UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Segunda Avaliação – Complementos de Matemática Aplicada
Professor: Bruno Santiago

1. (2pt.) Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Determine os pontos de inflexão de $f(x)$, i.e. os pontos onde a derivada segunda de f se anula.

   Solução Note que $f(x)$ é a composta das funções e^x e $-\frac{x^2}{2}$, cujas derivadas são, respectivamente, e^x e $-x$. Pela regra da cadeia, $f'(x) = -xe^{\frac{x^2}{2}}$. Para calcular a derivada segunda de $f(x)$ utilizamos a regra do produto. Assim,

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Logo, $f''(x) = 0$ se, e somente se,

$$x^2 - 1 = 0,$$

   portanto se $x = -1$ ou $x = 1$. Concluímos que estes são os pontos de inflexão de f.

2. (3pt.) Determine as derivadas das funções a seguir:

   (a) $f(x) = e^{3x}$

   (b) $f(x) = (\ln 2x)^4$

   (c) $f(x) = e^{3x}(\ln 2x)^4$ (*Dica:* utilize as respostas dos itens acima.)

   Solução

   (a) $f(x)$ é a composta das funções e^x e $3x$, logo, pela regra da cadeia $f'(x) = 3e^{3x}$.

   (b) $f(x)$ é a composta das funções $\ln(2x)$ e x^4. Como $\ln(2x)$ é a composta de $\ln x$ e $2x$, e como a derivada de $\ln x$ é $\frac{1}{x}$, temos que a derivada de $\ln(2x)$ é $\frac{2}{2x}$. Logo, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{4}{x}(\ln(2x))^3.$$

   (c) Pela regra do produto

$$f'(x) = 3e^{3x}(\ln 2x)^4 + \frac{4e^{3x}}{x}(\ln(2x))^3.$$

3. (2pt.) Seja $f(x) = \ln(x^{10} + 7x^7)$. Determine a função derivada $f'(x)$ e, em seguida, determine a integral indefinida

$$\int \frac{10x^9 + 49x^6}{x^{10} + 7x^7} dx.$$

   Solução Note que $f(x)$ é a composta das funções $\ln x$ e $x^{10} + 7x^7$, cujas derivadas são, respectivamente, $\frac{1}{x}$ e $10x^9 + 49x^6$. Logo, pela regra da cadeia temos que

$$f'(x) = \frac{10x^9 + 49x^6}{x^{10} + 7x^7}.$$

De imediato, vemos que $f(x)$ é uma integral indefinida de $\frac{10x^9+49x^6}{x^{10}+7x^7}$, donde segue que

$$\int \frac{10x^9 + 49x^6}{x^{10} + 7x^7} dx = \ln(x^{10} + 7x^7) + c.$$

4. (2pt.) Determine as integrais a seguir

   (a) $\int (1 + 2x + 3x^2 + 2x^3)\, dx$

   (b) $\int 2x\,(x^2 + 1)^3\, dx$

   Solução

   (a) $\int (1 + 2x + 3x^2 + 2x^3)\, dx = x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + c$, pois

   $$\frac{d}{dx}\left(x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + c\right) = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3.$$

   (b) $\int 2x\,(x^2 + 1)^3\, dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$, pois

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c\right) = 2x\left(x^2 + 1\right)^3.$$

5. (1pt.) Calcule a área delimitada pelo gráfico da função $f(x) = xe^x$, o eixo horizontal e as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$ (*Dica:* utiliza integração por partes para determinar a integral indefinida de xe^x).

   Solução Lembrando da fórmula de integração por partes

   $$\int u'(x)g(x)dx = u(x)g(x) - \int u(x)g'(x)dx,$$

   iremos substituir nela $u'(x) = e^x$ e $g(x) = x$. Como a derivada de e^x é e^x, devemos ter $u(x) = e^x$. Além disso, $g'(x) = 1$. Portanto,

   $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

   Finalmente, a área delimitada pelo gráfico da função $f(x) = xe^x$, o eixo horizontal e as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$ é a integral definida

   $$\int_1^2 xe^x dx = 2e^2 - e^2 - e + e = e^2.$$