O TEOREMA ERGÓDICO DE BIRKHOFF

BRUNO SANTIAGO

Resumo. Neste artigo expositório discutiremos a prova clássica do teorema ergódico de Birkhoff, via o teorema ergódico maximal. Buscaremos explorar os significados dos argumentos envolvidos.

1. Introdução

Considere $(X, \mathbf{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, e $T : X \to X$ uma transformação que preserva a probabilidade, i.e, $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$. Fixe A um subconjunto de X. O teorema da recorrência de Poincarè diz que quase todo ponto visita A infinitas vezes. Suponha que nosso objetivo seja melhorar essa afirmação tornando-a mais quantitativa. Ou seja, queremos responder perguntas, por exemplo, do tipo: existe conjunto A tal que quase todo ponto em A retorna exatamente no iterados T^p com p primo?

Uma tentativa razoável seria fazer uma média do números de visitas dos iterados de 1 até n, e enxergar o comportamento assintótico dessa média. Em outras palavras, calculamos o tempo médio de permanência da órbita de um determinado ponto $x \in X$ via

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A\left(T^j(x)\right)$$

onde χ_A é a função característica do conjunto A, e tomamos o limite quando $n \to \infty$, obtendo assim um espécie de média assintótica do número de visitas do iterado $T^j(x)$ ao conjunto A. Claramente, essa idéia depende da existência ou não do limite. O Teorema Ergódico de Birkhoff nos ensina que para quase todo ponto o limite existe, e, além disso, em média ao calcular esse limite o resultado será $\mu(A)$. Eis a versão mais completa de tal enunciado:

Teorema 1.1 (**Teorema Ergódico de Birkhoff**). *Seja $(X, \mathbf{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ. Então, dada qualquer função integrável $f : X \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j(x)\right)$$

Date: 8 de maio de 2013.

existe para μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, se $f \in L^p(\mu)$ então $\widetilde{f} \in L^p(\mu)$, $\widetilde{f} \circ T = \widetilde{f}$, a convergência das médias para $\widetilde{f}$ se dá na norma L^p, tem-se $\left\|\widetilde{f}\right\|_p \leq \|f\|_p$ e $\int \widetilde{f} d\mu = \int f d\mu$.

Vamos dividir a prova em três etapas. Na primeira vamos estabelecer o Teorema Ergódico Maximal, parte importante da prova, e que também possui brilho próprio. Na seção seguinte, estabeleceremos a existência q.t.p das médias temporais, que é a parte essencial do enunciado. Na terceira seção, combinando e existência das médias temporais com teoria da medida básica, terminaremos a demostração.

2. O Teorema Ergódico Maximal

Conforme vimos na intrudução nossa motivação para estudar o teorema de Birkhoff foi seguinte problema: é possível estimar o tempo médio de permanência de órbitas típicas em conjuntos mensuráveis?

Em Matemática é sempre útil, para resolver um bom problema, atacar primeiro um problema mais simples. Desse modo, considere a seguinte versão *light* da pergunta acima: quão provável é uma órbita típica passar muito tempo visitando um conjunto de medida pequena?

Seja $B \subset X$, $\mu(B) = \varepsilon$. Vamos estipular que um tempo médio de visita igual $\sqrt{\varepsilon}$ é muito tempo. A pergunta agora é quão provável é uma órbita típica visitar B numa média $> \sqrt{\varepsilon}$? Repare que isto significa estimar

$$\mu(\{x \in X; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_B(T^n x) > \sqrt{\varepsilon}\}).$$

Fixado n, fazer tal estimativa é tarefa simples. Com efeito, usaremos apenas o fato corriqueiro de que a medida de um conjunto é a integral de sua função característica. É fácil ver que

$$\chi_{\{x\in X; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_B(T^n x) > \sqrt{\varepsilon}\}}(x) \leq \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_B(T^n x)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Integrando e usando que que T preserva μ, segue que

$$\mu(\{x \in X; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_B(T^n x) > \sqrt{\varepsilon}\}) \leq \frac{\mu(B)}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Um resulto mais interessante seria a existência de um conjunto com medida no máximo $\sqrt{\varepsilon}$ tal que fora dele nenhum ponto passa mais do que $\sqrt{\varepsilon}n$ iterados visitando B, para todo n.

Por mais sutil que isso seja, com a tecnologia disponível é possível dar uma prova elegante disso através do seguinte resultado:

Teorema 2.1 (**Teorema Ergódico Maximal**). *Seja $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida. Se $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ e*

$$B_\alpha = \left\{ x \in X; \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(T^i(x)\right) > \alpha \right\}$$

então

$$\int_{B_\alpha \cap A} g d\mu \geq \alpha \mu (B_\alpha \cap A)$$

se $T^{-1}A = A$.

Basta tomar $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ e $g = \chi_B$. A seguir daremos a prova clássica do teorema ergódico maximal, que começa com a seguinte desigualdade para operadores positivos:

Proposição 2.2 (**Desigualdade Maximal**). *Seja $U : L^1_{\mathbb{R}} \to L^1_{\mathbb{R}}$ um operador linear positivo com $\|U\| \leq 1$. Dado $N > 0$ um natural e $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, defina $f_0 = 0$, $f_n = f + Uf + U^2 f + ... + U^{n-1} f$, e $F_N = max_{0 \leq n \leq N} f_n$. Então $\int_{[x:F_N(x)>0]} f d\mu \geq 0$*

Demonstração. Note que $F_N \geq 0$ e $F_N \in L^1_{\mathbb{R}}$. Para cada $0 \leq n \leq N$ temos naturalmente $F_N \geq f_n$. Por positividade e linearidade $UF_N \geq Uf_n$. Segue daí que

$$UF_N + f \geq Uf_n + f = f_{n+1}.$$

Portanto

$$UF_N(x) + f(x) \geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n(x).$$

Contudo, se $F_N(x) > 0$ então $\max_{1 \leq n \leq N} f_n = max_{0 \leq n \leq N} f_n(x)$ e pondo $A = \{x; F_N(x) > 0\}$ concluimos que

$$UF_N(x) + f(x) \geq F_N(x) \, \forall x \in A$$

$$\therefore f \geq F_N - UF_N \; em \; A$$

Donde

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &\geq \int_A F_N d\mu - \int_A UF_N d\mu = \int_X F_N d\mu - \int_A UF_N d\mu \\ &\geq \int_X F_N d\mu - \int_X UF_N d\mu. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre pois $F_N = 0$ em X/A, e desigualdade que vem em seguida vale porque $F_N \geq 0$, e portanto $UF_N \geq 0$.

Por fim, note que $\|U\| \leq 1$ nos diz que $\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}$ vale $\left|\int_X Uf d\mu\right| \leq \left|\int_X f d\mu\right|$. Como U é positivo e F_N é não-negativa, obtemos que o lado direito na última desigualdade acima é não-negativo, como queríamos. ◻

Prova do Teorema Ergódico Maximal. Primeiro suponha $A = X$. Neste caso, teorema ergódico maximal é uma consequência muito simples da desigualdade maximal. Com efeito, tome nela $Uf = f \circ T$, e $f = (g - \alpha)$. Então

$$\sum_{i=0}^{n-1} U^i f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) - n\alpha.$$

Dái é fácil ver que $F_N(x) > 0$ se, e somente se, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) > \alpha$.

Portanto, pela desigualdade maximal temos que

$$0 \leq \int_{B_\alpha} (g-\alpha)d\mu = \int_{B_\alpha} gd\mu - \mu(B_\alpha),$$

como queria demonstrar. No caso geral é só aplicar isto com $T|_A$. □

3. A existência q.t.p das médias temporais

Seja $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, e defina

$$f^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(T^i(x)\right)$$

e

$$f_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(T^i(x)\right).$$

Nosso trabalho nessa seção será mostrar que $f^* = f_*$ em quase toda parte.

Naturalmente para fazer isso temos que estimar a medida do conjunto $f^* > f_*$. De fato, esse é o conjunto ruim, e nossa tarefa é provar que ele tem medida nula. Observe que podemos descrevê-lo apenas pelos números racionais. Em outras palavras, sendo α e β números reais, e $E_{\alpha,\beta} = \{x \in X; f_*(x) < \beta \ e \ \alpha < f^*(x)\}$, podemos escrever

$$\{x; f_*(x) < f^*(x)\} = \bigcup \left\{E_{\alpha,\beta}; \beta < \alpha \ e \ \beta, \alpha \in \mathbb{Q}\right\}$$

Essa observação simples já traz bastante luz ao problema: agora basta provar que, fixados α e β racionais, tem-se $\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right) = 0$.

Isso é feito através do Teorema Ergódico Maximal. Note que $E_{\alpha,\beta} \subset B_\alpha$. Supondo que $E_{\alpha,\beta}$ é um conjunto invariante segue do teorema ergódico maximal que

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} fd\mu = \int_{E_{\alpha,\beta}\bigcap B_\alpha} fd\mu \geq \alpha\mu\left(E_{\alpha,\beta}\bigcap B_\alpha\right) = \alpha\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right).$$

Trocando f por $-f$, e notando que aí o $\limsup$ se torna $\liminf$, pelo mesmo argumento vemos que

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f\mu \leq \beta\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right).$$

Juntando essas duas desigualdades segue que $\alpha\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right) \leq \beta\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right)$, logo $\alpha > \beta$ implica $\mu\left(E_{\alpha,\beta}\right) = 0$.

Portanto, precisamos estudar a invariância do conjunto $E_{\alpha,\beta}$. Como eu sou muito criança para entrar em adapatções rebuscadas e revitalizações criativas do argumento acima, é de se esperar que isto seja verdade. De fato, é consequência do fato mais límpido de que as funcões f^* e f_* são funções invariantes. A prova desse fato é um exercício de análise na reta: se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ são sequências de números reais, com $y_n \to 0$ e $\lambda_n \to 1$ então $\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n$ e $\limsup \lambda_n x_n = \limsup x_n$, pois as sequências envolvidas nas igualdades têm sempre os mesmos valores de aderência. Pelo exercício de análise na reta, vemos que

$$\begin{aligned} f^*(Tx) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(T^i x\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f(T^n x) + \sum_{i=0}^{n-1} f\left(T^i x\right) - f(x)\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f\left(T^i x\right) = f^*(x). \end{aligned}$$

Como queríamos estabelecer. □

4. Exercícios

Nesta seção estamos assumindo tudo que que foi feito até aqui, inclusive as notações utilizadas. Dividiremos o restante da prova numa série de lemas, e daremos algumas outras propriedades elementares que também decorrem da existência q.t.p das médias temporais. Começamos provando a integrabilidade da média temporal.

Lema 4.1. *Se $f \in L^p$ então $\widetilde{f} \in L^p$.*

Demonstração. Como a função $x \mapsto |x|$ é contínua, para um ponto típico $x \in X$ temos que

$$|\widetilde{f}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j x)|,$$

e portanto, como $x \mapsto x^p$ é contínua,

$$|\widetilde{f}|^p \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|f(T^j x)|\right)^p. \tag{1}$$

Agora observe que

$$\int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j| \right)^p d\mu = \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j| \right) \right\|_p^p \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f \circ T^j\|_p \right)^p, \tag{2}$$

pela desigualdade triangular e pelo fato de que a função $x \mapsto x^p$ é crescente. Usando que T preserva μ, temos que $\|f \circ T^j\|_p = \|f\|_p$ e portanto segue da desigualdade (2) que

$$\int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j| \right)^p d\mu \leq \|f\|_p^p.$$

Pelo lema de Fatou temos então que

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j| \right)^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j| \right)^p d\mu \leq \|f\|_p^p < +\infty.$$

Pela estima (1) obtemos finalmente que

$$\int_X |\widetilde{f}|^p d\mu < \infty,$$

o que completa a prova. □

Agora vamos provar que a média temporal converge também em L^p.

Lema 4.2. *Se* $f \in L^p$ *então* $\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j - \widetilde{f}\|_p \to 0$

Demonstração. Começamos provando o caso L^∞. Os demais casos seguem por argumentos de aproximação canônicos em análise. Nesse caso, por continuidade da função módulo e desigualdade triangular vemos que $\|\widetilde{f}\|_\infty \leq \||\|f\|_\infty$. Indo além na desigualdade triangular vemos que

$$|\widetilde{f}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)|^p \leq \||\|f\|_\infty + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f \circ T^j\|_\infty|^p \leq 2^p \|f\|_\infty.$$

Além disso, pela existência das médias temporais, a função

$$|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j - \widetilde{f}|^p$$

converge em quase toda parte à zero. Como acabamos de ver, esta convergência é dominada por uma constante. Do teorema da convergência dominada, segue então que

$$\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j - \widetilde{f}\|_p^p \to 0.$$

Se $f \in L^p$ tome $g \in L^\infty$ ε perto de f na norma p. Note que $\|(f-g)\circ T\|_p = \|f-g\|_p$, porque μ é invariante. Daí, as médias em tempo n de f e g sempre diferem ε Além disso, $\widetilde{f} - \widetilde{g} = (\widetilde{f-g})$ e como provamos acima que a norma p da média temporal é dominada pela norma p do observável, segue que $\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_p < \varepsilon$. Agora você estima a distância na norma p entre $\widetilde{f}$ e as suas médias a tempo n interpolando com a média temporal da g e as médias a tempo n da g. Para todo n grande você tem que a distância na norma p entre as médias a tempo n de g e a média temporal de g são menores do que ε, portanto todos os termos na desgualdade triangular são menores do que ε, provando que

$$\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j - \widetilde{f}\|_p < 3\varepsilon,$$

para todo n grande. □

Note que já provamos que a média temporal é uma função invariante, quando provamos que f^* é uma função invariante.

Por fim, vamos provar que em média espacial da média temporal é igual a média espacial do observável.

Lema 4.3. $\int_X \widetilde{f} d\mu = \int_X f d\mu$

Demonstração. Pelo lema 4.1, temos que as médias temporais convergem em L^1, donde segue que

$$\lim \int \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j d\mu = \int \widetilde{f} d\mu.$$

Porém, como μ é invariante

$$\int \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j d\mu = \int f d\mu.$$

□

Cabem aqui agora alguns comentários sobre referências. A prova do teorema ergódico maximal e da existência qtp das médias tmporais foi retirada de [2]. Os exercícios foram praticamente copiados de [3]. A motivação para o teorema ergódico maximal tem em [1]

Referências

[1] Einsiedler, M. Ward, T. *Ergodic theory with a view towards number theory.* Graduate Texts in Mathematics, 259. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011

[2] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982

[3] Mañé, R. *Introdução à Teoria Ergódica*. Projeto Euclides, IMPA, (1983).

Bruno Santiago
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
P. O. Box 68530
21945-970 Rio de Janeiro, Brazil
E-mail: bruno_santiago@im.ufrj.br