supor que $C(e^c\lambda)^k < 1$,[9] onde C e λ são as constantes da decomposição dominada, e $c > 0$ é a constante do Lema 4.1.5. Tome $0 < \beta < c + \delta$ e suponhamos ainda que k é grande o bastante para que

$$\frac{1}{k}\log\left\|df^{-k}(x)|_F\right\| \geq -\beta,$$

via a estimativa 4.3. Temos então que

$$\left\|df^{-k}(x)|_F\right\| \geq e^{-k\beta},$$

donde

$$\left\|d\overline{g}^k(p)|_{A_0(F)}\right\| = \left\|df^k(f^{-n}(x))|_F\right\| \leq \left\|df^{-k}(x)|_F\right\|^{-1} \leq e^{k\beta} < e^{kc}. \tag{4.6}$$

Por outro lado, como $\left\|d\overline{g}^k(p)|_{A_0(E)}\right\| = \left\|df^n(f^{-k}(x))|_E\right\|$, temos que

$$e^{-k\beta}\left\|d\overline{g}^k|_{A_0(E)}\right\| \leq \left\|df^k(f^{-k}(x))|_E\right\|\left\|df^{-k}(x)|_F\right\| \leq C\lambda^k,$$

logo

$$\left\|d\overline{g}^k|_{A_0(E)}\right\| \leq C(e^\beta\lambda)^k < 1. \tag{4.7}$$

Pelas desigualdades 4.6 e por 4.7, temos que $|\det d\overline{g}^k(p)| \leq e^{k\beta}$, e portanto

$$\frac{1}{k}\log|\det d\overline{g}^k(p)| \leq \beta < \delta,$$

ou seja, $p \in P(\delta, \overline{g}) - S(\overline{g})$. No entanto, as mesmas desigualdades 4.6 e 4.7 contradizem o lema 4.1.5. Isto completa a demonstração. □

Como F é expansor, existem constantes $K > 0$ e $0 < \gamma < 1$, tais que para todo $x \in \Sigma(\delta, f) - S(f)$,

$$\left\|df^{-n}(x)|_F\right\| \leq K\gamma^n,$$

[8]Lembre que $k = \pi(p)$.

[9]Note que podemos supor, reduzindo c se necessário, que $e^c\lambda < 1$. Observe também, que ao reduzirmos c, o lema 4.1.5 continua valendo.

para todo $n \geq 0$.

Naturalmente, o leitor pode se perguntar porque não tentamos empregar o argumento acima para provarmos que a direção E é contratora. Na verdade, o leitor poderá notar, se levar a cabo tal estratégia, que todos os passos do argumento funcionam, exceto quando calculamos o determinante de $d\overline{g}^k(p)$, pois aí não iremos obter que $p \in P(\delta, \overline{g})$. Logo as desigualdades 4.6 e 4.7 não chegam a contradição nenhuma. O que acontece, é que para a mesma estratégia funcionar na direção E, deveríamos adicionar a condição de f possuir finitas *fontes* robustamente. No capítulo 8, vamos apresentar o argumento acima em outro contexto, e ele bastará para obter hiperbolicidade, uma vez que lá não teremos esta assimetria.

Ainda assim, podemos usar o argumento de Mañé para obtermos que a direção E é *não-uniformemente* contratora, resultado que será fundamental na próxima seção. No enunciado a seguir, $c > 0$ é a constante do Lema 4.1.5.

Teorema 4.2.7. *Seja $\mu \in M(\delta, f)$ uma medida sem poços no seu suporte. Então, para μ-quase todo ponto $x \in \Sigma(\delta, f) - S(f)$ vale,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_E \right\| \leq -c.$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{U}_0$ a vizinhança de f dada pelo lema 4.1.5 e U a vizinhança de $S(f)$ dada pelo lema 4.1.2. Além disso, pelo mesmo lema 4.1.2 podemos supor que, para toda $g \in \mathcal{U}_0$, $S(g) \subset U$.

Se o teorema não é verdadeiro, existe $\mu \in M(\delta, f)$ sem poços no seu suporte, e existe $A \subset \text{supp}(\mu)$, com $\mu(A) > 0$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_E \right\| > -c, \tag{4.8}$$

para todo $x \in A$. Daí, podemos tomar um ponto $x \in A$ genérico. Como μ não admite poços no seu suporte, x não é um poço para f, e podemos supor que $x \notin \overline{U}$.

Se x for periódico, então $x \in P(\delta, f)$.[10] Além disso, se $\pi(x) = n$ temos que

$$\frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_E \right\| > -c,$$

donde segue que

$$\left\| df^n(x)|_E \right\| > e^{-nc}.$$

Por outro lado, como F é expansor, segue que o autovalor na direção F é maior do que 1. No entanto, a desiguladade acima contradiz o lema 4.1.5.

Se x não for periódico, por 4.8 podemos tomar m suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{n} \log | \left\| df^n(x)|_E \right\| > -c,$$

[10] Para a prova deste fato, ver exemplo 2.5.4.

para todo $n > m$. Tome $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_0$ e $\epsilon > 0$, do lema de Franks aplicado a f e $\mathcal{U}_0$. Como x é genérico, pelo *ergodic closing lemma*, existe $g \in \mathcal{V}$, possuindo um ponto periódico p tal que $d(f^j(x), g^j(p))$ é tão pequeno quanto se queira, para todo $0 \geq j \geq \pi(p)$. Além disso, como x não é periódico, podemos supor que $\pi(p)$ é tão grande quanto se queira. Usando o lema de Franks, com o mesmo argumento usado no teorema 4.2.6, podemos "trocar"a derivada de g ao longo da órbita de p pela derivada de f ao longo da órbita de x. De modo preciso, obtemos $\overline{g} \in \mathcal{U}_0$, tal que p é um ponto periódico para $\overline{g}$ e existem subespaços $\overline{E}_{\overline{g}^j(p)}$ e $\overline{F}_{\overline{g}^j(p)}$ de $T_{\overline{g}^j(p)}M$, para todo $j = 0, ..., \pi(p) - 1$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \left\| d\overline{g}(g^j(p))|_{\overline{E}} \right\| &= \left\| df(f^j(x))|_E \right\| \\ \left\| d\overline{g}(g^j(p))|_{\overline{F}} \right\| &= \left\| df(f^j(p))|_F \right\|. \end{aligned}$$

Portanto, supondo que $k = \pi(p) > m$, temos que

$$\frac{1}{k} \log | \left\| d\overline{g}^k(p)|_{\overline{E}} \right\| = \frac{1}{k} \log | \left\| df^k(x)|_E \right\| > -c,$$

donde segue que

$$\left\| d\overline{g}^k(p)|_{\overline{E}} \right\| > e^{-kc}. \tag{4.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} e^{-kc} \left\| d\overline{g}^{-k}(p)|_{\overline{F}} \right\| &< \left\| d\overline{g}^k(p)|_{\overline{E}} \right\| \left\| d\overline{g}^{-k}(p)|_{\overline{F}} \right\| \\ &= \left\| df^k(p)|_E \right\| \left\| df^{-k}(p)|_F \right\| \leq C\lambda^k. \end{aligned}$$

Logo, $\left\| d\overline{g}^{-k}(p)|_{\overline{F}} \right\| < C(e^c\lambda)^k < 1$, desde que $k := \pi(p)$ seja grande, e segue que $d\overline{g}^k(p)$ possui um autovalor maior do que 1 na direção $\overline{F}$. Como $x \notin \overline{U}$ e p está próximo de x, temos que $p \notin \overline{U}$, o que implica que p não é poço para g. Além disso, como $\overline{g}$-órbita de p sombreia a f-órbita de x, temos que $p \in P(\delta, f)$[11] No entanto, a desigualdade 4.9 contradiz o lema 4.1.5. Isto completa a demonstração. □

O leitor pode notar que a hipótese, no teorema acima, de μ não posssuir poços em seu suporte não é restritiva. Com efeito, se uma medida $\mu \in M(\delta, f)$ possui um poço p em seu suporte, como os poços são isolados em $\Sigma(\delta, f)$, temos que $O(p)$ é um conjunto invariante com medida positiva, e como μ é ergódica, pela proposição 2.3.1, $\mu(O(p)) = 1$. Mais ainda, pela definição de medida ergódica, isto nos leva a concluir que μ é a medida periódica de p. Logo, as únicas medidas não contempladas pelo teorema anterior são as medidas periódicas associadas aos poços de f.

4.3 Outras Aplicações da Dominação

Nesta seção iremos usar a decomposição dominada $E \oplus F$ sobre $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ de um difeomorfismo $f \in P(M)$ e provar mais dois resultados importantes. O primeiro deles

[11]Este argumento foi dado na prova do teorema 2.5.5.

fala sobre a densidade de $P(\delta, f)$ em $\Sigma(\delta, f)$, e será fundamental para provarmos, no próximo capítulo, que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico. No entanto, tanto este resultado como os teoremas do próximo capítulo, exigem mais regularidade de f. Como não sabemos se os lemas de perturbação que temos, o lema de Franks e o *ergodic closing lemma*, valem na topologia C^2, precisaremos provar, sem assumir que $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico, que um difeomorfismo $f \in P(M)$ de classe C^1 possui um número finito de atratores hiperbólicos.

Aproximação por Órbitas Periódicas

Considere $f \in P(M)$, um difeomorfismo de classe C^2. Usando o teorema de Katok, que enunciamos no capítulo anterior, vamos provar nesta seção que $\overline{P(\delta, f)} = \Sigma(\delta, f)$. A idéia da prova é bem simples. Tudo que precisamos é garantir que qualquer ponto genérico x no suporte de uma medida em $M(\delta, f)$ pode ser sombreado por um ponto periódico p, pois, como já vimos na prova da proposição 3.5.6, isto implica que $p \in P(\delta, f)$. Para podermos usar o teorema de Katok, devemos primeiro provar que toda medida em $M(\delta, f)$ é hiperbólica.

Lema 4.3.1. *Se $f \in P(M)$ então toda medida $\mu \in M(\delta, f)$ é hiperbólica.*

Demonstração. Suponha que μ não é a medida periódica de um poço. Pelo teorema 4.2.6, temos que para todo ponto $x \in \text{supp}(\mu)$,

$$\frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_F \right\| \geq \frac{1}{n} K - \log \gamma,$$

onde $K > 0$ e $0 < \gamma < 1$ são as constantes de expansão de F, e portanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_F \right\| \geq -\log \gamma > 0.$$

Por outro lado, o teorema 4.2.7 diz que para μ-quase todo ponto x,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x)|_E \right\| < -c.$$

Portanto, pela unicidade dos expoentes de Lyapunov e dos supespaços próprios, para μ-quase todo ponto $x \in \text{supp}(\mu)$, E_x e F_x são os subespaços próprios de T_xM, e os respectvos expoentes são $\lambda_1(x) < -c < 0$ e $\lambda_2(x) > -\log \gamma > 0$. Logo, μ é hiperbólica. Por outro lado, se μ é a medida periódica de um poço, então para todo ponto ponto $x \in O(p)$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| df^n(x) \right\| < 0,$$

e portanto μ também é hiperbólica. $\square$

Teorema 4.3.2. *Seja $f \in P(M)$ um difeomorfismo de classe C^2. Então $\overline{P(\delta, f)} = \Sigma(\delta, f)$.*

Demonstração. Já temos quase tudo pronto. Pela definição de $\Sigma(\delta, f)$, basta provar que, dada $\mu \in M(\delta, f)$, todo ponto em suporte pode ser aproximado por pontos periódicos em $P(\delta, f)$. Como os pontos genéricos são densos em $\text{supp}(\mu)$, basta provarmos que todo ponto genérico em $\text{supp}(\mu)$ pode ser aproximado por pontos periódicos em $P(\delta, f)$. Como f é de classe C^2, pelo teorema de Katok, todo ponto genérico em $\text{supp}(\mu)$ pode ser sombreado por órbitas periódicas, as quais, devido ao sombreamento, pertencem a $P(\delta, f)$.[12] $\square$

A Finitude do Número de Atratores Hiperbólicos

O principal objetivo agora é provarmos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.3. *Considere um difeomorfismo $f \in P(M)$ de classe C^1. Então f possui um número finito de atratores hiperbólicos.*

O argumento é um pouco rebuscado, e envolverá algumas definições novas, no entanto a idéia que o norteia é bem simples. Para ilustrá-la, suponhamos que $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico e que f possua infinitos atratores hiperbólicos Λ_i distintos. Em particular, como atratores são conjuntos transitivos, temos que para todo $i \neq j$, $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$. Para cada i, tome um ponto $x_i \in \Lambda_i$. Por compacidade, a sequência $\{x_i\}$ acumula em algum lugar, logo existem pontos distintos x_i e x_j, arbitrariamente próximos. Como cada $\Lambda_i \subset \Sigma(\delta, f)$, e estamos assumindo que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico, o Teorema da Variedade Estável garante que as variedades invariantes de x_i e x_j se intersectam. Como $W^u(x_i) \subset \Lambda_i$, para todo i, devido à proposição 3.5.3, se $x \in W^s(x_i) \cap W^u(x_j)$, então $x \in \Lambda_j$ e $\omega(x) \in \Lambda_i$. Portanto, $\Lambda_i \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, absurdo.

Apesar de não sabermos provar que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico, sem a hipótese de regularidade, iremos implementar exatamente a estratégia acima. Observe que o único momento no qual utilizamos a hiperbolicidade de $\Sigma(\delta, f)$ foi quando concluímos que as variedades invariantes de x_i e x_j se intersectavam. Isto é garantido, quando $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico, porque as variedades invariantes de x_i e x_j possuem um tamanho mínimo e porque a decomposição hiperbólica $E^s \oplus E^u$ varia continuamente. No caso em que não sabemos se $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico, o tamanho mínimo das variedades invariantes de x_i, em princípio, depende i. O trabalho todo que faremos será exatamente para garantir que *existem pontos $x_i \in \Lambda_i$*, cujas variedades invariantes possuem um tamanho mínimo, independente de i.

No que se segue, f é um difeomorfismo como na hipótese do teorema 4.3.3, que possui infinitos atratores hiperbólicos Λ_i distintos. Podemos supor que nenhum Λ_i é a órbita de um poço, e como vimos acima, $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$.

O Lema de Pliss

O primeiro passo será um lema geral que garante a existência de cordas com hiperbolicidade uniforme em compactos invariantes que admitem uma decomposição dominada.

[12] Veja observação 3.5.7.

Seja Λ um compacto invariante para um difeomorfismo $g \in \text{Diff}^1(M)$. Suponhamos que Λ admite uma decomposição dominada $E \oplus F$. Dado um número $\gamma > 0$, dizemos que uma corda $\{x, g^n(x)\}$ contida em Λ é uma *γ-E-corda* se

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left\| dg(g^j(x))|_E \right\| \leq \gamma^n.$$

Dizemos que $\{x, g^n(x)\}$ é uma *γ-E-corda uniforme* se $\{x, g^k(x)\}$ é uma γ-E-corda para todo $0 \leq k \leq n$.

Uma γ-E-corda é uma corda com hiperbolicidade no iterado n. Acontece que, por exemplo, se $\gamma < 1$, a corda podería apresentar, em princípio, expansão na mairia dos pontos da órbita de x, e contrações muito fortes em poucos pontos, mas o bastante para resultar em contração no tempo final n. Contudo como a norma de dg é limitada em M, porque g é C^1, qualquer contração que ocorra não pode ser arbitrariamente forte, o que nos leva a pensar que, se n for muito grande, uma γ-E-corda irá apresentar uma contração uniforme a partir de algum tempo. Este é o conteúdo do lema de Pliss.

Lema 4.3.4 (Lema de Pliss)**.** *Dado $0 < \gamma < 1$, para todo $0 < \gamma < \gamma_0 < 1$ existem $N > 0$ e $0 < b < 1$ tais que se $\{x, g^n(x)\}$ é uma γ-E-corda, com $n \geq N$, então existem $0 \leq n_1 < ... < n_k \leq n$ tais que $k > nb$ e $\{g^{n_i}(x), g^n(x)\}$ é uma γ_0-E-corda uniforma para todo $1 \leq i \leq k$.*

O lema de Pliss diz que, para todo $\epsilon > 0$, com γ-E-cordas suficientemente grandes conseguimos $(\gamma+\epsilon)$-E-cordas uniformes, e ainda com tamanho grande. É nesse contexto que o usaremos a seguir. A prova do lema de Pliss será dada no apêndice. Nos argumentos que seguem, $E \oplus F$ é a decomposição dominada de $\Sigma(\delta, f) - S(f)$.

Controlando a Derivada

Iremos usar o lema de Pliss para obter uma estimativa sobre a derivada em pontos de Λ_i, que não dependa de i. Pelo teorema 3.5.10, existe um ponto $p_i \in \Lambda_i$, $p_i \in P(\delta, f)$, tal que $\Lambda_i = H(p_i)$. Podemos supor que nenhum p_i é poço, uma vez que o número de poços é finito.

Fixemos um $i \geq 0$.

Pelo lema 3.3.3, $\Lambda_i = HT(p_i)$, onde

$$HT(p) = \overline{\{x;\ x \text{ é ponto homoclínico transversal associado a } p\}}.$$

Pelo lema 3.2.15, cada ponto em $HT(p_i)$ é acumulado por pontos periódicos em $P(\delta, f)$, logo existe uma sequência de pontos distintos $p_n \in \Lambda_i$, $p_n \in P(\delta, f) - S(f)$ (já que os poços são finitos) para todo $n \geq 0$. Podemos supor que $\pi(p_n) \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, pois, pelo lema 4.1.5, cada p_n é hiperbólico e como pontos fixos hiperbólicos são isolados, o número de pontos periódicos hiperbólicos de período $\leq k$ é finito, para todo $k > 0$.

Considere $\lambda = e^{-c}$, onde $c > 0$ é a constante do lema 4.1.5. Então, se $|\lambda_1| < e^{-k_n c} < e^{k_n c} < |\lambda_2|$ são os autovalores de dg^{k_n}, onde $k_n = \pi(p_n)$, como $E \oplus F$ é uma decomposição dominada, λ_1 é o autovalor na direção E, e portanto

$$\lambda^{k_n} = e^{-k_n c} > |\lambda_1| = \left\| df^{k_n}(p_n)|_E \right\| = \prod_{j=0}^{k_n-1} \left\| df(f^j(p_n))|_E \right\|,$$

ou seja, $\{p_n, f^{k_n}(p_n)\}$ é uma λ-E-corda.

Tome $0 < \lambda < \beta < 1$. Aplicando o lema de Pliss, existem $N > 0$ e $0 < b < 1$, tais que para toda λ-E-corda com tamanho $l > N$ existem pelo menos lb tempos a partir dos quais temos uma β-E-corda uniforme. Se n é suficientemente grande, então $k_n = \pi(p_n) > N$, e como $\{p_n, f^{k_n}(p_n)\}$ é uma λ-E-corda, para cada n grande obtemos tempos $0 \leq m_1 < m_2 < ... < m_{r_n} \leq k_n$, tais que $\{f^{m_j}(p_n), f^{k_n}(p_n)\}$ é uma β-E-corda uniforme para todo $j = 1, ..., r_n$. Defina $y_n = f^{m_1}(p_n)$ e observe que $\{y_n, f^{k_n - m_1}(y_n)\}$ é uma β-E-corda uniforme. Como, por Pliss, $r_n \geq k_n b$ temos que $k_n - m_1 \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Daí, por compacidade podemos supor que $y_n \to x_i \in \Lambda_i$. Como

$$\prod_{j=0}^{k_n - m_1 - k - 1} \left\| df(f^j(y_n)) \right\| \leq \beta^{k_n - m_1 - k},$$

para todo $0 \leq k \leq k_n - m_1 - 1$, dado $m > 0$, para todo n suficientemente grande temos que

$$\left\| df^m(y_n)|_E \right\| \leq \beta^m.$$

Portanto, tomando o limite quando $n \to +\infty$,

$$\left\| df^m(x_i)|_E \right\| \leq \beta^m.$$

Em resumo, obtivemos o seguinte resultado:

Lema 4.3.5. *Existe um número $0 < \beta < 1$ que só depende de f, com a seguinte propriedade: para cada i, existe um ponto $x_i \in \Lambda_i$ tal que*

$$\left\| df^n(x_i)|_E \right\| \leq \beta^n,$$

para todo $n \geq 0$.

Em palavras, existe uma constante $0 < \beta < 1$ tal que para todo i, temos um ponto $x_i \in \Lambda$ com contração na derivada a uma taxa β. O ponto importante é que essa constante de hiperbolicidade **não depende** de i.

Os Teoremas de Hirsch-Pugh-Shub e do Valor Médio

Agora vamos usar a estimativa que temos sobre a derivada nos pontos x_i para provarmos que as variedades estáveis dos pontos x_i possuem um tamanho mínimo. Heuristicamente, a idéia do argumento é a seguinte: como M é uma superfície e E é um subfibrado unidimensional, podemos tentar usar teoremas de EDO para integrar a direção E e obter curvas tangentes a ela com comprimento mínimo. Por outro lado, como $df^n|_E$ possui uma contração *uniforme* nos pontos x_i, pelo teorema do valor médio, para todo $n > 0$, f^n deve contrair distâncias de pontos próximos de x_i tangentes a E, também de modo uniforme. Isto irá implicar que as curvas com comprimento mínimo, obtidas integrando a direção E, serão contraídas pela ação de f^n, portanto estarão contidas em $W^s(x_i)$, para todo i.

A principal falha desta estrtégia heurística é que não temos de fato um campo de vetores definido a partir do subfibrado E e definido num *aberto* de M, para que possamos integrar usando teoremas de *EDO*. Para sanar esta dificuldade usaremos o resultado a seguir, cuja prova o leitor pode encontrar em [17].

No enunciado iremos denotar por $\mathrm{Merg}\,((-1,1);M)$ o espaços dos mergulhos de C^1 do intervalo $(-1,1)$ em M, munido da topologia C^1.

Teorema 4.3.6 (Hirsch-Pugh-Shub)**.** *Seja f um difeomorfismo numa superfície M. Suponha que $\Lambda \subset M$ é um compacto invariante que admite uma decomposição dominada $E \oplus F$. Então existem funções contínuas $\gamma^s : \Lambda \to \mathrm{Merg}\,((-1,1);M)$ e $\gamma^u : \Lambda \to \mathrm{Merg}\,((-1,1);M)$ tais que*

1. *$\gamma^s(x)(0) = \gamma^u(x)(0) = x$ para todo $x \in \Lambda$.*
2. *$\frac{d}{dt}\gamma^s(x)(t)|_{t=0} = E_x$ e $\frac{d}{dt}\gamma^u(x)(t)|_{t=0} = F_x$.*
3. *Para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$f\left(\gamma^s(x)((-\delta,\delta))\right) \subset \gamma^s(f(x))((-\epsilon,\epsilon))$$

e

$$f^{-1}\left(\gamma^u(x)((-\delta,\delta))\right) \subset \gamma^s(f^{-1}(x))((-\epsilon,\epsilon)),$$

para todo $x \in \Lambda$.

O teorema acima garante a existência de curvas tangentes a E e a F em cada ponto $x \in \Lambda$ (onde Λ é um compacto invariante como no enunciado) com comprimento mínimo e localmente invariantes por f.

Aplicando o Teorema de Hirsh-Pugh-Shub a $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, obtemos uma família contínua $\gamma^s(x)$ de curvas tangentes a E em todo ponto $x \in \Sigma(\delta, f) - S(f)$. Vamos denotar $\gamma^s_\epsilon(x) := \gamma^s(x)((-\epsilon,\epsilon))$. Se ϵ é suficientemente pequeno, podemos supor que todas estas curvas são parametrizadas pelo comprimento de arco, e têm comprimento 2ϵ.

Fixemos arbitrariamente um $i \geq 0$ e considere Λ_i e o ponto $x_i \in \Lambda_i$, dado pelo lema 4.3.5. Nosso objetivo agora é mostrar que $\gamma^s_\epsilon(x_i) \subset W^s(x_i)$. Em particular, isto irá provar que $W^s(x_i)$ tem comprimento pelo menos 2ϵ.

Por simplicidade de notação, nas próximas linhas iremos denotar Λ_i por Λ e x_i por x. O fato de que o tamanho ϵ não depende de i irá ficar claro dos argumentos que iremos apresentar.

Como γ^s é contínua, f é de classe C^1 e $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ é compacto, dado $\alpha > 0$ tal que $(1+\alpha)\beta < 1$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $y \in \Sigma(\delta, f) - S(f)$, se $z \in \gamma^s_{\epsilon_0}(y)$ e $G_z = T_z\gamma^s_{\epsilon_0}$

denota o subespaço de T_zM tangente a $\gamma^s_{\epsilon_0}$ então[13]

$$\left\|df(z)|_G\right\| \leq (1+\alpha)\left\|df(y)_G\right\|. \tag{4.10}$$

Observe que, devido à continuidade uniforme de df, esta escolha de ϵ_0 é claramente independente de i. Pela invariância local, exsite $\epsilon < \epsilon_0$ tal que

$$f\left(\gamma^s_\epsilon(y)\right) \subset \gamma^s_{\epsilon_0}(f(y)),$$

desde que $\epsilon < \epsilon_0$ seja escolhido suficientemente pequeno, o que novamente pode ser feito de modo independente de i.

Também por simplicidade de notação, seja $\gamma(t) := \gamma^s_\epsilon(x)(t)$. Iremos provar por indução que o comprimento $l(f^n \circ \gamma) \to 0$ quando $n \to +\infty$, pois isto obviamente implica que $\gamma \subset W^s(x)$.

Pela estimativa 4.10, temos que

$$l(f\circ\gamma) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left\|df(\gamma(t))\gamma'(t)\right\| dt \leq (1+\alpha)\left\|df(x)|_E\right\| l(\gamma),$$

e como $\left\|df(x)|_E\right\| \leq \beta$, obtemos

$$l(f\circ\gamma) \leq (1+\alpha)\beta l(\gamma) < 2\epsilon.$$

Como, devido a invariância local, $f\circ\gamma \subset \gamma^s_{\epsilon_0}(f(x))$, a estimativa sobre o comprimento de $f\circ\gamma$ mostra que de fato temos $f\circ\gamma \subset \gamma^s_\epsilon(f(x))$.

Suponhamos agora, por indução, que $l\left(f^j\circ\gamma\right) \leq (1+\alpha)^j\beta^j l(\gamma)$, e $f^j\circ\gamma \subset \gamma^s_\epsilon(f^j(x))$, para todo $1 \leq j \leq n$. Vamos provar que isto também vale com $j = n+1$. Por um lado, a invariância local nos garante que

$$f^{n+1}\circ\gamma \subset \gamma^s_{\epsilon_0}(f^{n+1}(x)) \tag{4.11}$$

Por outro lado, tendo em vista a hipótese de indução, segue da estimativa 4.10 que

$$\left\|df(f^j(\gamma(t)))|_G\right\| \leq (1+\alpha)\left\|df(f^j(x))|_E\right\|,$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Multiplicando em j a desigualdade acima, como E e G são unidimensionais, obtemos

$$\left\|df^{n+1}(\gamma(t))|_G\right\| < (1+\alpha)^{n+1}\left\|df^{n+1}(x)|_E\right\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} l\left(f^{n+1}\circ\gamma\right) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left\|df^{n+1}(\gamma(t))\gamma'(t)\right\| dt \\ &\leq (1+\alpha)^{n+1}\left\|df^{n+1}(x)|_E\right\| l(\gamma) \end{aligned}$$

[13]Em particular $G_y = E_y$ e G é o subespaço gerado pelo vetor $\gamma^s(y)'(z)$.

e portanto, devido ao lema 4.3.5, temos que

$$l\left(f^{n+1}\circ\gamma\right)\leq(1+\alpha)^{n+1}\beta^{n+1}l(\gamma)<2\epsilon.$$

Por 4.11 temos que

$$f^{n+1}\circ\gamma\subset\gamma^s_\epsilon(f^{n+1}(x))$$

o que completa a prova da indução e mostra que

$$l\left(f^n\circ\gamma\right)\to 0\quad\text{quando}\quad n\to+\infty,$$

como queríamos.

Em resumo, obtivemos que para todo i, $\gamma^s_\epsilon(x_i)\subset W^s(x_i)$, logo $l\left(W^s(x_i)\right)\geq 2\epsilon$. Como F é um subfibrado expansor, o argumento acima mostra que todas as curvas $\gamma^u_\epsilon(y)$ com $y\in\Sigma(\delta,f)-S(f)$ estão contidas na $W^u(y)$, e portanto todas a variedades instáveis já possuem um comprimento mínimo.

Conclusão da Prova

Pelo que vimos acima, obtemos um $\epsilon>0$ e pontos $x_i\in\Lambda_i$, tais que $l\left(W^\sigma(x_i)\right)\geq 2\epsilon$, para todo i, $\sigma=s,u$. Ou seja, provamos que as variedade invariantes dos pontos x_i possuem um tamanho mínimo. Logo, como $E\oplus F$ é contínua, para i,j suficientemente grandes, existe $z\in W^s(x_i)\cap W^u(x_j)$ e como $W^u(x_j)\subset\Lambda_j$, $z\in\Lambda_j$. No entanto, $z\in W^s(x_i)$ implica $\omega(z)\subset\Lambda_i$. Como $\omega(z)\neq\emptyset$, concluímos que $\Lambda_i\cap\Lambda_j\neq\emptyset$, absurdo. O teorema 4.3.3 está provado.

Capítulo 5

O Teorema de Pujals-Sambarino

Na referência original [3] após obter a decomposição dominada sobre $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ como fizemos no capítulo 4, Araújo consegue integrar os fibrados E^s e E^u, como fizemos no capítulo anterior, obtendo subvariedades tangentes. Daí, a parte difícil do trabalho é conseguir provar que na verdade esses conjuntos possuem comportamento dinâmico, e de fato são variedades estáveis e instáveis, como num conjunto hiperbólico. A existência das variedades invariantes é o passo crucial para a conclusão de que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico.

No entanto, a tecnologia dos dias atuais, nos permite obter diretamente que $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico, isso graças aos trabalhos de E. Pujas e M. Sambarino. Em sua solução da Conjectura de Palis em superfícies, eles obtiveram uma descrição bastante satisfatória da dinâmica de subconjuntos compactos invariantes que admitem uma decomposição dominada, para difeomorfismos de classe C^2. Basicamente, a descrição que eles obtiveram diz que um compacto invariante com uma decomposição dominada se divide numa parte, que é um conjunto hiperbólico, e noutra que são curvas periódicas (i.e. existe $n > 0$ tal que $f^n(C) = C$) nas quais a dinâmica é conjugada a uma rotação irracional no círculo.

Definição 5.0.7. *Dizemos que uma curva C periódica, fechada e simples em M é* normalmente hiperbólica *para um difeomorfismo f, se existe uma decomposição dominada $E \oplus F$, sobre C, tal que E é tangente a C e F é hiperbólico, isto é, é contrator ou expansor.*

O resultado que enunciamos a seguir é o Teorema B em [33].

Teorema 5.0.8 (Pujals-Sambarino)**.** *Seja f um difeomorfismo de classe C^2 numa superfície compacta M, e considere $\Lambda \subset M$ um compacto f-invariante possuindo uma decomposição dominada $E \oplus F$ e ainda tal que todos os pontos periódicos em Λ são hiperbólicos e não são nem poços nem fontes. Então, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ onde Λ_1 é um conjunto hiperbólico e Λ_2 é uma união finita de curvas $C_1,\ldots,C_n$ fechadas, simples, periódicas de período π_i, normalmente hiperbólicas e tais que $f^{\pi_i} : C_i \to C_i$ é conjugado a uma rotação irracional.*

Não veremos a prova desse profundo resultado neste trabalho. Nosso objetivo é usá-lo para simplificar a prova do Teorema de Araújo.

Usando o teorema de Pujals-Sambarino é possível provar que (C^1!) genericamente, para certos tipos de subconjuntos compactos invariantes em M, admitir uma decomposição dominada é o mesmo que ser hiperbólico. Não iremos provar este resultado aqui, mas veremos seu enunciado preciso no capítuilo 07, no qual daremos uma outra prova para o teorema de Araújo.

Na próxima seção vamos aplicar o teorema de Pujals-Sambarino a $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, e concluir sua hiperbolicidade no caso C^2.

5.1 Decomposição Espectral para $\Sigma(\delta, f)$

Suponha que $f \in P(M)$ é um difeomorfismo Kupka-Smale C^2. Pelos resultados do capítulo anterior, sabemos que $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ admite uma decomposição dominada $E \oplus F$, tal que F é um subfibrado expansor. Então, aplicando o Teorema de Pujals-Sambarino a $\Sigma(\delta, f) - S(f)$, como $S(f)$ é finito, segue que $\Sigma(\delta, f)$ é a união de um conjunto hiperbólico e um número finito de curvas fechadas e simples, periódicas e normalmente hiperbólicas nas quais a dinâmica é conjugada a uma rotação irracional no círculo. Tome C uma qualquer dessas curvas. Vamos provar que C não pode existir. Suponha, por simplicidade, que C é fixa, pois o caso geral é análogo. Em primeiro lugar, pela conjugação com a rotação irracional, não podem haver pontos periódicos em C. Por outro lado, como C é normalmente hiperbólica, temos uma decomposição dominda $\overline{E} \oplus \overline{F}$ sobre $T_C M$, constituida de uma direção $\overline{E}$ tangente a C e outra complementar e hiperbólica (contratora ou expansora) $\overline{F}$. Como M é uma superfície, as decomposições $\overline{E} \oplus \overline{F}$ e $E \oplus E$ possuem o mesmo índice, logo são iguais. Como F é expansor, segue que C é repulsora, e portanto não pode ser acumulada por órbitas periódicas. Mas como $\overline{P(\delta, f)} = \Sigma(\delta, f)$, pelo teorema 4.3.2, obtemos uma contradição. Portanto C não pode existir. Desse modo, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.1. *Se $f \in P(M)$ é um difeomorfismo Kupka-Smale C^2 então $\Sigma(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico.*

Com esse resultado, podemos mostrar que $\Sigma(\delta, f)$ se decompõe como uma união disjunta de um número finito de classes homoclínicas de pontos periódicos em $P(\delta, f)$.

Teorema 5.1.2. *Seja $f \in P(M)$ um difeomorfismo Kupka-Smale C^2 e $\delta > 0$ pequeno. Então $\Sigma(\delta, f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n$, união disjunta de subconjuntos compactos, invariantes, topologicamente transitivos, isolados e com pontos periódicos densos.*

Demonstração. Defina Λ_i como a classe homoclínica de um ponto periódico em $P(\delta, f)$. Pelo Corolário 3.3.5 cada Λ_i é um subconjunto de $\Sigma(\delta, f)$.

Sabemos que classes homoclínicas sempre são conjuntos compactos invariantes, topologicamente transitivos e com pontos periódicos densos. Como $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico, cada classe homoclínica de um ponto periódico em $P(\delta, f)$ é um conjunto hiperbólico, e como toda classe homoclínica hiperbólica possui estrutura de produto local,[1] segue que cada Λ_i é um conjunto isolado.

Resta provar que temos finitas classes homoclínicas e que elas são disjuntas. Suponha por absurdo que existam infinitas classes distintas, digamos Λ_1, Λ_2,...,Λ_n,... Nesse caso, tome $p_i \in \Lambda_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ o ponto periódico em $P(\delta, f)$ que gera a classe homoclínica. Por compacidade, a sequência $\{p_i\}$ possui ao menos um ponto de acumulação, logo existem pontos p_i suficientemente próximos. Mas, como $\Sigma(\delta, f)$ é hiperbólico, isto implica que, para um par i, j suficientemente grande p_i é homoclinicamente relacionado com p_j, logo $\Lambda_i = \Lambda_j$, contrariando a hipótese de que todos os Λ_i eram distintos, e provando a finitude. Com o mesmo argumento podemos provar que se Λ_i intersecta Λ_j, então eles devem ser iguais. Isso completa a demonstração. □

Cada conjunto Λ_i na decomposição espectral de $\Sigma(\delta, f)$ é dito uma *peça básica*.

O resultado acima é um passo grande para obtermos o teorema de Araújo, mas ainda precisamos aprender como controlar a medida de Lebesgue da união das bacias dos atratores hiperbólicos. Isto é o que faremos no próximo capítulo.

[1] Ver lema 3.3.4

Capítulo 6

Dinâmica Genérica e o Teorema de Araújo

A dinâmica genérica estuda propriedades que valem para a maioria dos sistemas. Lembre que o espaço $\mathrm{Diff}^1(M)$ é um espaço de Baire, portanto todo residual é denso. Dizemos que uma propriedade é *genérica* em $\mathrm{Diff}^1(M)$ se ela vale num residual deste espaço. Neste capítulo, iremos enunciar um teorema básico de topologia que é uma das principais ferramentas na obtenção de propriedades genéricas. Depois, usaremos esse teorema e os resultados vistos anteriormente sobre $P(M)$ e $\Sigma(\delta, f)$ para provar o Teorema de Araújo.

6.1 O Lema de Semicontinuidade

Podemos enfraquecer o conceito de continuidade de funções que tomam valores na reta pelos conceitos de semicontinuidade superior/inferior. Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é espaço topológico. Por completude, vamos dar a definição formal de semicontinuidade.

Definição 6.1.1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ como acima. Dizemos que f é* semicontínua inferiormente *em x se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x tal que $f(y) \geq f(x) - \epsilon$, sempre que $y \in U$. Se f é semicontínua inferiormente em todos os pontos de X, dizemos simplesmente que f é semicontínua inferiormente.*

Intuitivamente, semicontinuidade inferior num ponto $x \in X$ significa que para pontos de X suficientemente próximos de x, os valores correspondentes por f não são muito menores do que $f(x)$. Podemos definir, de modo similar, o conceito de função semicontínua superiormente, e de modo que f é contínua num ponto, se, e só se, é semicontínua inferior e superiormente no ponto.

É natural se perguntar se a definição de semicontinuidade é realmente mais geral do que a definição de continuidade. Contudo, é fácil dar um exemplo de uma função escada que é semicontínua mas não é contínua. Por outro lado, é possível obter bastante informação sobre o conjunto dos pontos de continuidade de uma função semicontínua.

Lema 6.1.2 (Lema de Semicontinuidade). *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então, existe um residual em X no qual todo ponto é um ponto de continnuidade de f.*

Mais do que dar informação sobre o quão contínua pode ser qualquer função semicontínua, este resultado nos dá uma fonte poderosa de residuais. Sob esse ponto de vista ele nos diz, por exemplo, que uma aplicação que leva difeomorfismos em números reais e que possui uma variação semicontínua, possui variação contínua num residual de difeomorfismos. Como a hiperbolicidade não pode ser "destruída"por pequenas perturbações, é de se esperar que ela produza variações semicontínuas, e portanto residuais. Uma ilustração de tal afirmação é dada no lema a seguir, o qual é de vital importância para este trabalho.

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 e denote por $B(f)$ a união das baicas dos atratores hiperbólicos de f. Note que $B(f)$ pode ser vazio em princípio. Considere a aplicação

$$L : \mathrm{Diff}^1(M) \to \mathbb{R},$$

dada por

$$L(f) = m(B(f)).$$

Lema 6.1.3. *L é semicontínua inferiormente*

Demonstração. Fixe $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e $\epsilon > 0$. Como $m(B(f)) \leq 1$ e como as bacias de atração de atratores hiperbólicos são disjuntas, temos que, se $\{\Lambda_i\}$, como $i \in \mathbb{N}$ são os atratores hiperbólicos de f, então

$$1 \geq m(B(f)) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(B(\Lambda_i)),$$

donde existem $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$, atratores hiperbólicos de f tais que

$$\sum_{i=1}^{n} m(B(\Lambda_i)) \geq m(B(f)) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam $K_1, ..., K_n$ compactos satisfazendo $\Lambda_i \subset K_i \subset B(\Lambda_i)$ e $m(B(\Lambda_i) - K_i) < \frac{\epsilon}{2n}$. Usando a estabilidade atratores hiperbólicos, teorema 3.5.5, obtemos uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para cada $g \in \mathcal{U}$ existem $\Lambda_1(g), ..., \Lambda_n(g)$, atratores hiperbólicos para g com $K_i \subset B(\Lambda_i(g))$, uma vez que todo difeomorfismo para todo $g \in \mathcal{U}$ $\Lambda_i(g)$ é um atrator hiperbólico com a mesma bacia local de Λ_i para f. Daí, temos que

$$\begin{aligned} m(B(g)) &\geq \sum_{i=1}^{n} m(K_i) \geq \sum_{i=1}^{n} (m(B(\Lambda_i)) - \frac{\epsilon}{2n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(B(\Lambda_i)) - \frac{\epsilon}{2} \geq m(B(f)) - \epsilon, \end{aligned}$$

e isto prova a semicontinuidade de L. ◻

Não iremos provar o teorema 6.1.2, mas uma prova pode ser encontrada em [19].

A topologia de Hausdorff

Para podermos levar mais adiante a afirmação que fizemos acima, de que a hiperbolicidade dá origem a variações semicontínuas, devemos considerar também a variação de *conjuntos* que contenham alguma hiperbolicidade, ao invés de somente números. Para tanto, é preciso dar uma noção de proximidade entre conjuntos.

Seja $C_M = \{K \subset M;\ K$ é compacto $\}$. Dados $A, B \in C_M$ definimos o número $d_A(B) = \sup\{d(b, A);\ b \in B\}$. Intuitivamente este número mede a maior distância ao conjunto A que é vista pelos pontos do conjunto B. É bem claro que uma noção de proximidade entre A e B deve levar em conta tanto $d_A(B)$ como $d_B(A)$.

Definição 6.1.4. *Definimos a* métrica de Hausdorff *em C_M pondo*

$$d(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}.$$

É preciso provar que a noção acima realmente providencia uma topologia em C_M e que essa topologia possui boas propriedades. Não iremos dar esta prova aqui, mas coletamos o resultado no

Lema 6.1.5. *A métrica é de Hausdorff é de fato uma métrica sobre C_M que o torna um espaço métrico compacto.*

Para uma prova, ver [19].

Agora podemos dizer o que significa uma variação semicontínua de conjuntos.

Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma função $\Gamma : X \to C_M$ é *semicontínua inferiormente* em $x \in X$ se, para todo aberto $U \subset M$ tal que $U \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$, existe uma vizinhança V de x tal que $U \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in V$. Dizemos também que Γ é *semicontínua superiormente* em x, se para todo compacto K tal que $K \cap \Gamma(x) = \emptyset$, existe uma vizinhança V de x tal que $K \cap \Gamma(y) = \emptyset$ para todo $y \in V$. Informalmente, a noção de continuidade é bem clara: para pontos y numa vizinhança de x, $\Gamma(y)$ pode ser visto como $\Gamma(x)$ apenas ligeiramente deformado. Seguindo essa idéia, podemos dizer que quando Γ é semicontínua inferiormente, para pontos y sufcientemente próximos de x, $\Gamma(y)$ é uma deformação de $\Gamma(x)$, que não é muito menor, mas pode ser bem maior. Dualmente, se Γ é semicontínua superiormente, para todo ponto y próximo de x, $\Gamma(y)$ pode diminuir em relação a $\Gamma(x)$, mas não pode aumentar.[1]

Observação 6.1.6. *Note que semicontinuidade inferior num ponto equivale a dizer que, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhaça U de x, tal que $y \in U$ implica $d_{\Gamma(y)}(\Gamma(x)) < \epsilon$.*

Finalmente, dizemos que Γ é semicontínua inferiormente/superiormente se o é em todos os pontos de X. Um ponto de continuidade de de Γ é um ponto onde Γ é semicontínua inferiormente *e* superiormente. Ou seja, quando Γ é contínua, $\Gamma(x)$ persiste em $\Gamma(y)$, e $\Gamma(y)$ não explode $\Gamma(x)$.

[1] Agradeço ao Davi por me fazer notar isso.

Assim como no caso de funções tomando valores reais, semicontinuidade é uma fonte de residuais. Por abuso de notação, damos o mesmo nome a este resultado, e nos referimos indistintamente a ambos os resultados por Lema de Semicontinuidade, a menos de haver perigo de confusão.

Lema 6.1.7 (Lema de Semicontinuidade)**.** *Seja $\Gamma : X \to C_M$ uma função semicontínua inferiormente. Então o conjunto dos pontos de continuidade de Γ é um residual de X.*

Agora, podemos provar um lema similar ao lema 6.1.3. Para este fim, considere um difeomorfismo f de uma superfície fechada M. Denote por $S(f)$ o conjunto de poços de f. Considere a aplicação

$$P : \mathrm{Diff}^1(M) \to C_M,$$

dada por $P(f) = \overline{S(f)}$.

Lema 6.1.8. *P é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Fixe $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, e tome um aberto U que intersecta $\overline{S(f)}$. Logo, existe um poço p em U. Pela continuação analítica, existe $\mathcal{U}$, vizinhança C^1 de f tal que todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$ possui um poço em U. Portanto, $\overline{S(g)} \cap U \neq \emptyset$, e segue a semicontinuidade de P. □

6.2 Estratégia para obter o Teorema de Araújo

Nesta seção vamos dar uma idéia de como provar o Teorema de Araújo, e reduzir a sua prova à demonstração de um lema. Começamos relembrando o enunciado.

Teorema 6.2.1 (Araújo)**.** *Seja M uma superfície fechada. Então, existe um residual $\mathcal{R}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tal que todo difeomorfismo $f \in \mathcal{R}$ cumpre uma das seguintes condições*

- *f possui infinitos poços*
- *f é essencialmente hiperbólico.*

O Lema de Semicontinuidade nos permite obter um residual em $\mathrm{Diff}^1(M)$ no qual os poços variam continuamente. Daí, vamos tomar um difemorfismo f neste residual com um número finito de poços e provar que ele é essencialmente hiperbólico. Veremos que a variação contínua do conjunto de poços aliada a sua finitude implica que $f \in P(M)$. Pelo teorema 4.3.3, obteremos que f possui um número finito de atratores hiperbólicos. A parte mais delicada do argumento será mostrar que a medida de Lebesgue da união das bacias dos atratores hiperbólicos é total.

Pelos lemas 6.1.3 e 6.1.8 e pelo Lema de Semicontinuidade, existem residuais $\mathcal{R}_P$ e $\mathcal{R}_L$ em $\mathrm{Diff}^1(M)$, tais que todo difeomorfismo em $\mathcal{R}_P$ é um ponto de continuidade da função P, e similarmente para a função L.

Considere o residual KS^1 dos difeomorfismos Kupka-Smale de classe C^1 e seja

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_P \cap \mathcal{R}_L \cap KS^1.$$

Lema 6.2.2. *Se $f \in \mathcal{R}$ possui um número finito de poços então $f \in P(M)$.*

Demonstração. Suponha que $f \in \mathcal{R}$ possua um número finito de poços, digamos, $S(f) = \{p_1, ..., p_n\}$. Neste caso, podemos escolher um $r > 0$ tal que $B(p_i, r) \cap B(p_j, r) = \emptyset$, sempre que $i \neq j$. Como f é ponto de continuidade da função P, existe uma vizinhaça $\mathcal{U}$ de f (na topologia C^1) tal que para toda $g \in \mathcal{U}$, $S(g) = \{p_1(g), ..., p_n(g)\}$, onde cada $p_i(g) \in B(p_i, r)$ é a continuação anallítica de p_i para g, e portanto o número de poços de g também é finito e é igual ao de f. Logo $f \in P(M)$. □

Como dissemos, pelo teorema 4.3.3, obtemos o

Corolário 6.2.3. *Se $f \in \mathcal{R}$ então f possui um número finito de atratores hiperbólicos.*

O que falta é provar que se $f \in \mathcal{R}$ então $L(f) = 1$. Mas, como f é um ponto de continuidade de L, e como (pelo que vimos acima) $\mathcal{R} \subset P(M)$, a prova do Teorema de Araújo está reduzida a prova do seguinte lema:

Lema 6.2.4. *Se $f \in P(M)$ é um difeomorfismo Kupka-Smale, então existe uma sequência $f_n \to f$ na topologia C^1 tal que $L(f_n) = 1$, para todo n.*

Como comentamos acima este lema contém a parte mais delicada do argumento. Para prová-lo usaremos mais métodos de dinâmica genérica combinados com cetas propriedades características de difeomorfismos de classe C^2, as quais discutiremos na próxima seção.

6.3 Prova do Teorema de Araújo

Nesta seção vamos provar o lema 6.2.4 concluir a prova do Teorema de Araújo. Vamos começar enunciando algumas propriedades de difemorfismos de classe C^2 cujas provas serão discutidas no capítulo final da dissertação.

Preliminares

O primeiro resultado versa sobre a criação (mediante perturbações) de pontos homoclínicos associados a peças básicas de conjuntos hiperbólicos isolados, e é devido a Mañé, num belíssimo trabalho que discutiremos no capítulo 10. Ele diz moralmente que se tivermos órbitas que aproximam-se e depois afastam-se do conjunto hiperbólico, mas de modo que a distância entre o ponto da órbita que chega perto e o conjunto diminua *exponencialmente* rápido, então podemos usar estas órbitas e criar uma órbita homoclínica mediante uma perturbação.

Definição 6.3.1. *Dado um conjunto hiperbólico isolado* Λ *para um difeomorfismo* f*, definimos*

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M;\ d(f^n(x), \Lambda) \to 0,\ \textit{quando}\ n \to +\infty\},$$

o conjunto estável de Λ*. Definimos* $W^u(\Lambda)$ *como sendo* $W^s(\Lambda)$ *para* f^{-1}*. Um* ponto homoclínico *associado a* Λ *é um ponto* $p \in \left(W^S(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)\right) - \Lambda$.

Usando o *shadowing lemma*, é possível provar que

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x),$$

e similarmente para $W^u(\Lambda)$. Ver [28], pg. 32. O teorema a seguir é o Teorema D de [26]

Teorema 6.3.2 (C^2 Connecting Lemma de Mañé)**.** *Sejam* f *um difeomorfismos* C^r *(*$r = 1$ *ou* 2*) e* Λ *um conjunto hiperbólico isolado para* f *com* $\Omega(f|_\Lambda) = \Lambda$*. Suponha que exista um ponto* $x \notin W^s(\Lambda)$ *tal que* $\mu(\Lambda) > 0$ *para toda* $\mu \in \mathcal{M}(x)$*. Então, dada uma* C^r *vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* f*, e uma vizinhança* U *de* Λ*, existe um difeomorfismo* $g \in \mathcal{U}$ *que concide com* f *em* U *e que possui um ponto homoclínico fora de* U *associado a* Λ*.*

No capítulo 10 iremos discutir e fazer um esboço da prova do teorema acima. Em particular iremos explicar como a hipótese sobre a medida orbital gera a aproximação exponencial e de que modo isto permite criar a órbita homoclínica para uma perturbação.

Na prova do lema 6.2.4, o teorema 6.3.2 será usado para violarmos uma continuidade, ao "explordirmos"o conjunto hiperbólico após a criação da órbita homoclínica, numa idéia semelhante àquela que usamos na prova do lema 4.1.4, quando "explodimos"o conjunto de poços mediante uma perturbação usando o lema de Franks. Naquele contexto, a continuidade estava escondida na finitude robusta do número de poços.

O outro resultado que iremos usar na prova do lema 6.2.4 é um teorema clássico devido a Bowen que versa sobre a medida de Lebesgue de conjuntos hiperbólicos para difeomorfismos de classe C^2.

Teorema 6.3.3. *Seja* Λ *uma peça básica de um difeomorfismo* f *de classe* C^2*. Então* $m(W^s(\Lambda)) > 0$ *se, e somente se,* Λ *é um atrator.*

Com este teorema seremos capazes de descartar, no sentido da medida de Lebesgue, peças básicas que não são atratores. A dificuldade será considerar o caso não Anosov, onde não temos informação assintótica sobre *todos* os pontos da variedade.

Prova do lema 6.2.4

Fixe um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe C^1 em $P(M)$ e Kupka-Smale, onde M é uma superfície fechada. Queremos provar que existe uma sequência $f_n \to f$ tal que $L(f_n) = 1$. Primeiro vamos apresentar a idéia central do argumento, e depois iremos a dar prova formal.

Observe que para obter o resultado basta tomar uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f e conseguir um subconjunto denso de difeomorfismos nessa vizinhança no qual $L \equiv 1$. Como $\text{Diff}^2(M)$ é denso em $\text{Diff}^1(M)$, podemos restringir nossa atenção ao mundo C^2 numa vizinhança de f. Considere $g : M \to M$ um difeomorfismos de classe C^2 em $P(M)$ e Kupka-Smale (note que, como $f \in P(M)$, basta que g esteja suficientemente C^1-próximo de f para termos $g \in P(M)$, e note também que KS^2 é denso em $\text{Diff}^2(M)$, e portanto denso em $\text{Diff}^1(M)$). Como vimos no capítulo 5, $\Sigma(\delta, g)$ é um conjunto hiperbólico. É razoável esperar que tenhamos variação semicontínua de $\Sigma(\delta, g)$, e portanto variação contínua num residual. A idéia então, é estabelecermos que para todo difeomorfismo nesse residual temos $L = 1$ e com isso provar o lema 6.2.4. O argumento que realiza isso é clássico: supondo que não vale, usamos um lema de perturbação (aqui será o teorema 6.3.2) para explodir $\Sigma(\delta, g)$ e violar a continuidade. Apesar de a idéia ser simples, é preciso ter um certo cuidado com as topologias usadas, uma vez que um aberto C^2 não é aberto C^1.

Agora vamos destrinchar os detalhes do esboço acima.

Tome $\mathcal{U}$ a vizinhança de f na qual o número de poços é finito e constante, dada pela definição de $P(M)$. Considere

$$\mathcal{D} := \mathcal{U} \cap \text{Diff}^2(M) \cap KS^2(M).$$

Uma observação fácil, mas fundamental, é que $\mathcal{D}$ é *inteiramente formado* por difeomorfismos de classe C^2. Como $\text{Diff}^2(M)$ é denso em $\text{Diff}^1(M)$ e $KS^2(M)$ é denso em $\text{Diff}^2(M)$, temos que $\mathcal{D}$ é C^1-denso em $\mathcal{U}$. Em particular, se obtivermos um subconjunto denso de $\mathcal{D}$, obteremos um subconjunto denso em $\mathcal{U}$. Para este propósito, o próximo lema é importante.

Lema 6.3.4. *Todo residual de $\mathcal{D}$ é denso em $\mathcal{D}$*

Demonstração. Pelo teorema de Kupka-Smale, $\mathcal{D}$ é denso em $\text{Diff}^2(M)$. Daí, todo subconjunto de $\mathcal{D}$ é denso em $\text{Diff}^2(M)$. Logo, todo aberto e densos de $\mathcal{D}$ está contido num aberto e denso de $\text{Diff}^2(M)$. Portanto, todo residual de $\mathcal{D}$ está contido num residual de $\text{Diff}^2(M)$, o qual é denso em $\text{Diff}^2(M)$, pelo teorema de Baire. No entanto, os pontos desse residual maior que formam o conjunto denso em $\text{Diff}^2(M)$ pertencem, obrigatoriamente, a $\mathcal{D}$, logo são pontos do residual menor (contido em $\mathcal{D}$) que formam o subconjunto denso em $\text{Diff}^2(M)$. Isto prova o lema. □

Agora iremos obter um residual de $\mathcal{D}$ no qual $L \equiv 1$, logo, pelo lema acima, iremos obter um subconjunto denso em $\mathcal{U}$ no qual $L \equiv 1$. Isto obviamente implicará o lema 6.2.4.

Para obter este residual iremos usar o lema de semicontinuidade. Definimos a aplicação

$$\Psi : \mathcal{D} \to C_M,$$

pondo $\Psi(g) = \Sigma(\delta, g)$. Pelo teorema 5.1.1, se $g \in \mathcal{D}$ então $\Sigma(\delta, g)$ é um conjunto hiperbólico, e pelo teorema 4.3.2 temos que $\Sigma(\delta, g) = \overline{P(\delta, g)}$.

Lema 6.3.5. Ψ *é semicontínua inferiormente*

Demonstração. Fixe $g \in \mathcal{D}$. Seja U um aberto de M tal que $U \cap \Sigma(\delta, g) \neq \emptyset$. Em particular, existe $p \in P(\delta, g) \cap U$. Queremos provar que para todo $h \in \mathcal{D}$ suficientemente C^2-próximo de g, $\Sigma(\delta, h) \cap U \neq \emptyset$. Como todos os pontos periódicos de g são hiperbólicos, pela continuação analítica temos que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de g, na topologia C^2, tal que para todo h nessa vizinhança, existe $p(h) \in U$, um ponto periódico hiperbólico e de mesmo período que p. Além disso, como para todo $h \in \mathcal{U}$ $\pi(p(h)) = \pi(p) = n$, podemos supor que

$$\frac{1}{n} \log |\det dh^n(p(h))| < \delta.$$

Isto implica que $p(h) \in P(\delta, h)$ e prova o lema. $\square$

Pelo Lema de Semicontinuidade, obtemos um residual $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ tal que todo difeomorfismo em $\mathcal{T}$ é um ponto de continuidade de Ψ. Resta provar que $g \in \mathcal{T}$ implica $L(g) = 1$.

Seja então $g \in \mathcal{T}$. Pelos resultados do capítulo 05, $\Sigma(\delta, g)$ é um conjunto hiperbólico e temos uma decomposição espectral: $\Sigma(\delta, g) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_n$, onde cada Λ_i é uma peça básica. Além disso, cada atrator hiperbólco de g é uma dessas peças básicas.

Se $\Sigma(\delta, g) = M$ então g é Anosov e pelo teorema 6.3.3, para as peças básicas Λ_j que não são atratores temos $m(W^s(\Lambda_j)) = 0$. Como, $m(\cup_{i=1}^n W^s(\Lambda_i)) = 1$, isto nos leva a concluir que $L(g) = m(B(g)) = 1$.

Se $\Sigma(\delta, g) \neq M$, suponha por contradição que não vale $L(g) = 1$. Daí, temos que existe um subconjunto $Q \subset M$, com medida de Lebesgue positiva, tal que $x \in Q$ implica que $\omega(x)$ é disjunto dos atratores hiperbólicos. Além disso, se $\Lambda_1, ..., \Lambda_r$ são as peças da decomposição espectral de $\Sigma(\delta, g)$ que não são atratoras, pelo teorema 6.3.3, $m(W^s(\Lambda_i)) = 0$, para todo $i = 1, ..., r$. Logo, podemos supor que Q é disjunto de $W^s(\Lambda_i)$, para todo $i = 1, ..r$.

Pelo lema 2.4.5, como estamos supondo que $m(Q) > 0$, existe $x \in \Lambda(\delta, g) \cap Q$. Logo, pelo lema 2.4.7 temos que para toda $\mu \in M(x)$ vale $\mu(\Sigma(\delta, g)) > 0$, donde existe pelo menos um Λ_i, $i = 1, ..., n$, tal que $\mu(\Lambda_i) > 0$. Como $\omega(x)$ é disjunto dos atratores, nenhum deles pode ter medida μ positiva. Logo, existe um $j = 1, ..., r$, tal que para $\Lambda = \Lambda_j$, temos $\mu(\Lambda) > 0$. Como Λ é um conjunto transitivo, $\Omega(g|_\Lambda) = \Lambda$ e como Q é disjunto de $W^s(\Lambda)$, temos que $x \notin W^s(\Lambda)$.

Aplicando o teorema 6.3.2, obtemos um difeomorfismo h, C^2-próximo de g, que coincide com g numa vizinhança U de Λ e que possui um ponto homoclínico $z \notin U$ associado a $\Lambda(h)$. Ou seja, se $\Lambda(h)$ é a continuação de Λ para h, temos que existe

$$z \in W^s(\Lambda(h)) \cap W^u(\Lambda(h) \quad \text{e} \quad z \notin U.$$

Além disso, como h é C^2 próximo de g, podemos supor que $h \in P(M)$, de modo que $\Sigma(\delta, h)$ é um conjunto hiperbólico com uma decomposição espectral $\Lambda_1(h), ..., \Lambda_n(h)$, e cada peça dessa decomposição é a classe homoclínica de um ponto periódico em $P(\delta, h)$. Pela mesma razão podemos supor também que $h \in \mathcal{W}$ onde $\mathcal{W}$ é dada pela continuidade de Ψ e é tal que para todo difeomorfsimo em $\mathcal{W}$ a continuação de Λ está contida em U.

No entanto, temos que $z \in \Lambda(h)$, devido ao seguinte argumento: como Λ é isolado, existem a, $b \in \Lambda$ tais que $z \in W^s(a) \cap W^u(b)$. Como Λ possui pontos periódicos densos, usando a continuidade dos pedaços compactos das variedades invariantes, existem pontos periódicos $p, q \in \Lambda$ (portanto $p, q \in P(\delta, h)$, via o lema 3.3.5) com $y \in W^s(p) \cap W^u(q)$, e y arbitrariamente próximo de z. Além disso, como p e q são homoclinicamente relacionados (pois pertencem a uma classe homoclínica), temos que arbitrariamente próximo de y existe um ponto homoclínico transversal associado a p, e pelo lema 3.2.15 tais pontos estão em $\Sigma(\delta, h)$. Isto prova que z é acumulado por pontos em $\Sigma(\delta, h)$, portanto $z \in \Sigma(\delta, h)$. Como as peças da decomposição espectral de $\Sigma(\delta, h)$ são isoladas e $z \in W^s(\Lambda(h))$, concluímos que $z \in \Lambda(h)$.

Pela continuidade de Ψ, deveríamos ter $\Lambda(h) \subset U$, já que $h \in \mathcal{W}$. Esta contradição conclui a prova do Teorema de Araújo. $\square$

Capítulo 7

O Argumento de Potrie

Neste capítulo iremos expor de modo sucinto uma demonstração alternativa do Teorema de Araújo, devida a R. Potrie [32], que explora resultados recentes da Dinâmica Genérica. Exatamente por usar tais ferramentas, e por contar com alguns dos resultados dos capítulos anteriores, a prova é curta em relação àquela apresentada nos capítulos anteriores. Existe uma pequena diferença em relação ao Teorema de Araújo, uma vez que o resultado de Potrie garante apenas que a união das bacias de atração dos atratores hiperbólicos forma um subconjunto aberto e denso da superfície. De modo preciso, o resultado cuja prova iremos expor aqui é o seguinte

Teorema 7.0.6. *Existe um residual $\mathcal{P} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{P}$ possui um número finito de poços então f possui um número finito de atratores hiperbólicos cuja união das bacias de atração forma um subconjunto aberto e denso de M.*

O capítulo está dividido da seguinte forma: na primeira seção apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares que serão usados, e na seção seguinte provamos o teorema.

Muitos resultados dos capítulos anteriores serão utilizados, inclusive a decomposição dominada de $\Sigma(\delta, f) - S(f)$. O objetivo é combinar as técnicas clássicas de Mañé com resultados recentes de dinâmica genérica que irão fazer um papel semelhante ao de resultados cruciais na prova de Araújo, como o teorema de Pujals-Sambarino e o C^2-Conneting Lemma de Mañé, só que de um modo bem mais direto. Ao longo do capítulo iremos explicar um pouco estas diferenças.

7.1 Preliminares

Por uma questão didática vamos dividir esta parte em subseções, cada uma dedicada a um conceito específico. Partimos das classes homoclínicas e das medidas hiperbólicas, as quais já apresentamos, e tentamos ir apresentando os demais conceitos em ordem crescente de dificuldade. Para que o leitor possa acompanhar melhor, sugerimos que leia cada subseção isoladamente e procure apenas extrair o significado dos conceitos e resultados introduzidos. Quando apresentarmos o argumento de Potrie, iremos juntar as peças construidas aqui e montar o quebra-cabeças.

Classes Homoclínicas e Medidas Hiperbólicas

Assim como na prova de Araújo, as classes homoclínicas de pontos periódicos $P(\delta, f)$ desempenham um papel central no argumento de Potrie.

O resultado principal desta subseção, devido a S. Crovisier em [11], investiga a possibilidade de se sombrear pontos genéricos no suporte de uma medida hiperbólica por pontos periódicos. Ele é análogo ao teorema de Katok que apresentamos no capítulo 03. A diferença é que ele funciona no caso C^1, mas exige que o suporte da medida admita uma decomposição dominada. Por simplicidade, vamos enunciá-lo apenas no caso particular de superfícies e de um modo conveniente aos nossos propósitos.

Teorema 7.1.1. *Seja μ uma medida ergódica hiperbólica para $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ cujo suporte admite uma decomposição dominada. Então, existe uma classe homoclínica $H(p)$ tal que todo ponto genérico em $\mathrm{supp}(\mu)$ pode ser sombreado por órbitas periódicas em $H(p)$. Em particular, $\mathrm{supp}(\mu) \subset H(p)$.*

Intuitivamente, o teorema acima diz que quando uma medida hiperbólica admite uma decomposição dominada em seu suporte, podemos supor que todo ponto genérico no seu suporte é um ponto periódico que pertence a uma **mesma** classe homoclínica $H(p)$.

Conjuntos Lyapunov Estáveis

Um compacto invariante e transitivo $\Lambda \subset M$ é dito *Lyapunov estável* se, para toda vizinhança U de Λ existe uma outra vizinhança de Λ, $V \subset U$, tal que $f^n(V) \subset U$, para todo $n \geq 0$. Observe que todo atrator é um conjunto Lyapunov estável. Na presença de hiperbolicidade, todo conjunto Lyapunov estável é um atrator, conforme o seguinte lema.

Lema 7.1.2. *Seja Λ um conjunto Lyapunov estável. Se Λ é hiperbólico então Λ é um atrator.*

Demonstração. Tome $p \in \Lambda$ arbitrário e vamos provar que $W^u(p) \subset \Lambda$. Se isto não ocorre, então existe um ponto $x \in W^u(p)$ fora de Λ. Podemos tomar uma vizinhança U de Λ tal que $x \notin U$. Como Λ é Lyapunov estável, existe uma vizinhança $V \subset U$, tal que $f^n(V) \subset U$. Por outro lado, existe um $n > 0$ tal que $y = f^{-n}(x) \in V$, uma vez que $x \in W^u(p)$. Como $f^n(y) = x \notin U$, obtemos uma contradição. Pela proposição 3.5.3 o resultado segue. □

Uma outra propriedade de conjuntos Lyapunov estáveis que iremos usar é um resultado semelhante a um lado da proposição 3.5.9.

Lema 7.1.3. *Se Λ é um conjunto Lyapunov estável e Γ é um conjunto transitivo que intersecta Λ então $\Gamma \subset \Lambda$.*

Demonstração. De fato, se existisse um ponto $x \in \Gamma$, fora de Λ, poderíamos tomar uma bola $B(x, r)$ disjunta de uma vizinhança U de Λ. Como Λ é Lyapunov estável, existe uma vizinhança $V \subset U$ tal que se $y \in V$ então a órbita positiva de y está inteiramente contida em U. Por outro lado, como Γ é transitivo, existe um ponto $a \in \Gamma \cap B(x, r)$, cuja órbita positiva se aproxima de Λ (pois $\Lambda \cap \Gamma \neq \emptyset$), em particular atinge V, e depois retorna a intersectar $B(x, r)$. Absurdo. □

Moralmente, os conjuntos Lyapunov estáveis possuem um papel semelhante ao conjunto $\Sigma(\delta, f)$, já que quando eles são hiperbólicos, são atratores, e $\Sigma(\delta, f)$ era o conjunto "maior"que enxergava os atratores hiperbólicos. Só que nesse caso, esta é uma ferramenta mais direta para obter a **existência** dos atratores hiperbólicos, uma vez que basta provar hiperbolicidade. Na prova de Araújo, isto foi feito indiretamente, pois após obter a hiperbolicidade de $\Sigma(\delta, f)$ foi preciso usar o C^2-Conneting Lemma para garantir que as bacias de atração dos atratores cobrem um conjunto de medida total.

A diferença principal no argumento de Potrie, é que temos uma fonte de conjuntos Lyapunov estáveis com boas propriedades para se obter dominação, dada por um dos resultados genéricos que veremos mais a frente.

Classes de Recorrência por Cadeias

Vamos definir uma relação de equivalência em M a partir da possibilidade de se ligar dois pontos por pseudo-órbitas. Dados x, $y \in M$, dizemos que $x \to y$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma ϵ-pseudo-órbita ligando x a y, i.e. uma sequência $x_0 = x$, x_1,...,$x_n = y$ tal que

$$d(f(x_j), x_{j+1}) < \epsilon \text{ para todo } j = 1, ..., n.$$

Dizemos que $x \leftrightarrow y$ se $x \to y$ e $y \to x$. É imediato que isto define uma relação de equivalência em M. A cada classe de equivalência por esta relação damos o nome de *classe de recorrência por cadeias*. Observe que todo compacto invariante transitivo está contido numa classe de recorrência por cadeias. Em particular, toda classe homoclínica está contida numa classe de recorrência por cadeias.

Iremos estudar um tipo especial de classe de recorrência por cadeias. Dizemos que uma classe de recorrência por cadeias Λ é um *quase atrator* se existe uma sequência U_n de vizinhanças encaixadas de Λ, i.e. $U_{n+1} \subset U_n$, tais que $\cap_n U_n = \Lambda$ e $f(\overline{U_n}) \subset U_n$. Quase atratores suportam medidas ergódicas segundo as quais, em média, f contrai volume.

Lema 7.1.4. *Seja Λ um quase atrator. Então existe uma medida ergódica μ suportada em Λ tal que*

$$\int \log|\det df| d\mu \leq 0.$$

Demonstração. Considere m_n a medida de Lebesgue normalizada em U_n e seja μ_n um ponto de acumulação das medidas $\nu_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_*^j(m_n)$, onde f_*^j é o operador de *push-foward*. Pelo mesmo argumento que usamos na prova da proposição 2.2.4, temos que μ_n é uma medida invariante suportada em $f(\overline{U_n})$. Como $f(\overline{U_n}) \subset U_n$, usando a fórmula da mudança de variáveis temos que

$$1 > m_n\left(f(U_n)\right) = \int |\det df| dm_n,$$

e tomando logarítimos e aplicando a Desigualdade de Jensen segue que

$$0 > \log\left(\int |\det df| dm_n\right) \geq \int \log|\det df| dm_n.$$

Similarmente, como $f^k(\overline{U_n}) \subset f^{k-1}(U_n)$, obtemos que

$$\int \log|\det df| df_*^k m_n < 0.$$

Por linearidade, isto implica que

$$\int \log|\det df| d\nu_k < 0,$$

e como podemos assumir que $\nu_k \to \mu_n$ na topologia fraca*, concluímos que

$$\int \log|\det df| d\mu_n \leq 0.$$

Agora, considere uma medida μ que é um ponto de acumulação das medidas μ_n. Então, pelo que vimos acima, $\int \log|\det df| d\mu \leq 0$. Como cada μ_n é uma medida invariante, e como o operador de *push-foward* é contínuo, temos que $f_*\mu = \lim f_*\mu_n = \lim \mu_n = \mu$, e portanto μ é uma medida invariante. Além disso, como $\cap_n U_n = \Lambda$, temos que μ está suportada em Λ. Finalmente, pelo Teorema de Decomposição Ergódica podemos supor que μ é ergódica. Isto conclui a prova. □

No caso de $\Sigma(\delta, f)$ as medidas do lema acima eram fornecidas de graça, pela definição. Esse é um dos pontos que torna o argumento de Potrie mais direto, pois o conjunto no qual obtemos a medida μ é um quase atrator, em particular é uma classe de recorrêcnia por cadeias e, como veremos, genericamente, tais conjuntos possuem outras propriedades interessantes.

Resultados Genéricos

Concluíremos estes preliminares enunciando resultados recentes da Teoria de Dinâmica Genérica que relacionam os conceitos que apresentamos acima. O primeiro deles diz que para um subconjunto denso de pontos na suerfície, o as órbitas "morrem"num conjunto Lyapunov estável que é um quase atrator.

Teorema 7.1.5 (Corolário 1.8 de [6]). *Existe um residual $\mathcal{R}_Q \subset \text{Diff}^1(M)$ tal que para todo $f \in \mathcal{R}_Q$ existe um residual $R_f \subset M$ de modo que se $x \in R_f$ então $\omega(x)$ é um quase atrator Lyapunov estável.*

O resultado acima é muito importante, pois fornece informação sobre o comportamento assintótico de *muitas* órbitas em M (no sentido topológico). Combinando-o com outros resultados genéricos, é possível caracterizar o ω-limite da maioria dos pontos da superfície. Seu papel no argumento de Potrie é análogo ao papel do C^2-*connecting lemma* na prova de Araújo: garantir que a união das bacias de atração dos atratores hiperbólicos é densa. Aqui, isto é feito de modo direto, basta provar que os quase atratores fornecidos pelo teorema 7.1.5 são de fato atratores hiperbólicos. Na prova de Araújo, isto foi conseguido indiretamente, usando o *connecting lemma*.

Nesse caso, tendo em vista o lema 7.1.2, é suficiente obter hiperbolicidade. Daí, uma pergunta natural é se existe um teorema como o Teorema de Pujals-Sambarino no caso genérico, que reduz obter hiperbolicidade a obter dominação. A resposta é sim, e é dada pelo seguinte resultado

Teorema 7.1.6 (Teorema 2 em [1]). *Existe um residual $\mathcal{R}_H \subset \text{Diff}^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}_H$ e Λ é uma classe de recorrência por cadeias que admite uma decomposição dominada então Λ é um conjunto hiperbólico.*

Nesse ponto está claro qual a estratégia do argumento de Potrie: mostrar que os quase atratores Lyapunov estáveis do teorema 7.1.5 são classes de recorrência por cadeias que admitem uma decomposição dominada. Como vimos no capítulo 04, é mais fácil obter dominação em conjuntos com pontos periódicos densos, como por exemplo, classes homoclínicas. Daí, uma pergunta natural é quando uma classe de recorrência por cadeias que contém um ponto periódico coincide com a classe homoclínica este ponto periódico. Isto vale genericamente, conforme o seguinte resultado

Teorema 7.1.7 (Observação 1.10 de [6]). *Existe um residual $\mathcal{R}_C \subset \text{Diff}^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}_C$, então toda classe de recorrência por cadeias de f, que contém um ponto periódico, coincide com a classe homoclínica deste ponto.*

Para uma discussão detalhada e uma prova dos resultados acima, exceto o teorema 7.1.6, sugerimos ao leitor consultar [29].

7.2 Prova do teorema 7.0.6

Considere $P : \text{Diff}^1(M) \to \mathcal{C}_M$ a função que a cada $f \in \text{Diff}^1(M)$ associa $P(f) = \overline{S(f)}$ e que estudamos no capítulo anterior. Como vimos, pelo lema 6.1.8 e pelo lema de Semi-continuidade, existe um residual $\mathcal{R}_P$ tal que todo $f \in \mathcal{R}_P$ é um ponto de continuidade da função P.

Além disso, o lema 6.2.2 diz que se $f \in \mathcal{R}_P$ possui um número finito de poços, então $f \in P(M)$ e o teorema 4.3.3 nos garante que f possui um número finito de atratores hiperbólicos. Portanto, para provarmos o teorema 7.0.6 resta apenas concluir que a união das bacias de atração dos atratores hiperbólicos de f formam um aberto e denso em M. É nesse ponto que vamos usar os resultados genéricos da seção anterior.

Com efeito, considere o residual

$$\mathcal{P} := \mathcal{R}_P \cap \mathcal{R}_Q \cap \mathcal{R}_C \cap \mathcal{R}_H,$$

onde $\mathcal{R}_Q$, $\mathcal{R}_C$ e $\mathcal{R}_H$ são os residuais dados pelos teoremas 7.1.5, 7.1.7 e 7.1.6, respectivamente. Tomemos $f \in \mathcal{P}$ possuindo um número finito de poços.

Como $f \in \mathcal{R}_Q$, existe um residual $R_f \subset M$, portanto um conjunto denso, via o teorema de Baire, tal que se $x \in R_f$ então $\Lambda := \omega(x)$ é um quase-atrator Lyapunov estável.

Fixemos um ponto $x \in R_f$. Como $S(f)$ é finito podemos supor que x não é um poço. Além disso, podemos supor também que $\omega(x)$ não contém poços, pois se para todo $x \in R_f$, a órbita de x morre num poço, então temos que a união das bacias de atração dos poços de f é densa em M, e a demonstração acaba. Daí, pelo lema 7.1.4, existe uma medida ergódica μ, suportada em Λ e tal que

$$\int \log|\det df| d\mu \leq 0.$$

Em particular, $\mu \in M(\delta, f)$, para qualquer $\delta > 0$, e como $\text{supp}(\mu)$ não contém poços, temos que

$$\text{supp}(\mu) \subset \Sigma(\delta, f) - S(f),$$

com $\delta > 0$ pequeno, e portanto, pelos resultados do capítulo 04, obtemos que $\text{supp}(\mu)$ admite uma decomposição dominada $E \oplus F$ tal que F é expansor e E é não-uniformemente contrator. Além disso, temos que μ é hiperbólica, pelo lema 4.3.1. Fixemos um valor de $\delta > 0$ pequeno.

Usando o teorema 7.1.1, vemos que existe uma classe homoclínica $H(p)$ que contém $\text{supp}(\mu)$. Como $\text{supp}(\mu) \subset \Lambda$, isto implica que $\Lambda \cap H(p) \neq \emptyset$. Mas como Λ é um conjunto Lyapunov estável e $H(p)$ é transitivo, devemos ter $H(p) \subset \Lambda$. Mas então, Λ é uma classe de recorrência por cadeias que contém um ponto periódico. Como $f \in \mathcal{R}_C$, obtemos que $\Lambda = H(p)$.

Mais ainda, pelo mesmo teorema 7.1.1 todo ponto genérico em $\text{supp}(\mu)$ é sombreado por pontos periódicos homoclinicamente relacionados com p. Como $\mu \in M(\delta, f)$, se um ponto genérico em seu suporte é sombreado por um ponto periódico, esse ponto periódico pertence a $P(\delta, f)$. Portanto, existe

$$q \in H(p) \cap P(\delta, f).$$

Como q é homoclinicamente relacionado com p, $H(p) = H(q)$, aplicando os lemas 3.3.3 e 3.2.15 obtemos que $P(\delta, f)$ é denso em $H(p)$.

Por outro lado

$$P(\delta, f) \cap H(p) \subset \Sigma(\delta, f) - S(f),$$

logo $P(\delta, f) \cap H(p)$ admite uma decomposição dominada. Como esta decomposição dominada estende-se ao fecho, segue que $H(p)$ admite uma decomposição dominada.

Como $H(p)$ é uma classe de recorrência por cadeias, uma vez que $f \in \mathcal{R}_H$ obtemos que $H(p)$ é de fato um conjunto hiperbólico. Mas como também é Lyaponov estável, aplicando o lema 7.1.2 concluímos que

$$H(p) = \Lambda = \omega(x)$$

é um atrator hiperbólico. Como $x \in R_f - S(f)$ é arbitrário, e como $S(f)$ é finito, provamos que para um subconjunto denso de pontos $x \in M$, $\omega(x)$ é um atrator hiperbólico. Portanto, a união das bacias de atração dos atratores hiperbólicos de f é um conjunto aberto e denso em M. Como já sabemos que f possui um número finito de atratores hiperbólicos, conclcímos a prova do teorema 7.0.6. $\square$

Capítulo 8

A Conjectura da Estabilidade

No capítulo 03 comentamos brevemente sobre o problema de mostrar a hiperbolicidade dos sistemas cuja estrutura topológia de órbitas permance inalterada por perturbações suficientemente pequenas, problema que ficou conhecido como a conjectura da estabilidade.

Vamos colocá-lo em termos precisos. Dizemos que um difeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ é *estruralmente estável* quando existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{U}$, existe um homeomorfismo $h : M \to M$ que leva órbitas de f em órbitas de g, ou seja, tal que vale a equação de conjugação

$$h \circ f = g \circ h.$$

Um difeomorfismo f é dito *Axioma A*, se o conjunto não-errante $\Omega(f)$ é um conjunto hiperbólico e satisfaz $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.

No trabalho [25], Mañé provou a conjectura da estabilidade, mostrando que todo difeomorfismo estruturalmente estável é Axioma A (cf. Teorema A de [25]). As técnicas e idéias que ele usou nesse monumental trabalho, mostraram-se extremamente ricas e ainda hoje influenciam o entendimento dos sistemas não-hiperbólicos. Não é nosso objetivo expô-las neste capítulo. Contudo, no trabalho anterior [24], com seu *ergodic closing lemma*, Mañé mostrou um resultado parcial, ao qual daremos o nome de Teorema de Separação de Mañé, e a conjectura da estabilidade em superfícies. As técnicas ali desenvolvidas essencialmente foram as técnicas que utilizamos no capítulo 04 para obter dominação em $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ e provar a hiperbolicidade numa das direções.

Assim sendo, nosso objetivo neste capítulo é mostrar como tais métodos permitem obter resultados interessantes em superfícies, relacionados com a conjectura da estabilidade, e ainda mostrar o Teorema de Separação de Mañé, o qual vale em dimensão qualquer.

Salientamos, no entanto, que em quase todo o capítulo M é uma superfície. Sempre que este não for o caso, seremos explícitos.

8.1 A Propriedade Estrela

Quando um sistema é estruturalmente estável, todas as suas propriedades topológicas também valem num aberto que o contém. Naturalmente, podemos nos concentrar em uma propriedade topológica específica que valha numa vizinhança inteira de um sistema. Para nomear esse tipo de propriedade, introduzimos a seguinte terminologia: dizemos que $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ possui uma uma certa propreidade P *robustamente*, se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que se $g \in \mathcal{U}$ então g possui a propriedade P. Assim, por exemplo, um difeomorfismo é dito *robustamente transitivo* quando admite uma vizinhança $\mathcal{U}$ tal que se $g \in \mathcal{U}$ então g é transitivo.

É claro que um homeomorfismo não deve preservar propriedades da derivada de um difeomorfismo. No entanto, quando uma propriedade de um difeomorfismo vale robustamente, certos comportamentos da derivada podem ser proibidos, pois mediante perturbações pode ser possível violar a propriedade em questão. Por exemplo, é possível provar que um difeomorfismo estruturalmente estável não admite pontos periódicos não hiperbólicos.[1] Logo, todo difeomorfismo estruturalmente estável possui, robustamente, somente pontos periódicos hiperbólicos. Aos difeomorfismos com tal propriedade damos o nome de difeomorfismos *estrela*.

Naturalmente, pelo resultado acima mencionado, o estudo dos difeomorfismos estrela contém o estudo dos difeomorfismos estruturalmente estáveis. Nesta seção veremos algumas propriedades básicas de difeomorfismos estrela. A primeira delas é que um difeomorfismo estrela não pode ter pontos não-errantes que não são aproximados por órbitas periódicas. Sua prova repousa no fato de que a criação/destruição de uma órbita periódica para um difeomorfismo, mediante perturbações, necessariamente envolve o aparecimento de um ponto periódico não hiperbólico. Ele vale em dimensão qualquer, com a mesma prova.

Teorema 8.1.1. *Seja f um difeomorfismo estrela. Então $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.*

Demonstração. Suponha que exista $p \in \Omega(f) - \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Em particular, existe uma vizinhança U de p, tal que $\overline{U}$ é disjunto de $\mathrm{Per}(f)$. Tome $\mathcal{U}$ a vizinhança de f tal que se $g \in \mathcal{U}$ então todos os pontos periódicos de g são hiperbólicos, e considere $\mathcal{U}_0$ a componente conexa de $\mathcal{U}$ que contém f. Pelo *closing lemma* de Pugh, existe $g \in \mathcal{U}_0$ tal que g possui um ponto periódico $q \in U$.

Considere um caminho contínuo em $\mathcal{U}_0$, $t \mapsto f_t$, $t \in [0,1]$, tal que $f_0 = g$ e $f_1 = f$. Como q é hiperbólico, para cada $t \in (0,1)$ suficientemente pequeno, existe a continuação $q_t \in \mathrm{Per}(f_t) \cap U$, e note que todos os q_t possuem o mesmo período. Considere o conjunto $X \subset [0,1]$ tal que se $t \in X$ então existe $q_t \in \mathrm{Per}(f_t) \cap U$, com $\pi(q_t) = \pi(q)$. Observe $0 \in X$, e portanto X é não-vazio. Além disso, pela escolha de U, $1 \notin X$.

Tome $s = \sup X$, e observe que $0 < s < 1$, pois se $s = 1$, tomando uma sequência $s_n \to 1$ teríamos uma sequência q_n de pontos periódicos, de mesmo período, para f_{s_n},

[1] Ver [35] teorema 4.1, capítulo 10, ou [15]

e, a menos de passar a uma subsequência, teríamos que q_n convegiria a um ponto periódico para f em $\overline{U}$, absurdo.

Afirmamos que q_s é um ponto periódico não hiperbólico para f_s. Com efeito, se q_s fosse hiperbólico, pela continuação analítica existiria um $\epsilon > 0$ pequeno tal que para todo $t \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$ haveria um ponto $q_t \in \mathrm{Per}(f_t) \cap U$ com período $\pi(q)$, violando o fato de s ser o supremo do conjunto X. No entanto isto mostra $\mathcal{U}_0$ contém um ponto periódico não hiperbólico, absurdo. □

A segunda propriedade que veremos versa sobre uma condição suficiente para a propriedade estrela.

Proposição 8.1.2. *Todo difeomorfismo C^1-robustamente transitivo em superfícies é estrela.*

Demonstração. Primeiro observe que a presença de um poço (ou de uma fonte) implica na existência de pontos errantes, basta tomar qualquer ponto na bacia local (que não seja o poço/fonte). Por outro lado, a transitividade implica que todo ponto em M é não-errante. Daí, concluímos que um difeomorfismo transitivo não possui nem poços nem fontes.

Seja f um difeomorfismo qualquer e tome $\mathcal{U}$ uma vizinhança qualquer de f. Suponha que f possua um ponto periódico não-hiperbólico p, e seja $n = \pi(p)$. Como M é uma superfície temos apenas três possibilidades: ou $df^n(p)$ possui somente autovalores de módulo 1,[2] ou $df^n(p)$ possui um autvalor real de módulo 1, e um outro autovalor real de módulo menor do que 1, ou $df^n(p)$ possui um autovalor real de módulo 1, e um autovalor real de módulo maior do que 1. Nos dois primeiro casos, compondo $df(f^{n-1}(p))$ com um mapa da forma rId, com $r < 1$ mas perto de 1, e aplicando o lema de Franks no ponto $f^{n-1}(p)$ obtemos uma perturbação de f para a qual p é um poço. Similarmente, no terceiro caso, usando $r > 1$, criamos uma fonte para uma perturbação. Isto prova que f não pode ser robustamente transitivo.

Portanto, se f é robustamente transitivo, todos os seus pontos periódicos são hiperbólicos. Como todo difeomorfismo suficientemente próximo de f também é robustamente transitivo, concluímos que f é estrela. □

Uma das propriedades mais importantes dos difeomorfismos estrela é que eles admitem uma decomposição dominada em $\overline{\mathrm{Per}(f)}$. No capítulo 04, provamos que se $f \in P(M)$ e $\delta > 0$ é pequeno, então $\Sigma(\delta, f) - S(f)$ possui uma decomposição dominada, e para tanto usamos o lema de Franks para construir uma perturbação com um ponto periódico não-hiperbólico. Nesse ponto, tínhamos uma ferramenta importante que era o lema 4.1.5, o qual fornecia uma estimativa uniforme e exponencial com o período para as forças de contração e espanção das órbitas periódicas. Um olhar atento naquelas demonstrações mostra que, a menos do lema de Franks, essencialmente só aparecem argumentos de álgbra linear para produzir perturbações.

[2] O que pode ser um autovalor complexo de módulo 1, ou dois autovalores reais de módulo 1.

No estudo da propriedade estrela, em seu belo trabalho [24], Mañé foi muito além nessa observação e introduziu o importante conceito de sequências periódicas de isomorfismos lineares, que passaremos a estudar na próxima seção. Em seguida, veremos que usando este conceito, podemos provar que se f é estrela então $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ admite uma decomposição dominada.

8.2 Sequências Periódicas

Nesta seção M é uma variedade de dimensão qualquer.

Seja $GL(N)$ o grupo dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^N$. Se $\xi : \mathbb{Z} \to GL(N)$ é uma sequência de isomorfismos de $\mathbb{R}^N$, denote $E^s_j(\xi)$ e $E^u_j(\xi)$, respectivamente, os subespaços dos vetores $v \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$s_j(v) = \sup\left\{\left\|(\prod_{i=0}^{n} \xi_{j+i})v\right\| \mid n \geq 0\right\} < \infty$$

e

$$u_j(v) = \sup\left\{\left\|(\prod_{i=0}^{n} (\xi_{j-1-i})^{-1})v\right\| \mid n \geq 0\right\} < \infty.$$

Com isto podemos definir a noção de hiperbolicidade para sequências de isomorfismos.

Definição 8.2.1. *Dizemos que uma sequência ξ é hiperbólica se $E^s_j(\xi) \oplus E^u_j(\xi) = \mathbb{R}^N$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.*

Note que é equivalente exigir essa condição para apenas um $j \in \mathbb{Z}$, pois, como não é difícil ver, $v \in E^\sigma_j(\xi) \Leftrightarrow v \in E^\sigma_i(\xi)$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, onde $\sigma = s, u$, e portanto $E^s_j(\xi) \oplus E^u_j(\xi) = \mathbb{R}^N$ para algum $j \in \mathbb{Z}$ implica $E^s_i(\xi) \oplus E^u_i(\xi) = \mathbb{R}^N$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

De maior interesse no nosso estudo são as sequências periódicas de isomorfismos, que passamos a definir: ξ é dita *periódica* se $\exists n_0 \geq 1$ tal que $\xi_{j+n_0} = \xi_j$, para todo j.

Exemplo 8.2.2. *Considere a sequência dada por:*

$$\xi_{2n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \xi_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, na base canônica de $\mathbb{R}^2$. É fácil ver que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $s_0(v)$, $u_0(v) < \infty$, e portanto não temos $E^s_0(\xi) \oplus E^u_0(\xi) = \mathbb{R}^N$. Isso mostra que mesmo que todas as aplicações ξ_j sejam hiperbólicas, a sequência pode não ser hiperbólica. Por outro lado, uma sequência hiperbólica pode possuir termos não-hiperbólicos, como mostra o seguinte exemplo:

$$\xi_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \xi_{2n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

No caso periódico, a relação correta entre a hiperbolicidade de uma sequência e a hiperbolicidade dos seus termos é dada pelo seguinte lema.

Lema 8.2.3. *Uma sequência periódica de isomorfismos $\xi : \mathbb{Z} \to GL(N)$ é hiperbólica se, e só se, a aplicação linear $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ é hiperbólica, onde n_0 é o período da sequência.*

Demonstração. De fato, suponha que $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ é hiperbólica. Diremos que $v \in \mathbb{R}^N$ é um vetor estável (resp. instável) se pertence ao subespaço estável (resp. instável) de $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$, e denotaremos os subespaços de $\mathbb{R}^N$ formados por esses vetores, respectivamente, por $F^s(\xi)$ e $F^u(\xi)$.

Daí, por definição, se v é um vetor estável $\|(\prod_{i=0}^{k(n_0-1)} \xi_i)v\| \to 0$ quando $k \to +\infty$. Como a sequência é periódica, isso implica $s_0(v) < \infty$, donde $v \in E_0^s(\xi)$. Similarmente, se u é um vetor instável então $u \in E_0^u(\xi)$.

Por outro lado, como os vetores estáveis/instáveis decompoem $\mathbb{R}^N$ em soma direta, e como um vetor $v \in E_0^s(\xi)$ não pode ter componente em $F^u(\xi)$, temos que $E_0^S(\xi) \subset F^s(\xi)$. Portanto, $E_0^S(\xi) = F^s(\xi)$, e similarmente $E_0^u(\xi) = F^u(\xi)$, donde segue que ξ é uma sequência hiperbólica.

Reciprocamente, se o mapa $\prod_{j=0}^{n_0-1} \xi_j$ possui um autovalor de módulo 1 então um autovetor v associado cumpre $s_0(v)$, $u_0(v) < \infty$, por perio- dicidade. Portanto não temos $E_j^s(\xi) \oplus E_j^u(\xi) = \mathbb{R}^N$, e a sequência não é hiperbólica. □

O leitor que não teve contato com o trabalho de Mañé, [24], certamente está se perguntando o que isso tudo tem haver com a propriedade estrela, ou (pior ainda) com dinâmica! Acontece que temos uma maneira muito simples de gerar uma sequência periódica de isomorfismos, a partir de um sistema dinâmico, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 8.2.4. *Considere um difeomorfismo $f : M \to M$. Suponha que temos $p \in Per(f)$, hiperbólico, de período n. Adotando bases ortonormais em $T_{f^i(p)}M$, $1 \leq i \leq n$, podemos identificar $df(f^i(p)) : T_{f^i(p)}M \to T_{f^{i+1}(p)}M$ com isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^N$. Então, usando o lema 8.2.3 a sequência $\xi_j = df(f^j(p))$ é hiperbólica.*

Como a propriedade estrela envolve robustez na hiperbolicidade dos pontos periódicos, é razoável pensar que isso será traduzido como robustez na hiperbolicidade das *sequências*.

De modo a tornar isso rigoroso, considere agora uma família $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de sequências periódicas de isomorfismos lineares. Dizemos que ela é *hiperbólica* se toda sequência da família é uma sequência hiperbólica e

$$\sup\{\left\|\xi_n^{(\alpha)}\right\| \mid \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

Se $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ e $\{\eta^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ são famílias de sequências periódicas de isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^N$, definimos a distância entre elas por

$$d(\xi, \eta) = \sup\{\left\|\xi_n^{(\alpha)} - \eta_n^{(\alpha)}\right\| | \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dizemos que duas famílias são *periodicamente equivalentes*, se para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ o período mínimo de $\xi^{(\alpha)}$ e $\eta^{(\alpha)}$ coincide.

Dizemos que uma família hiperbólica de sequências periódicas $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ é *uniformemente hiperbólica* se existe $\varepsilon > 0$ tal que toda família η periodicamente equivalente e suficientemente próxima, isto é, $d(\xi, \eta) \leq \varepsilon$, também é hiperbólica.

O leitor atento já deve suspeitar que a propriedade estrela é uma fonte de famílias uniformemente hiperbólicas de sequências periódicas: basta definir cada sequência como no exemplo 8.2.4 acima. Ou seja, a família é formada pelos campos estrela e cada uma de suas órbitas periódicas, e as respectivas sequências são definidas como no exemplo 8.2.4. E a grande utilidade disto está no seguinte teorema.

Teorema 8.2.5 (Lema II.3 [24]). *Se $\{\xi^{(\alpha)} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ é uma família uniformemente hiperbólica de sequências periódicas de isomorfismos de $\mathbb{R}^N$, então esxistem constantes $K > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

a) Se $\alpha \in \mathcal{A}$ e $\xi^{(\alpha)}$ possui período minimal $n \geq m$, então

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{mj+i}\right)|_{E^s_{mj}(\xi^{(\alpha)})} \right\| \leq K\lambda^k$$

e

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{mj+i}\right)^{-1}|_{E^u_{m(j+1)}(\xi^{(\alpha)})} \right\| \leq K\lambda^k,$$

onde $k = [n/m]$.

b) Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\left\| \prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{j+1}|_{E^s_j(\xi^{(\alpha)})} \right\| \cdot \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{j+i} \right)^{-1} |_{E^u_{j+m}(\xi^{(\alpha)})} \right\| \leq \lambda$$

c) Para todo $\alpha \in \mathcal{A}$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{mj+i} \right) |_{E^s_{mj}} \left(\xi^{(\alpha)}\right) \right\| < 0$$

e

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi^{(\alpha)}_{mj+i} \right)^{-1} |_{E^u_{m(j+1)}} \left(\xi^{(\alpha)}\right) \right\| < 0.$$

Lembre que, dada uma sequência periódica e hiperbólica de isomorfismos, temos contração e expansão em direções complementares. No caso de uma família hiperbólica de sequências periódicas, as taxas de contração e expansão de cada sequência da família não têm porque serem as mesmas. O que o ítem 1 do Teorema 8.2.5 diz é que, se a família for *uniformemente hiperbólica*, então (ao menos para sequências com período suficientemente grande) as taxas de contração e expansão são uniformes. Já o ítem 2, diz que as sequências da família gozam de uma propriedade do tipo dominação, mas (e isto é fundamental nas aplicações) com uma constante de dominação λ uniforme. O ítem 3 diz que assintoticamente em média, todas as sequências tem contração/expansão *exponencial*.

O teorema 8.2.5 segue das versões para dimensão mais alta dos argumentos perturbativos que apresentamos no capítulo 04 para obter dominação.

Aplicação

Vamos usar o teorema 8.2.5 para mostrar que todo difemorfismo estrela admite uma decomposição dominada. Com efeito, seja $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ estrela. Então, para cada $p \in \mathrm{Per}(f)$, como no exemplo 8.2.4, a sequência $\xi_j = df(f^j(p))$ é periódica e hiperbólica. Mais ainda, seja $\mathcal{U}$ a vizinhança de f na qual todos os pontos periódicos são hiperbólicos. Considere ϵ e $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ do lema de Franks aplicado a f e $\mathcal{U}$. Podemos definir uma família de sequências periódicas pondo

$$\mathcal{A} = \{\alpha = (g, p);\ g \in \mathcal{U}_0,\ \text{e}\ p \in \mathrm{Per}(g)\},$$

e

$$\xi_j^\alpha = dg(g^j(p)).$$

Esta família é uniformemente hiperbólica, pois, caso contrário, existiria uma família η^α, ϵ-próxima de ξ e periodicamente equivalente, mas possuindo uma sequência η^α, não hiperbólica. Suponhamos que $\alpha = (g, p)$, com $g \in \mathcal{U}_0$. Então, temos que

$$\left\| \eta_j^\alpha - dg(g^j(p)) \right\| < \epsilon,$$

para todo $0 \le j \le \pi(p) - 1$. Pelo lema de Franks, existe $\overline{g} \in \mathcal{U}$, tal que $\overline{g} = g$ ao longo da g-órbita de p e

$$d\overline{g}(g^j(p)) = \eta_j^\alpha.$$

Logo,

$$d\overline{g}^{\pi(p)}(p) = \prod_{j=0}^{\pi(p)-1} \eta_j^\alpha,$$

e portanto p é um ponto periódico não hiperbólico para $\overline{g}$, contradizendo a definição de $\mathcal{U}$. Aplicando o teorema 8.2.5 neste caso particular, obtemos o seguinte resultado

Teorema 8.2.6 (Proposição II.1 de [24]). *Se $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ é um difeomorfismo estrela então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_0$ de f e constantes $K > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

a) Se $g \in \mathcal{U}_0$ e $p \in \mathrm{Per}(g)$ cumpre $\pi(p) \ge m$ então

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| dg^m(g^{mj}(p))|_{E^s} \right\| \le K\lambda^k$$

e

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| dg^{-m}(g^{-mj}(p))|_{E^u} \right\| \leq K\lambda^k,$$

onde $k = [\pi(p)/m]$.

b) *Para todo* $0 < j < d$, *onde* $d = \dim M$ *existe uma decomposição contínua* $E \oplus F$ *do fibrado tangente sobre* $\overline{\mathrm{Per}_j(f)}$ *tal que*[3]

$$\left\| df^m(x)|_E \right\| . \left\| df^{-m}(f^m(x))|_F \right\| \leq \lambda,$$

para todo $x \in \overline{\mathrm{Per}_j(f)}$. *Além disso,* $E_p = E_p^s$ *e* $F_p = E_p^u$ *sempre que* $p \in \mathrm{Per}_j(f)$.

c) *Para todo* $p \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| df^m(f^m j(p))|_{E^s} \right\| < 0$$

e

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| df^{-m}(f^{-mj}(p))|_{E^u} \right\| < 0$$

O ítem b) do teorema acima é o análogo do lema 4.1.5 para dimensão qualquer, pois ele fornece uma cota inferior para as forças de contração e de expanção da derivada num ponto periódico. Em dimensão 2, um resultado desse tipo é mais fácil de se obter pois a norma da derivada no subespaço estável coincide com o módulo do autovalor[4] O ítem c) diz que $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ é não-uniformemente hiperbólico, ou seja que para todo ponto em $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ apresenta contração e expansão em média, para toda corda suficientemente grande. O ítem b) garante que $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ admite uma decomposição dominada, via o lema 4.0.13.

8.3 Hiperbolicidade e Estabilidade

Agora vamos estudar as relações entre hiperbolicidade e propriedades robustas, e um caso particular da conjectura da estabilidade.

Começamos mostrando que a hiperbolicidade implica em estbilidade, se a superfície inteira for um conjunto hiperbólico. Os difeomorfismos que satisfazem esta condição são chamados *difemorfismos de Anosov*. Neste caso, o *shadowing lemma* desempenha um papel fundamental, como veremos na prova. Neste resultado, a hipótese de M ser uma superfície não é necessária.

[3] $\mathrm{Per}_j(f)$ é, por definição, o conjunto dos pontos periódicos de f cuja variedade estável possui dimensão j.

[4] A menos, é claro, do caso de poços e fontes.

Teorema 8.3.1. *Seja f um difemorfismo de Anosov. Então f é estruturalmente estável.*

Demonstração. Considere $\epsilon > 0$ dado pelo teorema da variedade estável. Então, dados $x,\ y \in M$, se $d(f^n(x), f^n(y) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que $y \in W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x)$, mas como $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(x)$ são discos mergulhados, tangentes aos subespaços estável e instável em x da decomposição hiperbólica de f, respectivamente, reduzindo ϵ se necessário, temos que $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x) = \{x\}$. Daí, devemos ter $x = y$.[5]

Tome $\beta < \frac{\epsilon}{4}$, e considere $\delta > 0$ dado pelo *shadowing lemma*. Considere $\mathcal{U}$ uma vizinhança de f tal que se $g \in \mathcal{U}$ então $d\,(f(x), g(x)) < \delta$, para todo $x \in M$. Fixemos um ponto $x \in M$ e um difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$ arbitrários. Pela escolha de $\mathcal{U}$ temos que

$$d\left(f(g^j(x)), g^{j+1}(x)\right) < \delta,$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo, a sequência $\{g^j(x)\}$ é uma δ-pesudo-órbita para f. Como M é obviamente um conjunto hiperbólico isolado para f, pelo *shadowing lemma* existe um único ponto $y = h(x) \in M$ tal que

$$d\left(f^j(x), g^j(y)\right) < \beta, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Isto define uma aplicação $h : M \to M$.

Vamos provar que h é contínua. Tome um ponto $x \in M$ e uma sequência de pontos $x_n \in M$ convergindo para x. Observe que para provar que $h(x_n) \to h(x)$ é suficiente provar que toda subsequência $h(x_{n_k})$ possui uma subsequência $h(x_{n_{k_i}})$ convergindo para $h(x)$, pois se $h(x_n)$ não converge para $h(x)$ obtemos uma subsequência $h(x_{n_k})$ que não tem esta propriedade. Para tanto, dada qualquer subsequência $h(x_{n_k})$, como M é compacta, obtemos uma subsequência $y_i := h(x_{n_{k_i}})$ que converge a um ponto $z \in M$. Por simplicidade também denotaremos $x_i := x_{n_{k_i}}$ e $y = h(x)$. Fixemos $j \in \mathbb{Z}$. Por continuidade, tomando i suficientemente grande temos que

$$d\left(f^j(y_i), f^j(z)\right) < \beta \text{ e } d\left(g^j(x_i), g^j(x)\right) < \beta.$$

Daí, usando a desigualdade triangular e a definição de h temos,

$$\begin{aligned} d\left(f^j(y), f^j(z)\right) &\leq d\left(f^j(y), g^j(x)\right) + d\left(g^j(x), g^j(x_i)\right) + d\left(g^j(x_i), f^j(y_i)\right) + d\left(f^j(y_i), f^j(z)\right) \\ &< 4\beta < \epsilon, \end{aligned}$$

pois como $h(x) = y$ e $h(x_i) = y_i$. Segue $h(x) = y = z$, e portanto $h(x_n) \to h(x)$.

Finalmente, observe que se $y = h(f(x))$ então, por definição,

$$d\left(f^j(f(x)), g^j(g(y))\right) = d\left(f^{j+1}(x), g^{j+1}(y)\right) < \beta,$$

e pela unicidade $h(f(x))$ devemos ter

$$g(h(x)) = g(y) = h(f(x)).$$

[5]Quando um homeomorfismo $h : X \to X$, num espaço métrico X, possui esta propriedade, de que quaisquer duas órbitas suficientemente próximas devem ser iguais, dizemos que ele é *expansivo*. O mesmo argumento prova que se Λ é um conjunto hiperbólico então $f|_\Lambda$ é expansivo.

Isto prova que $h : M \to M$ é contínua e que $g \circ h = h \circ f$. Trocando os papéis de g e f no argumento, uma vez que, pela robustez de conjuntos hiperbólicos g também é Anosov, vemos que h é um homeomorfismo. Isto completa a prova. □

A versão mais geral do teorema anterior é a Estabilidade de Conjuntos Hiperbólicos, que enunciamos sem prova no capítulo 03. Com uma adaptação fácil do argumento acima, pode-se provar a Estabilidade de Conjuntos Hiperbólicos Isolados, e o leitor encontrará tal demonstração na página 33 de [28].

Os dois resultados que iremos provar a seguir são, de certa forma, casos particulares mais simples da conjectura da estabilidade. Embora o primeiro deles seja um corolário do segundo, iremos expor o primeiro com a demonstração completa, pois ela é mais simples nesse caso, e com pequenas adaptações iremos obter um resultado que vale em dimensão qualquer.

Teorema 8.3.2. *Todo difemorfismo C^1-robustamente transitivo em supefícies é Anosov.*

Demonstração. Seja $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ tal que numa vizinhança $\mathcal{U}$ de f todo difeomorfismo é transitivo. Como f é transitivo, todo ponto é não errante, e pela proposição 8.1.2 temos que f é estrela, e portanto, tendo em vista o teorema 8.1.1, temos que $M = \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Logo, para provar que f é Anosov, é suficiente provar que $\Lambda := \overline{\mathrm{Per}(f)}$ é um conjunto hiperbólico.

Por outro lado, também sabemos que nenhum difeomorfismo na vizinhança $\mathcal{U}$ possui nem poços nem fontes.

Pelo teorema 8.2.6 exsite uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$. Suponhamos que a direção E não seja contratora. Aplicando o teorema 3.2.4 obtemos um ponto genérico x no suporte de uma medida ergódica tal que para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que se $n \geq N$ então

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left\| df(f^j(x))|_E \right\| \geq e^{-n\epsilon},$$

e como E é unidimensional, temos que

$$\left\| df^n(x)|_E \right\| \geq e^{-n\epsilon}.$$

Aplicando o *ergodic closing lemma*, e usando o lema de Franks como fizemos na prova do teorema 4.2.6, obtemos uma pequena perturbação $g \in \mathcal{U}$ de f possuindo um ponto periódico p, de período $n \geq N$, e de forma que

$$\begin{aligned} ||dg(g^j(p))|_{E^s}|| &= ||df(f^j(x))|_E|| \\ ||dg(g^j(p))|_{E^u}|| &= ||df(f^j(x))|_F||, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, ..., n-1$. Com isto, temos que

$$\left\| dg^n(p)|_{E^s} \right\| \geq e^{-n\epsilon}. \tag{8.1}$$

Como $E \oplus F$ é uma decomposição dominada, pelas igualdades acima, $E^s \oplus E^u$ é uma decomposição dominada para g ao longo da órbita de p. Sejam $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ as constantes da decomposição dominada $E \oplus F$. Podemos supor que n é grande o bastante para que

$$C\,(e^{\epsilon}\lambda)^n < 1.$$

Então

$$\left\| dg^{-n}(p)|_{E^u} \right\| \leq C\lambda^n e^{n\epsilon} < 1. \tag{8.2}$$

A desigualdade 8.2 mostra que $dg^n(p)$ expande na direção E^u, e como p não pode ser uma fonte, temos por 8.1 que $dg^n(p)$ apresenta uma contração fraca na direção E^s. Desse modo, existe um número $r < 1$, perto de 1, tal que compondo $dg(g^{n-1}(p))$ com um mapa da forma rId, obtemos que $rdg^n(p)$ ainda apresente uma expanção na direção E^u, mas agora apresente expanção também na direção E^s.[6] Aplicando o lema de Franks, obtemos um difeomorfismo $\overline{g}$ perto de f que possui uma fonte, o que, como vimos, é uma contradição. Para provar que F é expansor, procedemos de modo análogo, concluindo que a perturbação criada possui um poço. A prova está terminada. □

Por fim, iremos apresentar o teorema de separação de Mañé. O enunciado do teorema a seguir é um pouco mais fraco do que o Teorema B de [24], pois somente consideramos a parte que se encaixa na linha de idéias que estamos seguindo, a qual é, resumidamente, usar o *ergodic closing lemma* para violar propriedades robustas quando não há hiperbolicidade. Iremos comentar o enunciado geral no fim do capítulo. Salientamos que a hipótese de M ser uma superfície não é necessária.

Teorema 8.3.3. *Se $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ é um difemorfismo estrela que não possui poços nem fontes e $\overline{\mathrm{Per}_j(f)} \cap \overline{\mathrm{Per}_i(f)} = \emptyset$ para todo $0 < i < j < d$, onde $d = \dim M$, então f é Axioma A.*

Demonstração. Pelo teorema 8.1.1 é suficiente provar que $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ é hiperbólico. Como temos a hipótese de separação, basta provar que $\overline{\mathrm{Per}_j(f)}$ é hiperbólico, para cada $j = 1, ..., d-1$. O primeiro passo é garantir que ao fazermos uma perturbação local numa órbita periódica de índice j, os conjuntos $\overline{\mathrm{Per}_i(f)}$, com $i \neq j$ permaneçam inalterados.

De modo preciso, afirmamos que se U é uma vizinhança de $\overline{\mathrm{Per}_j(f)}$, tal que U é disjunta de $\overline{\mathrm{Per}_i(f)}$ para todo $i \neq j$. Se $\mathcal{U}$ é uma vizinhança conexa de f e temos $g \in \mathcal{U}$, $g = f$ em $M - U$ então $\overline{\mathrm{Per}_i(g)} = \overline{\mathrm{Per}_i(f)}$, para todo $i \neq j$. Com efeito, se isto não é verdade então exsite um ponto periódico p de g em $U - \overline{\mathrm{Per}_j(f)}$, e podemos tomar uma vizinhança de p na qual não há nenhum ponto periódico de f, uma vez que U é disjunta de $\overline{\mathrm{Per}_i(f)}$ para todo $i \neq j$. Logo, ligando g e f por um caminho contínuo contido em $\mathcal{U}$, temos a destruição de um ponto periódico, o que, como vimos na prova do teorema 8.1.1, implica na existência de um ponto periódico não hiperbólico, e isto viola a propriedade estrela.

Suponhamos então que se $\Lambda := \overline{\mathrm{Per}_j(f)}$ e $E \oplus F$ é a decomposição dominada sobre $T_\Lambda M$, dada pelo item b) do teorema 8.2.6, temos que E não é contrator, para algum j.

[6] Este argumento é muito parecido com aquele que apresentamos na prova do lema 4.1.4.

Considere $m > 0$ dado pelo teorema 8.2.6. Como Λ não é hiperbólico para f, não é hiperbólico para f^m, daí, por simplicidade iremos supor que $m = 1$. Com isto, temos que se g está suficientemente próximo de f, e $p \in \mathrm{Per}(g)$ então

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\| dg(g^i(p))|_{E^s} \right\| \leq K\lambda^k$$

e

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\| dg^{-1}(g^{-i}(p))|_{E^u} \right\| \leq K\lambda^k,$$

onde $k = \pi(p)$ Por outro lado, como Λ não é hiperbólico, aplicando o teorema 3.2.4, e usando o *ergodic closing lemma* em conjunto com o lema de Franks, como antes, tendo em vista a afirmação acima, por simplicidade iremos assumir[7] que existe um ponto periódico $x \in \Lambda$, com período k arbitrariamente grande, tal que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\| df(f^i(p))|_E \right\| \geq e^{-k\epsilon}, \tag{8.3}$$

com $\epsilon > 0$ podendo ser escolhido arbitrariamente pequeno. Usando a dominação, temos que

$$\begin{aligned} \left\| df^{-k}(p)|_F \right\| &\leq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\left\| df^{-1}(f^{-i}(p))|_F \right\| . \left\| df(f^i(p))|_E \right\|}{\left\| df(f^i(p))|_E \right\|} \\ &\leq C\lambda^k e^{k\epsilon} < 1, \end{aligned}$$

desde que ϵ seja pequeno o bastante para que $\lambda e^{\epsilon} < 1$ e k seja suficientemente grande. Esta estimativa mostra que F é o subespaço instável de $df^k(p)$. Como o índice de p é j, isto implica que E é o subespaço estável de $df^k(p)$.[8] No entanto, tomando k suficientemente grande, e ϵ suficientemente pequeno temos que

$$e^{-\epsilon} > K^{\frac{1}{k}}\lambda,$$

o que, pela desigualdade 8.3 nos leva a uma contradição com o ítem a) do teorema 8.2.6. Novamente, podemos repetir o argumento com f^{-1} no lugar e provar que F é expansor. Acabou. □

Comentários finais

Topologias Mais Altas

Em toda a discussão que fizemos, sempre estivemos restritos a topologia C^1. O fato de não sabermos resultados como o *ergodic closing lemma* e o lema de Franks em topologias

[7] No momento em que tal suposição for demasiado restritiva, iremos apresentar as devidas explicações

[8] Como o difeomorfismo ao qual, por simplicidade, chamamos de f é na verdade uma perturbação de f, e os subespaços E e F formam uma decomposição dominada para esta perturbação apenas *na órbita* de p, não podemos concluir diretamente do teorema 8.2.6 que $E = E^s$ e $F = E^u$.

mais altas faz com que o conhecimento sobre a conjectura da estabilidade em topologias mais altas ainda seja muito pobre. De fato, todos os resultados deste capítulo estão em aberto em topologias mais altas.

O Enunciado Completo do Teorema de Separação de Mañé

O Teorema de Separação foi apresentado por Mañé em [24] com o seguinte enunciado

Teorema 8.3.4. *Um difeomorfismo f é Axioma A sem cilos se, e somente se, é estrela e $\overline{\mathrm{Per}_j(f)} \cap \overline{\mathrm{Per}_i(f)} = \emptyset$, para todo $i \neq j$.*

Para a definição de um difeomorfismo Axioma A sem ciclos, remetemos o leitor a [28], página 44. A parte "somente se"do enunciado segue do Teorema da Decomposição Espectral, ver [28], página 38. A parte "se"segue do teorema que apresentamos na seção anterior e de um resultado devido a Pliss [30] o qual afirma que se f é estrela então f possui um número finito de poços e fontes.

O próprio Mañé acreditava que a propriedade estrela, sozinha, já era suficiente para garantir a conclusão de seu Teorema de Separação. Isto foi conseguido 9 anos depois, por S. Hayashi em [16], onde ele provou que $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ é estrela se, e somente se é Axioma A sem ciclos.

Capítulo 9

Apêndice

Neste último capítulo iremos apresentar algumas demonstrações e comentários para alguns dos resultados utilizados na prova do Teorema de Araújo. O principal objetivo deste apêndice é tornar o texto mais autocontido. A primeira seção contém uma prova completa do lema de Pliss e a segunda seção contém uma prova do lema de Franks. Na última seção comentaremos a prova do C^2-*conetting lemma* de Mañé.

9.1 Prova do Lema de Pliss

Nesta seção iremos provar o lema de Pliss, que foi usado na prova do teorema 4.3.3. É suficiente estabelecer o seguinte lem numérico.

Lema 9.1.1 (Pliss). *Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $H > 0$ existem N_0, e δ positivos de forma que se $a_1, ..., a_N$ são números reais, com $N \geq N_0$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \leq N\lambda \text{ e } |a_i| \leq H, \;\; \forall\, i = 1, ...N,$$

então existem os tempos hiperbólicos $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_l \leq N$ *os quais satisfazem*

$$\sum_{i=n_j+1}^{n} a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \epsilon)$$

para todos $j = 1, ..., l$ e $n_j < n \leq N$. Além disso, o número l de tempos hiperbólicos cumpre $l \geq N\delta$.

A idéia por trás do lema é muito simples: como só são permitidas sequências *uniformemente limitadas*, se a quantidade de termos é *muito grande* os termos não podem, a maioria, dominar $\lambda + \epsilon$. Imagine que temos 1 milhão de termos dominando $\lambda + \epsilon$, logo a soma desses termos domina $10^6\epsilon + 10^6\lambda$. Digamos que só restem 5 termos. Cada um deles no máximo subtrai H. Se, por exemplo o nosso número de termos é tal que $10^6\epsilon > 7H$, a soma total não será dominada por $N\lambda$.

Isso já dá uma pista razoável de como atacar o problema. De fato, a parte realmente difícil é estimar por baixo o número de tempo hiperbólicos.

Para provar o lema, começamos definindo os inimigos: $b_i = a_i - (\lambda + \epsilon)$. Note que se b_i é negativo para todo $i \geq n$ então n é um tempo hiperbólico! Podemos exigir um pouco menos considerando as somas $S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Definimos os tempos hiperbólicos com sendo os inteiros $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_l \leq N$ tais que $S_{n_j} \geq S_n$, para todo $n \geq n_j$ e de tal forma que l é o maior número possível desses tempos, ou seja, entre 1 e n_1 e n_j e n_{j+1} não existem tempos hiperbólicos para todo $j = 1, ..., l$.

Observe que esses inteiros realmente cumprem as conclusão do lema, pois $n \geq n_j$ implica

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_j+1}^{n} a_i &= \sum_{i=n_j+1}^{n} b_i + (n - n_j)(\lambda + \epsilon) = (S_n - S_{n_j}) + (n - n_j)(\lambda + \epsilon) \\ &\leq (n - n_j)(\lambda + \epsilon). \end{aligned}$$

Agora vamos a parte difícil, que é estimar a quantidade de tempos hiperbólicos. Note que o último tempo sempre é hiperbólico, ou seja $n_l = N$. Além disto,

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} a_i - N(\lambda + \epsilon) \leq N\lambda - N\lambda - N\epsilon \leq -N\epsilon.$$

Por outro lado, como $|a_1| \leq H$, temos

$$S_1 = b_1 = a_1 - (\lambda + \epsilon) \geq -(H + \lambda + \epsilon).$$

Portanto, se

$$N > \frac{H + \lambda + \epsilon}{\epsilon} \tag{9.1}$$

teremos $S_1 > -N\epsilon \geq S_N$. E isto implica que, se $S_m = \max\{S_n;\ 1 \leq n \leq N\}$, então $1 \leq m < N$. Daí, m é um tempo hiperbólico não trivial ($\neq N$).

Daqui em diante iremos obter a estimativa sobre o valor de l. Afirmamos que $S_{n_{j+1}} \geq S_{n_j+1}$. Com efeito, suponha que isto não aconteça. Então,

$$S_{n_j+1} > S_n, \ \ \forall\, n \geq n_{j+1},$$

pela definição de n_{j+1}. No entanto, $n_j + 1$ não é um tempo hiperbólico, e pertanto tem que existir $n_{j+1} > k_1 > n_j + 1$ tal que $S_{k_1} > S_{n_j+1}$. Pela mesma razão, tem que exsitir $n_{j+1} > k_2 > k_1$ tal que $S_{k_2} > S_{k_1}$. Por indução, obtemos uma sequência $n_{j+1} > k_p > k_{p-1} > ... > k_2 > k_1$. No entanto, como p não pode ser maior que $n_{j+1} - (n_j + 1)$, isto nos levará a um absurdo, a menos que $n_{j+1} = (n_j + 1)$, o que pela hipótese que fizemos, também nos leva a um absurdo.

Pelo mesmo argumento, podemos provar que $S_{n_1} \geq S_1$.

Com isso temos que se $1 < j \leq l$, então

$$S_{n_{j+1}} \geq S_{n_j+1} = S_{n_j} + b_{n_j+1} \geq S_{n_j} - (H + |\lambda| + \epsilon),$$

via a desigualdade triangular, pelo que obtemos (por indução)

$$S_{n_j} \geq S_{n_1} - (j-1)(H + |\lambda| + \epsilon).$$

Em particular,

$$S_{n_l} \geq S_{n_1} - (l-1)(H + |\lambda| + \epsilon).$$

Mas como $n_l = N$, segue que

$$\begin{aligned} -\epsilon N &\geq S_N \geq S_{n_1} - (l-1)(H + |\lambda| + \epsilon) \geq S_1 - (l-1)(H + |\lambda| + \epsilon) \\ &\geq -H - \lambda - \epsilon - (l-1)(H + |\lambda| + \epsilon) = -l(H + |\lambda| + \epsilon), \end{aligned}$$

ou seja, provamos que $\frac{l}{N} \geq \frac{\epsilon}{H+|\lambda|+\epsilon}$.

Para completar a prova do lema, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{H+|\lambda|+\epsilon}$.

9.2 Prova do Lema de Franks

Nesta seção iremos apresentar uma demonstração do lema de Franks. Aqui, a condição de M ser uma superfície não é necessária. O próximo lema ensina que dado um mapa linear próximo da derivada de um difeomorfismo podemos obter um difeomorfismo próximo que é, em coordenadas locais, igual a esse mapa linear. De fato, para obter um difeomorfismo que realiza um determinado mapa linear como derivada, o modo mais fácil (pelo menos em $\mathbb{R}^n$) é tomar o próprio mapa linear como sendo o difeomorfismo! A dificuldade técnica que aparece, é que a variedade não possui estrutura vetorial, logo não faz sentido definir uma mapa linear nela. Mas a variedade *possui* estrutura vetorial *localmente*. Para usar isto e aplicar a mesma idéia, é que vão aparecer no lema as cartas locais e uma *função bump*.

Lema 9.2.1. *Seja $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Dada $\mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f, existe $\delta > 0$ tal que: se $p \in M$, $q = f(p)$, $\varphi : U \subset M \to U_0$ e $\psi : V \subset M \to V_0$, são cartas locais ao redor de p e q com $\varphi(p) = \psi(q) = 0$, e se $A = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)$ e $B : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é linear e cumpre $\|B - A\| < \delta$, então existe $g \in \mathcal{U}$ tal que $\psi \circ g \circ \varphi^{-1} = B$ em $B(0, r)$ e $g = f$ fora de U.*

Demonstração. Considere $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função *bump* na bola unitária, isto é, β é suave, $\beta \equiv 1$em $B(0, 1)$ e $\beta \equiv 0$ fora de $B(0, 2)$. Denote $C_0 = \sup\{\|d\beta(x)\|;\ x \in \mathbb{R}^d\}$. Considere a função suave $\alpha(x) = \beta(x/r)$. Note que

$$\sup\{\|d\alpha(x)\|;\ x \in \mathbb{R}^d\} = \frac{C_0}{r}.$$

Pela definição de derivada, podemos escrever

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = Ax + \hat{f},$$

onde $\hat{f}(0) = 0$, $d\hat{f}(0) = 0$. Em particular, $\|d\hat{f}(x)\|$ e $\frac{|\hat{f}(x)|}{|x|}$ vão à zero quando $x \to 0$. Tome $r > 0$ de modo $B(0, 2r) \subset U_0$. Definimos a perturbação desejada pondo $g = f$ fora de U, e

$$\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x) = \alpha(x)Bx + (1 - \alpha(x))\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x),$$

para todo $x \in U_0$. Daí, é claro que a representação de g, nas cartas φ, ψ, é igual a B em $B(0, r)$ e é igual a representação de f fora de $B(0, 2r)$. Vamos estimar a distância C^1 entre g e f. Começamos calculando para as derivadas. Temos que

$$\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x) - Ax = \alpha(x)Bx - \alpha(x)Ax + (1 - \alpha(x))\hat{f}(x),$$

e portanto se $x \in B(0, 2r)$ temos que

$$\begin{aligned} \|d(\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x)) - Ax\| &\leq (|x|\frac{C_0}{r} + 1)\|B - A\| + \frac{C_0}{r}|\hat{f}(x)| + \|d\hat{f}(x)\| \\ &\leq (2C_0 + 1)\|B - A\| + 2C_0\frac{|\hat{f}(x)|}{|x|} + \|d\hat{f}(x)\| \\ &< a, \end{aligned}$$

desde que $\delta < \frac{a}{3(2C_0+1)}$ e r seja pequeno o bastante para que os outros temos da segunda desigualdade acima sejam estimados por $\frac{a}{3}$, onde $a > 0$ é tal que $d_{C^1}(g, f) < a$ implica $g \in \mathcal{U}$.

Reduzindo r, se necessário, pelo Teorema do Valor Médio segue que a distância C^0 entre f e g também é menor do que a. Deixamos a verificação deste detalhe a cargo do leitor.

Portanto obtemos g nas condições do lema, cuja distância C^1 a f é menor do que a. Isto conclui a prova. $\square$

Observação 9.2.2. *Observe que δ só depende de $\mathcal{U}$.*

Lema 9.2.3 (Lema de Franks)**.** *Sejam $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e $\mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f. Então, existem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ vizinhança C^1 de f, e $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $g \in \mathcal{V}$ e $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto finito de pontos distintos de M, tal que existam mapas lineares $L_i : T_{x_i}M \to T_{f(x_i)}M$ satisfazendo*

$$\|L_i - df(x_i)\| < \epsilon,$$

e U é uma vizinhança desse conjunto finito de pontos, então existe $\overline{g} \in \mathcal{U}$, $\overline{g} = g$ em $\{x_1, ..., x_n\} \cup (M - U)$ de tal forma que $d\overline{g}(x_i) = L_i$.

Demonstração. Seja $a > 0$ tal que todo difeomorfismo g que é $2a$-C^1-próximo de f está em $\mathcal{U}$. Definimos $\mathcal{V}$ como o conjunto de difeormofismos que estão a-C^1-próximos de f. Por compacidade, podemos cobrir M com um número finito de cartas locais, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{l}$.

Seja $C = \sup\{\|d\varphi_j(p)\|, \|d\varphi_j^{-1}(x)\|; p \in M, x \in B(0,1), j = 1\ldots, l\}|$. Aplicando o lema 9.2.1 a vizinhança $\mathcal{V}$ obtemos um $\delta > 0$. Escolhemos $\epsilon = \frac{\delta}{C}$. Afirmamos que com essa escolha o lema está provado.

Com efeito, dada $g \in \mathcal{V}$, podemos escolher um $r > 0$ pequeno de modo que as bolas $B(x_i, r)$ sejam disjuntas e que valha o lema 9.2.1. Podemos supor que $\varphi_i(x_i) = 0$, e que para cada i existe j tal que se $\psi_i = \varphi_j$ então $\psi_i(f(x_i)) = 0$. Como cada L_i cumpre

$$\|L_i - df(x_i)\| < \epsilon,$$

se definirmos $B_i = d\psi_i \circ L_i \circ d\varphi_i^{-1}(0)$, então, pelo modo como escolhemos ϵ, é fácil ver que teremos

$$\|B_i - A_i\| < \delta,$$

onde $A_i = d(\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1})(0)$.

O que vamos fazer agora é aplicar o lema 9.2.1 para obter a perturbação desejada. Por ele, existe g_1, cuja C^1 distância a g é igual a a tal que

$$\psi_1 \circ g_1 \circ \varphi_1^{-1} = B_1$$

na bola $B(0, r)$. Em particular, $dg_1(x_1) = L_1$, $g_1(x_1) = g(x_1)$ e $g_1 = g$ fora de uma vizinhança muito pequena de x_1 (desde que r seja pequeno o bastante). Em seguida, perturbamos g_1 para obter g_2, igual a g_1 fora de uma vizinhança muito pequena de x_2 (novamente desde que r seja pequeno), satisfazendo $dg_2(x_2) = L_2$ e $g_2(x_2) = g(x_2)$. A observação é que como g_2 só perturba g_1 numa parte na qual $g_1 = g$, temos que $d(g_2, g) < a$. Prosseguindo um número finito de vezes, obtemos a perturbação desejada. $\square$

9.3 Sobre a criação de pontos homoclínicos

O teorema 6.3.2, o qual foi crucial na prova do Teorema de Araújo, pertence a uma classe muito importante de resultados em Sistemas Dinâmicos: os chamados *lemas de perturbação*. Um outro lema de perturbação que utilizamos foi o *ergodic closing lemma*. Ambos resultados possuem a mesma filosofia: a partir de um determinado cenário, criar uma situação dinâmica interessante, mediante uma perturbação. No caso do *ergodic closing lemma*, a a partir de certas órbitas recorrentes criam-se órbitas periódicas, e no caso do *connecting lemma* (i.e. teorema 6.3.2) a partir de órbitas que aproximam-se da variedade estável e também da variedade instável de um conjunto hiperbólico, criam-se órbitas homoclínicas.

Nesta seção iremos considerar um caso particular do teorema 6.3.2 no qual o conjunto hiperbólico reduz-se a um ponto fixo hiperbólico p, que não é poço nem fonte, e temos um ponto $x \in W^u(p) - \{p\}$ tal que $\mu(\{p\}) > 0$, para uma certa medida orbital $\mu \in M(x)$. Nosso objetivo é mostrar que para toda vizinhança $\mathcal{U}$ de f, existe um difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$, tal que $g = f$ numa vizinhança de p e g possui um ponto homoclínico associado a p.

Além disso, iremos supor ainda que f é linear numa vizinhança U de p. Esta hipótese adicional irá simplificar algumas tecnicalidades da prova e, no entanto, ainda iremos nos deparar com as principais dificuldades do *connecting lemma*.

De fato, a menos da hipótese adicional da linearidade numa vizinhança do ponto fixo e do fato de M ser uma superfície, iremos provar aqui o Teorema A de [26].

A ferramenta básica da prova, bem como de quase todos os lemas de perturbação é o seguinte resultado:

Lema 9.3.1. *Dados $c > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{N}$ da identidade em $\mathrm{Diff}^k(M)$, existe $R > 0$ tal que para todo $0 < r < R$ e todo par de pontos a e b em M satisfazedno*

$$d(a,b) < r^{k+c}$$

existe um difeomorfismo $h \in \mathcal{N}$ tal que

$$\begin{aligned} h(a) &= b \\ h(x) &= x, \end{aligned}$$

para todo x fora de $B(a,r)$.

A demonstração do lema acima é bastante simples, e o leitor pode facilmente adaptar os agumentos das páginas 23 e 24 de [27] para concluí-la.

A seguir vamos descrever, mediante algumas suposições, a estratégia para criar a órbita homoclínica. Como toda medida orbital de x dá peso positivo ao ponto p, existem pontos da órbita de x que se aproximam de p, em particular se aproximam da variedade estável de p. Extrapolando um pouco, suponha que exista um ponto $y \in W^s(p) - \{p\}$ e um iterado $q = f^N(x)$ perto o suficiente de y para que possamos aplicar o lema 9.3.1 numa pequena bola $B(y,r)$ disjunta de p, e obter um difeomorfismo h próximo da identidade tal que $h(q) = y$, e $h(x) = x$ para todo x fora de $B(y,r)$. Como f é linear numa vizinhança de p, se r é suficientemente pequeno, a órbita futura de y não intersecta $B(y,r)$. Vamos supor que órbita passada de q não intersecta $B(y,r)$. Logo, se $g = h \circ f$, temos que p é um ponto fixo para g, e como

$$g\left(f^{-1}(q)\right) = h(q) = y,$$

e $f^j(y) \notin B(y,r)$ assim como $f^{-j}(q) \notin B(y,r)$ para todo $j > 0$, temos que

$$\begin{aligned} g^{j+1}\left(f^{-1}(q)\right) &= f^j(y) \\ g^{-j}\left(f^{-1}(q)\right) &= f^{-j+N-1}(x), \end{aligned}$$

para todo $j > 0$, e portanto $f^{-1}(q)$ é um ponto homoclínico associado a p para g.

O argumento acima, embora impreciso, deixa claro que a principal dificuldade para criar a órbita homoclínica é a escolha do iterado $f^n(x)$ usado para conectar as variedades invariantes, via o lema 9.3.1. Se esta escolha não for feita de modo adequado, i.e. satisfazendo as hipóteses que impomos acima para o argumento dar certo, não teremos controle sobre a órbita criada.

Vamos ser um pouco mais formais. Dada uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f, tomando $\mathcal{N} = \mathcal{U} \circ f^{-1}$, obtemos uma vizinhança da identidade em $\mathrm{Diff}^k(M)$. Dado $c > 0$, o lema 9.3.1 fornece então $R > 0$ tal que para todo $0 < r < R$, se a, b são pontos em M tais que $d(a,b) < r^{k+c}$ então existe $h \in \mathcal{N}$, $h(a) = b$, e $h = Id$ fora de $B(a,r)$. Por isso, além de escolher um ponto $f^n(x)$ que esteja r^{k+c} próximo da variedade estável de p, devemos garantir que os iterados anteriores $f^j(x)$, $j < n$, não pertencem a bola (um pouco maior) $B(a, r)$.

A solução para esta dificuldade é considerar quadrados Q_n centrados em p, com lados $2r_n$, onde a sequência r_n é definida recursivamente via

$$r_{n+1} = r_n^{1+\delta},$$

com $0 < \delta < 1$ e $0 < r_0 < 1$ é pequeno o bastante para que $Q_0 \subset U$, a vizinhança de p na qual f é linear. O tamanho dos quadrados Q_n decai exponencialmente com n, e isto é um ponto fundamental. Daí, uma idéia para solucionar a dificuldade apresentada acima é tentar garantir a existência de uma corda $\sigma = \{f^N(x), ..., f^m(x)\}$ da órbita de x, cujo ponto inicial pertence a $Q_n - Q_{n+1}$ (o espaço entre dois quadrados consecutivos) e tal que nenhum ponto $f^j(x)$, com $j < N$, intersecta Q_n. Se r_n for muito pequeno, poderemos estimar a distância entre o primeiro elemento desta corda, digamos b, e um ponto a na variedade estável de p por r_n^s, mas de modo que a bola centrada em a de raio $r_n^{\frac{s}{k+c}}$, não contenha nenhuma iterado negativo de b, para um certo s.

A seguir vamos enunciar o lema que dá a existência de tal corda, e em seguida iremos mostrar como isto permite implementar a idéia acima. Como como a prova de tal lema contém argumentos que escapam um pouco da linha idéias que estamos seguindo, a sua demonstração será apresentada depois que concluirmos a prova do *connecting lemma*, no caso particlular que estamos considerando.

O lema de seleção das cordas

Para enunciarmos o lema que dará a existência das cordas adequadas para realizarmos a perturbação desejada, vamos estabelcer uma linguagem geométrica que irá facilitar a vida do leitor, e também irá explorar as hipóteses adicionais que temos.

Podemos supor que $E := W^s(p) \cap U$ e $F := W^u(p) \cap U$ se intersectam ortogonlamente em p, e portanto Q_n é caracterizado como o conjunto dos ponto $a \in U$ tais que

$$d(a, E) \leq r_n \text{ e } d(a, F) \leq r_n.$$

Além disso, pela lineriadade e como E e F são unidimensionais podemos assumir que existem números $0 < \gamma, \lambda < 1$ tais que pontos em E aproximam-se exponencialmente de p no futuro, com uma taxa λ, equanto que pontos em F aproximam-se exponencialmente de p no passado, com uma taxa γ. Dito de outra forma, temos que se $x \in Q_0$ então

$$d(f^n(x), F) = \lambda^n d(x, F) \text{ e } d(f^n(x), E) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n d(x, E), \tag{9.2}$$

para todo $n \geq 0$, com igualdades similares para $n < 0$. Este fato, no nosso caso, corresponde ao lema 2 de [26].

Considere S_n o conjunto dos pontos $a \in Q_0$ que podem ser escritos como $a = f^m(y_n)$ com $y_n \in Q_n$ e $f^j(y_n) \in Q_0$, para todo $0 \leq j \leq m$, se $m \geq 0$ e $m \leq j \leq 0$ se $m < 0$.

Geometricamente S_n é a região do quadrado Q_0 limitada pelas hiperbóles que passam pelos vértices do quadrado Q_n.

Dada uma sequência de naturais $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, dizemos que uma corda $\sigma = \{f^j(x), ..., f^{j+l}(x)\}$ é uma (n,k)-corda se $\sigma \subset Q_n$ de modo maximal, i.e. $f^{j-1}(x) \notin Q_n$ e $f^{j+l+1}(x) \notin Q_n$, com $1 \leq j \leq j+l \leq n_k$. Um fato importante é que existe uma ordem natural entre (n,k)-cordas, definida dizendo-se que $\sigma_1 < \sigma_2$ se o primeiro elemento de σ_2 é um iterado estritamente positivo do último elemento de σ_1. Por simplicidade, $(0,k)$-cordas serão chamdas simplesmente de k-cordas. Na maioria dos argumentos iremos lidar somente com k-cordas.

O enunciado do lema de selação das cordas é o seguinte:

Lema 9.3.2. *Existe uma sequência de naturais $n_1 < n_2 < ... < n_k ...$ tal que para todo $N > 0$, uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

a) Existem $n \geq N$, $k > 0$ e duas k-cordas $\sigma_1 < \sigma_2$, ambas contidas em S_{n+1} tais que

$$\sigma \cap (S_n - S_{n+1}) = \emptyset \text{ para toda } k\text{-corda } \sigma_1 < \sigma < \sigma_2.$$

b) Existem $n \geq N$, $k > 0$ e uma k-corda $\sigma_1 \subset S_{n+1}$ tais que

$$\sigma \cap (S_n - S_{n+1}) = \emptyset \text{ para toda } k\text{−corda } \sigma < \sigma_1.$$

O leitor deve estar se perguntando o que a sequência n_k tem haver a discussão feita até aqui. Lembre que uma das nossas hipóteses é que existe uma medida orbital de x que dá peso positivo ao ponto p. Lembre que esta medida é o limite na topologia fraca* de medidas da forma $\mu_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} \delta_{f^j(x)}$. Veremos mais a frente que esta é a sequência n_k do enunciado. A prova do lema 9.3.2 é o único momento no qual a hipótese sobre a existência de uma tal medida orbital será usada.

O significado intuitivo do ítem a) do lema 9.3.2 é que se considerarmos q o último elemento de $\sigma_1 \cap Q_n$, a sua órbita positiva até um certo iterado $f^N(q)$ não intersecta o espaço entre entre os quadrados Q_n e Q_{n+1}. Como $Q_{n+1} \subset Q_n$, isto equivale a dizer que a órbita positiva de q não intersecta $Q_n - Q_{n+1}$. Dito de outra forma, se considerarmos $b = f^N(q)$, a sua órbita passada até o iterado $f^{-N}(b)$ não intersecta $Q_n - Q_{n+1}$. Similarmente, o significado do ítem b) é que se considerarmos q o primeiro elemento da (n,k)-corda $\sigma_1 \cap Q_n$ a sua órbita negativa *inteira* jamais intersecta $Q_n - Q_{n+1}$. Observe que em ambos os casos o lema 9.3.2 fornece um ponto da órbta da órbita positiva de x, o primeiro elemento da corda σ_2 do item a), e o primeiro elemento da corda σ_1 do item b), que pertence a S_{n+1} e que admite um certo controle sobre a sua órbita passada. Aparentemente, este controle não é forte o bastante para podermos realizar a perturbação. Contudo, como veremos a seguir, ele é de fato suficiente.

Criando a órbita homoclínica

O lema 9.3.2 diz que existem n arbitrariamente grande e $k > 0$, tais que uma das propriedades a) e b) é satisfeita. Suponhamos inicialmente que a propriedade a) seja satisfeita. Uma adaptação fácil para a prova desse caso, mostra que se a propriedade b) for verdade, também conseguimos criar a órbita homoclínica.

Então, temos k-cordas $\sigma_1 < \sigma_2$ contidas em S_{n+1} tais que $\sigma \cap S_n = \emptyset$, para toda k-corda $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, e, além disso, n pode ser tomado tão grande quanto quisermos.

Observe que, pela definição de k-cordas, $\sigma_1 \cap Q_n$ e $\sigma_1 \cap Q_n$ são (n,k)-cordas. Tome a o último ponto da (n,k)-corda $\sigma_1 \cap Q_n$, e b o primeiro ponto da $\sigma_2 \cap Q_n$. Como $\sigma_1 < \sigma_2$, existe um inteiro $l > 0$ tal que $f^l(a) = b$. Observe ainda que, como $x \in W^u(p) - \{p\}$, temos que $a \in W^u(p) - \{p\}$.

Vamos estimar a distância entre b e a variedade estável de p, $d(b,E)$, e obter um expoente $s > 0$ de modo que para algum $n > 0$ esta distância seja menor do que $r_n^{\frac{s}{k+c}}$, o que nos permitirá aplicar o lema 9.3.1 como fizemos heuristicamente antes.

Lema 9.3.3. *Existem $\beta > 0$, e $n > 0$ de tal forma que $d(b,E) < r_n^{2+\beta}$. Em particular, existe um ponto $y \in E$ tal que $b \in B(y, r_n^{2+\beta})$.*

Demonstração. Como b é o primeiro ponto da (n,k)-corda $\sigma_2 \cap Q_n$, temos $f^{-1}(b) \notin Q_n$, uma vez que uma (n,k)-corda é uma corda maximal contida em Q_n. Daí, como a órbita passada de b se aproxima de E, devemos ter

$$d(f^{-1}(b), F) > r_n. \tag{9.3}$$

Tome um ponto $b_1 \in \sigma_2 \cap Q_{n+1}$ tal que $b = f^{-m}(b_1)$. Então,

$$r_n < d(f^{-m-1}(b_1), F) = \lambda^{-(m+1)} d(b_1, F) \leq \lambda^{-(m+1)} r_{n+1} = \lambda^{-(m+1)} r_n^{1+\delta},$$

e portanto

$$r_n^{\delta} \geq \lambda^{m+1}.$$

Agora observe que

$$d(b,E) = d(f^{-m}(b_1), E) = \gamma^m d(b_1, E) \leq \gamma^m r_{n+1} = \gamma^m r_n^{1+\delta}.$$

Tome $\alpha > 0$ tal que $\gamma = \lambda^{\alpha}$. Então, usando que $\lambda^m \leq \frac{r_n^{\delta}}{\lambda}$, temos que

$$\gamma^m = \lambda^{m\alpha} \leq \left(\frac{r_n^{\delta}}{\lambda}\right)^{\alpha},$$

e desse modo

$$\gamma^m r_n^{1+\delta} \leq \left(\frac{r_n^{\delta}}{\lambda}\right)^{\alpha} r_n^{1+\delta},$$

donde

$$d(b,E) \leq \lambda^{-\alpha} r_n^{1+\delta+\alpha\delta}.$$

Podemos escolher $0 < \delta < 1$ tal que $\delta(1+\alpha) > 1$, e tomando $0 < \beta < \delta(1+\alpha) - 1$, vemos que

$$r_n^{1+\delta+\alpha\delta} < r_n^{2+\beta}.$$

No entanto, se n é grande temos ainda que

$$\lambda^{-\alpha} r_n^{1+\delta+\alpha\delta} < r_n^{2+\beta}.$$

Isto mostra que tomando n suficientemente grande, temos que

$$d(b, E) < r_n^{2+\beta},$$

e portanto existe um ponto $y \in E$ tal que

$$b \in B(y, r_n^{2+\beta}).$$

$\square$

Daqui por diante, iremos garantir que se n é grande, podemos aumentar o raio da bola $B(y, r_n^{2+\beta})$ de um modo que nos permitirá aplicar o lema 9.3.1. Ou seja, temos que garantir que a órbita passada de b não intersectará esta bola centrada em y com raio maior, que é onde a perturbação do lema 9.3.1 irá ocorrer, e que a órbita futura de y também não intersectará esta bola. Como vimos no começo, isto é tudo que precisamos para que $f^{-1}(b)$ seja um ponto homoclínico para uma perturbação de f.

Vamos começar provando que a órbita futura de y não retorna a bola centrada em y, com o raio um pouco maior.

Lema 9.3.4. *Se n é suficientemente grande então $f^j(y) \notin B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$, para todo $j > 0$.*

Demonstração. A prova é basicamente usar a desigualdade trangular algumas vezes, explorando a linearidade de f e o lema anterior, para obter uma estimativa por baixo para $d(f^j(y), y)$.

De fato, pela desigualdade triangular,

$$d(f^j(y), y) \geq d(y, F) - d(f^j(y), F),$$

contudo $d(f^j(y), F) = \lambda^j d(y, F) < \lambda d(y, F)$, logo

$$d(f^j(y), y) \geq (1 - \lambda) d(y, F).$$

Por outro lado, novamente pela desigualdade triangular

$$d(y, F) \geq d(b, F) - d(y, b),$$

e pelo lema anterior temos que $d(y, b) < r_n^{2+\beta}$, enquanto 9.2 e 9.3 implicam que $d(b, F) = \lambda d(f^{-1}(b), F) > \lambda r_n$. Logo,

$$d(y, F) \geq \lambda r_n - r_n^{2+\beta}, \tag{9.4}$$

e finalmente obtemos que

$$d(f^j(y), y) \geq (1 - \lambda)(\lambda r_n - r_n^{2+\beta}).$$

Se n é grande o bastante para que $r_n^{1+\beta} < \lambda$, então $r_n^{1+\beta}(\lambda - 1) > \lambda^2 - \lambda$, e obtemos que

$$r_n^{1+\beta}(\lambda - 1) - r_n^{\frac{\beta}{3}} > \lambda^2 - \lambda,$$

donde segue

$$(1 - \lambda)(\lambda r_n - r_n^{2+\beta}) > r_n^{1+\frac{\beta}{3}}.$$

Isto conclui a prova. □

Por último, vamos provar que a órbita negativa de b não intersecta $B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$. Este é o passo mais delicado da prova, e nele usaremos que estamos assumindo que vale o item a) do lema 9.3.2. Dividiremos a prova em três etapas. As duas primeiras são mais fácies, e não usam o lema 9.3.2. A terceira etapa é a parte principal.

Lema 9.3.5. *Se n é suficientemente grande então $f^{-1}(b) \notin B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$.*

Demonstração. A estratégia é a mesma do lema anterior. Pela desigualdade triangular,

$$d(f^{-1}(b), y) \geq d(y, f^{-1}(y)) - d(f^{-1}(y), f^{-1}(b)).$$

Pela continuidade uniforme de f^{-1}, e pela compacidade de M, existe $A > 0$ tal que $d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \leq Ad(z, w)$, para quaisquer z, $w \in M$. Usando isto, e o lema 9.3.4, segue da desigualdade anterior que

$$d(f^{-1}(b), y) \geq d(y, f^{-1}(y)) - Ar_n^{2+\beta}.$$

Por outro lado, a desigualdade triangular implica que

$$d(y, f^{-1}(y)) \geq d(f^{-1}(y), F) - d(y, F),$$

e por 9.2 $d(f^{-1}(y), F) = \lambda^{-1} d(y, F)$, enquanto que por 9.4 $d(y, F) \geq \lambda r_n - r_n^{2+\beta}$, e desse modo

$$d(y, f^{-1}(y)) \geq (\lambda^{-1} - 1)(\lambda r_n - r_n^{2+\beta}).$$

Portanto,

$$d(y, f^{-1}(b)) \geq (\lambda^{-1} - 1)\lambda r_n - (\lambda^{-1} - 1 - A)r_n^{2+\beta}.$$

Não é difícil ver que se n é suficientemente grande, o lado direito da desigualdade acima é maior do que $r_n^{1+\frac{\beta}{3}}$, e isto termina a prova. □

Como $a = f^{-l}(b)$, para provar que a órbita negativa de b não intersecta $B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$, vamos provar que nem a órbita negativa de a e nem a corda $\{f^{-1}(b), ..., f^{-l}(b)\}$ intersectam $B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$. Mas note que, por 9.4, $d(f^{-j}(a), y) \geq d(y, F) \geq \lambda r_n - r_n^{2+\beta}$, e já escolhemos n grande para que

$$(1 - \lambda)(\lambda r_n - r_n^{2+\beta}) > r_n^{1+\frac{\beta}{3}},$$

logo

$$d(f^{-j}(a), y) > r_n^{1+\frac{\beta}{3}}.$$

Isto prova que a órbita negativa de a não intersecta $B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$. Daí, para concluirmos que toda a órbita negativa de b não intersecta $B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$ resta apenas o

Lema 9.3.6. *Se n é suficientemente grande então $f^{-j}(b) \notin B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$, para todo $2 \leq j \leq l$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que

$$d(f^{-j}(b), y) \leq r_n^{1+\frac{\beta}{3}},$$

para algum $2 \leq j \leq l$. Seja $B > 0$ tal que $d(f(z), f(w)) \leq Bd(z, w)$, para todos z e w em M. Como $y \in E$, temos que

$$d(f^{-j+1}(b), E) \leq d(f^{-j+1}(b), f(y)) \leq Bd(f^{-j}(b), y) \leq Br_n^{1+\frac{\beta}{3}},$$

e desse modo, se n é grande então

$$d(f^{-j+1}(b), E) \leq r_n.$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$d(f^{-j+1}(b), F) \leq d(f^{-j+1}(b), f(y)) + d(f(y), F),$$

e

$$d(f(y), F) \leq d(f(y), f(b)) + d(f(b), F) \leq Br_n^{2+\beta} + \lambda r_n,$$

logo, usando o lema 9.3.3 obtemos

$$d(f^{-j+1}(b), F) \leq Br_n^{1+\frac{\beta}{3}} + Br_n^{2+\beta} + \lambda r_n = (Br_n^{\frac{\beta}{3}} + Br_n^{1+\beta} + \lambda)r_n.$$

Portanto, se n é grande,

$$d(f^{-j+1}(b), F) \leq r_n.$$

Segue que $f^{-j+1}(b) \in Q_n$. Seja σ a k-corda que contém $f^{-j+1}(b)$. Como um iterado positivo de um elemento de σ é igual a b, temos que $\sigma \leq \sigma_2$, e como um iterado negativo de um elemento de σ é igual a a, temos que $\sigma_1 \leq \sigma$. Pelo ítem a) do lema 9.3.2, devemos ter $\sigma = \sigma_1$ ou $\sigma = \sigma_2$. Mas então, no primeiro caso, temos que

$$f^{-j+1}(b) = f^{-j+1}(f^l(a)) = f^{l-j+1}(a) \in Q_n,$$

e uma veaz que $2 \leq j \leq l$, logo $l - j + 1 \geq 1$, temos uma contradição com o fato de a ser o último elemento de σ_1. No segundo caso temos que o iterado $f^{-j+1}(b)$, que é estritamente negativo uma vez que $j > 1$, pertence ainda a Q_n, contradizendo o fato de b ser o primeiro elemento de σ_2. Em qualquer caso, obtemos uma contradição, concluindo a prova. □

Agora podemos aplicar o lema 9.3.1 à vizinhança da identidade $\mathcal{N} = \mathcal{U} \circ f^{-1}$, com

$$c = \frac{2+\beta}{1+\frac{\beta}{3}} - 2,$$

no caso em que f é de classe C^2 e

$$c = \frac{2+\beta}{1+\frac{\beta}{3}} - 2,$$

no caso em que f é de classe C^1. Seja $k = 1$ ou 2 tal que $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$. Pelo lema 9.3.1 existe $R > 0$ tal que, se n é grande o bastante para que $r_n < R$, e como

$$\left(r_n^{1+\frac{\beta}{3}}\right)^{k+c} = r_n^{2+\beta},$$

existe $h \in \mathcal{N}$ tal que

$$h(b) = y$$

e

$$h(x) = x,$$

para todo $x \notin B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$. Definindo $g = h \circ f$, temos que $g \in \mathcal{U}$, e que $g = f$ em $f^{-1}\left(B(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})\right)$. Como $d(p,y) = d(y,F) > \lambda r_n - r_n^{2+\beta} > 1 + \frac{\beta}{3}$, temos que $p \notin \overline{B}(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})$, e como p é um ponto fixo, não podemos ter $p \in f^{-1}\left(\overline{B}(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})\right)$. Logo, $M - f^{-1}\left(\overline{B}(y, r_n^{1+\frac{\beta}{3}})\right)$ é uma vizinhança de p, na qual $g = f$. Finalmente, como observamos no início

$$\begin{aligned} g^{j+1}\left(f^{-1}(b)\right) &= f^j(y) \\ g^{-j}\left(f^{-1}(b)\right) &= f^{-j+N-1}(x), \end{aligned}$$

para todo $j > 0$, e como, devido aos lemas 9.3.4, 9.3.5 e 9.3.6, a órbita positiva por g é igual sua órbita psitiva por f, assim como a órbita negativa de b por g é igual a sua órbita negativa, obtemos que $f^{-1}(b)$ é um ponto homoclínico associado a p para g.

O caso em que é ítem b) do lema 9.3.2 que vale é análogo, e fica a cargo do leitor.

Prova do lema 9.3.2

Para concluir esta seção, iremos expor a prova do lema de seleção das cordas. Aqui usaremos a hipótese de que existe uma medida orbital do ponto x que dá peso positivo ao ponto fixo p. De modo preciso, isto significa que existe uma sequência de naturais $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tal que as medidas

$$\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)},$$

convergem a uma medida μ na topologia fraca*, e $\mu(\{p\}) > 0$. Veremos que o lema 9.3.2 é verdadeiro com esta sequência n_k. Para tanto, iremos supor que isto não é verdade, e derivar uma contradição. De fato, vamos mostrar que se existe $N > 0$ tal que os items a) e b) do lema 9.3.2 são ambos falsos, então $\mu(\{p\}) = 0$.

Para realizar isto, iremos estimar $\mu_k(S_n)$, com k e n arbitrariamente grandes. Com efeito, observe que podemos supor que a sequência $\{r_n\}$ satisfaz $\mu_k(\partial S_n) = 0$ para todo $k > 0$ e todo $n \geq 0$. Com isto, temos que

$$\mu_k(S_n) \to \mu(S_n) \tag{9.5}$$

quando $k \to +\infty$, para todo $n \geq 0$.[1] Além disso, observe ainda que a sequência S_n é decrescente e sua interseção é o ponto p, logo

$$\mu(\{p\}) = \lim \mu(S_n). \tag{9.6}$$

Daí, para provar que $\mu(\{p\}) = 0$, é suficiente provar que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu_k(S_n) = 0.$$

Vamos obter uma estimativa sobre $\mu_k(S_n)$ que nos permitirá passar o limite quando n e k tendem a ∞, e concluir que este limite é zero.

Note que $\mu_k(S_n)$ é estimado pelo número de k-cordas contidas em S_n vezes o "comprimento máximo"de tais cordas. Logo, para estimar $\mu_k(S_n)$ devemos controlar o "comprimetno máximo"e o número de k-cordas contidas em S_n.

Ora, é razoável esperar que o comprimento das cordas em S_n seja maior do que o comprimento de qualquer corda fora de S_n, pois intuitivamente é claro que as hiperbóles que passam dentro do quadrado Q_n têm comprimento menor do que as que não passam por Q_n. Daí, o próximo lema estabelece isto de modo preciso, dizendo que o comprimento das cordas *em* S_n cresce super-exponencialmente com n, enquanto que para as cordas em Q_0 mas *fora* de S_n, o crescimetno se dá sub-exponencialmente com n. Naturalmente, tal resultado será uma ferramenta importante para estimar $\mu_k(S_n)$.

Dado $a \in Q_0$, o comprimento da maior corda $\{f^{-n_1}(a), ..., f^{n_2}(a)\}$, com n_1 e n_2 positivos, contida em Q_0 é o número

$$\begin{aligned} T(a) &= \sup\{j; f^i(x) \in Q_0, \text{ para todo } 0 \leq i \leq j\} \\ &+ \sup\{j; f^{-i}(x) \in Q_0, \text{ para todo } 0 < i \leq j\}. \end{aligned}$$

Lema 9.3.7. *Existem constantes C_2, $C_1 > 0$ tais que se δ é como acima, para todo $n > 0$ temos*

$$T(a) \leq C_2(1 + \delta)^n$$

se $a \in Q_0 - S_n$ e

$$C_1(1 + \delta)^n \leq T(a)$$

se $a \in S_n$.

[1] Já usamos que a convergência forte de medidas (convergência pontual nos borelianos) implica a convergência na topologia fraca estrela, cf. proposição 2.2.4. Aqui, estamos usando a recíproca deste fato, a qual é verdade se o bordo do conjunto possui medida μ igual a zero. Ver, por exemplo, [21], página 37 exercício 3.2, e teorema 1, página 54 de [14]

Demonstração. Suponha que $a \in Q_0 - S_n$. Em particular, temos que $a \notin Q_n$. Sejam n_1 e n_2 positivos tais que $f^j(a) \in Q_0$ para todo $-n_1 \leq j \leq n_2$. Como $a \notin Q_n$ devemos ter $d(a,E) \geq r_n$ ou $d(a,F) \geq r_n$. Suponha que $d(a,E) \geq r_n$, pois o caso em que $d(a,F) \geq r_n$ é análogo. Aplicando a igualdade 9.2 obtemos que

$$r_0 \geq d(f^{n_2}(a), E) = \gamma^{-n_2} d(a,E) \geq \gamma^{-n_2} r_n.$$

Por outro lado, a definição recursiva $r_{n+1} = r_n^{1+\delta}$ nos leva a $r_n = r_0^{(1+\delta)^n}$, donde segue que

$$\log r_n = (1+\delta)^n \log r_0.$$

Usando a desigualdade acima temos

$$-n_2 \log \gamma + (1+\delta)^n \log r_0 \leq \log r_0,$$

e finalmente segue que

$$n_2 \leq (1+\delta)^n \frac{\log r_0}{\log \gamma}.$$

Para estimar o tamanho de n_1, observe que se $d(a,F) \geq r_n$ então, usando a igualdade $d(f^{-n_1}(a), F) = \lambda^{-n_1} d(a,F)$ e uma mera repetição do argumento acima, temos a estimativa desejada.

Suponhamos então que $d(a,F) < r_n$.

Observe que ao iterarmos o ponto a para trás, ele se afasta de F. O que vamos fazer é considerar os iterados para trás de a que permanecem r_n-próximos de F, e obter uma estimativa para a maior quantidade possível destes iterados, semelhante a que obtivemos para n_2. De fato, considere m tal que $d(f^{-j}(a), F) < r_n$, para todo $j = 1, \ldots, m$ e $d(f^{-m-1}(a), F) \geq r_n$. Como $a \notin S_n$, se $q = f^{-m}(a)$, devemos ter $d(q,E) \geq r_n$, e portanto

$$r_0 \geq d(f^m(q), E) = \gamma^{-m} d(q,E) \geq \gamma^{-m} r_n,$$

e portanto, argumentando como acima, segue que

$$m \leq (1+\delta)^n \frac{\log r_0}{\log \gamma}.$$

Por outro lado, para o restante da órbita negativa de a podemos argumentar como fizemos para n_2. Com efeito, seja $b = f^{-m-1}(a)$. Como $d(b,F) \geq r_n$, usando que

$$r_0 \geq d(f^{-n_1+m}(b), F) = \lambda^{-n_1+m} d(b,F) \geq \lambda^{n_1-m} r_n,$$

pelo argumento usado para estimar n_2, obtemos que

$$n_1 - m \leq (1+\delta)^n \frac{\log r_0}{\log \lambda}.$$

Como $n_1 = n_1 - m + m$, isto nos dá a estimativa procurada para o tamanho de n_1.

Com isto, obtemos a existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$n_1 + n_2 \leq C_2(1+\delta)^n.$$

Pela definição de $T(a)$, é imediato que

$$T(a) \leq C_2(1+\delta)^n.$$

A estimativa por baixo para $T(a)$ no caso $a \in S_n$ é análoga. □

Agora vamos estimar o número de k-cordas contidas em S_n, o qual será denotado daqui pra frente por $\nu_k(S_n)$. Tome $1+\delta < \xi < 2$ e um natural $s > 0$ tal que $2s - 1 > \xi s$. Daí, se $r > s$ então

$$r > s > \frac{1}{2-\xi},$$

e portanto $2r - 1 > \xi r$.

Lema 9.3.8. *Suponha que exista $N > 0$ tal que a propriedade a) do lema 9.3.2 não seja satisfeita. Então*

$$\nu_k(S_n) \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)\nu_k(S_{n-1}),$$

para todo $k > 0$ e todo $n > N$ tais que $\nu_k(S_n) > s$.

Demonstração. Como estamos assumindo que o item a) do lema 9.3.2 não é verdade para N, temos que para todo $n \geq N$, e quaisquer duas k-cordas $\sigma_1 < \sigma_2$ contidas em S_{n+1}, existe uma k-corda $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ que intersecta S_n. Logo, se $\sigma_1 < ... < \sigma_l$, onde $l = \nu_k(S_n)$ são as k-cordas contidas em S_n, para cada $i = 1, ..., l-1$, existe uma k-corda $\sigma_i < \hat{\sigma}_i < \sigma_{i+1}$, tal que $\hat{\sigma}_i \cap S_{n-1} \neq \emptyset$. Então, por definição de S_n e pela definição de k-cordas, temos que $\hat{\sigma}_i \subset S_{n-1}$. Logo, S_{n-1} contém as k-cordas $\hat{\sigma_1}, ..., \hat{\sigma_{l-1}}$. Além disso, como $S_n \subset S_{n-1}$, temos que S_{n-1} também contém as k-cordas $\sigma_1, ..., \sigma_l$. Portanto,

$$\nu_k(S_{n-1}) \geq 2l - 1 \geq \xi\nu_k(S_n),$$

pois $\nu_k(S_n) > s$. □

Iremos obter a estimativa sobre $\mu_k(S_n)$ indutivamente, olhando os conjuntos $S_m - S_{m+1}$, com m grande. Como o lema anterior depende de $\nu_k(S_n) > s$, vamos considerar o valor mínimo de n a partir do qual isto deixa de ocorrer, definindo o número

$$r(k) = \min\{j; \nu_k(S_j) \leq s\}.$$

Daí, como S_n pode ser escrito como a união dijunta

$$S_n = S_{r(k)} \cup \bigcup_{n \leq j < r(k)} S_j - S_{j+1},$$

temos que

$$\mu_k(S_n) = \mu_k(S_{r(k)}) + \sum_{n \leq j < r(k)} \mu_k(S_j - S_{j+1}). \tag{9.7}$$

Naturalmente, pela estimativa acima não queremos que $r(k)$ seja limitado.

Lema 9.3.9. *Se existe $N > 0$ tal que b) do lema 9.3.2 não vale, então*

$$\lim_{k\to\infty} r(k) = \infty.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que a conclusão do lema não seja verdadeira. Então, existe $n_0 > 0$ tal que $r(k) \leq n_0$, para todo $k > 0$. Logo, $\nu_k(S_n) \leq s$ para todo $n \geq n_0$, pois, como os conjuntos S_n são decrescentes, $\nu_k(S_m) \leq \nu_k(S_n)$, sempre que $m \geq n$. Além disso, existem k e n arbitrariamente grandes tais que $\nu_k(S_n) \geq 1$, pois se isto não for verdade teremos que para todos k e n suficientemente grandes $\nu_k(S_n) = 0$, mas isto implica que $\mu_k(S_n) = 0$ para todo k e n suficientemente grandes, o que, como vimos acima em 9.5 e 9.6, implica que $\mu(\{p\}) = 0$. Daí, podemos tomar n e k grandes o bastante para que $n - s > n_0$, $n - s > N$ e $\nu_k(S_n) \geq 1$. Logo, existe uma k-corda contida em S_n. Como não vale o item b) do lema 9.3.2, e como $n > N$, existe uma k-corda contida em S_{n-1}. Similarmente, como $n - 1 > N$, deve existir uma k-corda contida em S_{n-2}. Prosseguindo dessa maneira, iremos obter que $\nu_k(S_{n-s}) \geq s + 1$, o que é um absurdo, uma vez que $n - s > n_0$ implica $\nu_k(S_{n-s}) \leq s$. □

O próximo lema aplica o lema 9.3.8 e o lema 9.3.7 para obter uma estimativa sobre $\mu(S_j - S_{j+1})$, se $\nu_k(S_j) > s$.

Lema 9.3.10. *Suponha que o ítem a) do lema 9.3.2 não seja verdade para um certo $N > 0$. Então,*

$$\mu_k(S_n - S_{n+1}) \leq C_2 \left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^n (1+\delta)\xi^N,$$

para todo $k > 0$ tal que $\nu_k(S_n) > s$.

Demonstração. Pelo lema 9.3.8,

$$\nu_k(S_n) \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{n-N} \nu_k(S_N),$$

para todo $k > 0$ e $n > N$ tal que $\nu_k(S_n) > s$. Considere T o supremo dos comprimentos de k-cordas contidas em $S_n - S_{n+1}$. Então,

$$\begin{aligned} \mu_k(S_n - S_{n+1}) &= \left(\frac{1}{n_k}\right)\mathrm{Card}\{1 \leq j \leq n_k; f^j(x) \in S_n - S_{n+1}\} \\ &\leq \left(\frac{1}{n_k}\right) T\left(\nu_k(S_n) - \nu_k(S_{n+1})\right) \leq \left(\frac{1}{n_k}\right) T\nu_k(S_n). \end{aligned}$$

Aplicando o lema 9.3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_k(S_n - S_{n+1}) &\leq C_2(1+\delta)^{n+1}\frac{1}{n_k}\nu_k(S_n) \\ &\leq C_2(1+\delta)^{n+1}\frac{1}{n_k}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{n-N}\nu_k(S_N), \end{aligned}$$

contudo

$$\left(\frac{1}{n_k}\right)\nu_k(S_N) \leq 1,$$

pois, por definição, o número total de k-cordas não supera n_k. Daí segue imediatamente a estimativa procurada. □

Agora vamos considerar o caso em que $\nu_k(S_n) \leq s$.

Lema 9.3.11. *Suponha que exista $N > 0$ tal que o ítem b) do lema 9.3.2 não é verdade. Então,*

$$\nu_k(S_n) \leq C_2 C_1^{-1}(1+\delta)^{s+2} s \mu_k(S_{n-2} - S_n),$$

para todo $n > N + 2$ e $k > 0$ tal que $\nu_k(S_n) \leq s$.

Demonstração. Considere $n > N + 2$ e $k > 0$. Se S_n não contém k-cordas, o resultado é verdadeiro. Daí, podemos supor que S_n contém ao menos uma k-corda. Mas como b) do lema 9.3.2 não vale, temos que $S_{n-1} - S_n$ contém uma k-corda. Como $n - 1 > N$, pela mesma razão, $S_{n-2} - S_{n-1}$ contém uma k-corda σ. Aplicando o lema 9.3.7, vemos que o comprimento de σ é maior ou igual do que $C_1(1+\delta)^{n-2}$. Daí, temos que

$$\mu_k(S_{n-2} - S_n) \geq \left(\frac{1}{n_k}\right) C_1 (1+\delta)^{n-2}.$$

Por outro lado, já vimos que $\mu_k(S_n)$ é menor do que ou igual ao maior comprimento de k-cordas contidas em S_n vezes o número de k-cordas em S_n. Denotando por T este comprimento, isto se traduz em

$$\mu_k(S_n) \leq \left(\frac{1}{n_k}\right) T \nu_k(S_n).$$

Pelo lema 9.3.7, $T \leq C_2(1+\delta)^n \leq C_2(1+\delta)^{n+s}$. Portanto, como $\nu_k(S_n) \leq s$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_k(S_n) &\leq \left(\frac{1}{n_k}\right) C_2 (1+\delta)^{n+s} s \\ &= \left(\frac{1}{n_k}\right) C_2 (1+\delta)^{n+s} s \left(\frac{C_1(1+\delta)^{n-2}}{C_1(1+\delta)^{n-2}}\right) \\ &= C_2 C_1^{-1} (1+\delta)^{s+2} s \mu_k(S_{n-2} - S_n). \end{aligned}$$

□

Finalmente, estamos prontos para completar a prova do lema 9.3.2. Suponhamos então que exista um $N > 0$ tal que a) e b) do lema 9.3.2 são ambos falsos.

Já temos quase tudo pronto. Como dissemos, a idéia é obter uma cota superior para $\mu_k(S_n)$ que seja arbitrariamente pequena quando k e n são suficientemente grandes. Para tanto, usaremos a igualdade 9.7. Observe que, pela definição de $r(k)$, $\nu_k(S_j) > s$, para todo $j < r(k)$. Por isso, para estimar a segunda parcela da igualdade 9.7 basta usar o lema 9.3.10, do qual obtemos

$$\mu_k(S_j - S_{j+1}) \leq C_3 \left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^j,$$

para todo $N < j < r(k)$. Por outro lado, pelo lema 9.3.9, se k é suficientemente grande então $r(k) > N + 2$. Daí, podemos aplicar o lema 9.3.11 para estimar a primeira parcela obtendo

$$\mu_k(S_{r(k)}) \leq C_2 C_1^{-1}(1+\delta)^{s+2} s \mu_k(S_{r(k)-2} - S_{r(k)}).$$

Contudo, observe que pela definição de $r(k)$ temos que $\nu_k(S_{r(k)-1}) > s$ e como $r(k)-2 > N$ aplicando o lema 9.3.10 obtemos

$$\begin{aligned}
\mu_K(S_{r(k)-2} - S_{r(k)}) &= \mu_k(S_{r(k)-2} - S_{r(k)-1}) + \mu_k(S_{r(k)} - S_{r(k)-1}) \\
&\leq C_3\left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^{r(k)-2} + C_3\left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^{r(k)-1} \\
&\leq 2C_3\left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^{r(k)-2},
\end{aligned}$$

onde $C_3 = C_2(1+\delta)\xi^N$, e porque $\left(\frac{1+\delta}{\xi}\right) < 1$. Portanto, se $n > N$ e k é grande, pondo $C_4 = 2sC_2C_1^{-1}C_3(1+\delta)^{s+2}$, temos que

$$\mu_k(S_n) \leq C_4\left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^{r(k)-2} + C_3 \sum_{n\leq j<r(k)} \left(\frac{1+\delta}{\xi}\right)^j,$$

donde segue imediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu_k(S_n) = 0,$$

como queríamos provar.

Referências Bibliográficas

[1] Abdenur, F. Bonatti, C. Crovisier, S. Díaz, L. *Generic diffeomorphisms on compact surfaces*. Fund. Math. 187 (2005), no. 2, 127-159.

[2] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov. 90 1967 209 pp

[3] Araújo, A. *Existência de atratores hiperbólicos para difeomorfismos de superfícies*. Tese, IMPA, 1987.

[4] Arbieto, A. Matheus, C. Moreira, C. *Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2007.

[5] Barreira, L. Pesin, Y. *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. University Lecture Series, 23. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002

[6] Bonatti, C. Crovisier, S. *Récurrence et généricité*. Invent. Math. 158 (2004), no. 1, 33-104.

[7] Bonatti, C. Li, M. Yang, D. *On the existence of attractors*. Preprint, Arxiv, 2009

[8] Bonatti, C. Díaz, L. Viana, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics, III. Springer-Verlag, Berlin, 2005

[9] Bowen, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Second revised edition. Lecture Notes in Mathematics, 470. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[10] Brin, M. Stuck, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[11] Crovisier, S. *Partial hyperbolicity far from homoclinic bifurcations*, Preprint, Arxiv, 2009.

[12] Crovisier, S. Pujals, E. *Essential hyperbolicity and homoclinic bifurcations: a dichotomy phenomenon/mechanism for diffeomorphisms*. Preprint, 2010.

[13] de Melo, W. Palis, J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Publicação IMPA, Projeto Euclides, (1978).

[14] Evans, L. Gariepy, R. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992

[15] Franks, J. *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*. Trans. Amer. Math. Soc. 158, (1971), 301-308

[16] Hayashi, S. *Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1$ satisfy Axiom A*. Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), no. 02, 233-253.

[17] Hirsch, M. W. Pugh, C. C. Shub, M. *Invariant manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977

[18] Katok, A. *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 51 (1980), 137-173.

[19] Kelley, J.*General topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975.

[20] Lima, E. *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2009.

[21] Oliveira, K. *Um Primeiro Curso em Teoria Ergódica com Aplicações*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2005

[22] do Carmo, M. *Geometria Riemannina*. Projeto Euclides, IMPA, 2008

[23] Mañé, R. *Introdução à Teoria Ergódica*. Projeto Euclides, IMPA, (1983).

[24] Mañé, R. *An ergodic closing lemma*. Ann. of Math. (2) 116 (1982), no. 3, 503-540.

[25] Mañé, R. *A proof of the C^1 Stability Conjecture*. Publ. Math. I. H. E. S., (1988), 66, 161-210.

[26] Mañé, R.*On the creation of homoclinic points*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 139-159.

[27] Milnor, J. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[28] Newhouse, S. *Lectures on dynamical systems. Dynamical systems* (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978), pp. 1-114, Progr. Math., 8, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[29] Obata, D. *Resultados na Teoria de Dinâmica Genérica*. Monografia de Iniciação Científica, UFRJ, 2010.

[30] Pliss, V. *On a conjecture due to Smale*. Diff. Uravnenija 8 (1972), 268-282.

[31] Pollicott, M. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 180. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[32] Potrie, R. *A proof of the existence of attractors in dimension 2*, Preprint, 2009.

[33] Pujals, E. and Sambarino, M. *Homoclinic tangencies and hyperboli- city for surface diffeomorphisms*. Ann. of Math. (2) v.151, (2000), no. 3, 961-1023.

[34] Pugh, C.*The closing lemma*. Amer. J. Math. 89 1967 956-1009

[35] Robinson, C. *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[36] Royden, H. L. *Real analysis*. Third edition. Macmillan Publishing Company, New York, 1988

[37] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.

[38] Steenrod, N. *The topology of fibre bundles*. Reprint of the 1957 edition. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[39] Rudin, W. *Functional analysis*. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991

[40] Shub, M. *Global stability of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1987

[41] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982