UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Lista de Exercícios I – Equações Diferenciais Ordinárias I

Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função Lipschitz e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua. Considere o campo de vetores* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$F(x, y) = (f(x), g(x)y).$$

Mostre que, para cada $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *a equação*

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= F(\alpha(t)) \\ \alpha(0) &= p \end{aligned}$$

admite uma única solução $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$*, para algum* $\varepsilon > 0$.

Exercício 2. *Seja* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $\langle f(x), x\rangle \leq 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^d$*. Prove que para cada* $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *e cada* $t_0 \in \mathbb{R}$ *a solução da equação*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

está definida para todo tempo $t > t_0$*. Sob as mesmas condições, as soluções devem ser globais? Mostre ou dê um contra-exemplo.*

Observação 1. *Dados* $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ *e* $y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$ *o* produto interno *entre* x *e* y *é o número* $\langle x, y\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell$.

Exercício 3. *Seja* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *um campo de vetores Lipschitz e limitado, i.e. existe* $c > 0$ *tal que* $\|f(x)\| \leq c$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^d$*. Prove que todas as soluções da equação* $x'(t) = f(x(t))$ *são globais. Dê um exemplo de uma equação com soluções globais mas que não seja gerada por um campo limitado.*