UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Lista de Exercícios II – Equações Diferenciais Ordinárias I
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *Considere o campo de vetores*

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (e^x, 0) \end{aligned}$$

Alguma trajetória da equação $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ *é periódica?*

Exercício 2. *Prove que a equação*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^2 \\ y'(t) &= y(t)^2 \end{aligned}$$

não possui soluções periódicas. Alguma das soluções é uma singularidade?

Exercício 3. *Considere a equação*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^2 + 2x(t)y(t) - x(t) \\ y'(t) &= -2x(t)y(t) - y(t)^2 + y(t) \end{aligned}$$

(a) *Verifique que* $\varphi(x,y) = xy(x+y-1)$ *é constante ao longo de trajetórias da equação, i.e. se* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *resolve a equação então* $\varphi(\gamma(t)) = cte$.

(b) *Verifique que as únicas singularidades são* $(0,0), (1,0), (0,1)$ *e* $(1/3, 1/3)$.

(c) *Determine todas as curvas de nível de* φ *que passam pelas singularidades* $(0,0), (1,0), (0,1)$ *e use isso para demonstrar que existem órbitas heteroclínicas.*

(d) *Prove que existem soluções periódicas.*

Exercício 4. *Considere a equação no plano (em coordenadas polares)*

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t)(1 - r(t)) \\ \theta'(t) &= 1 \end{aligned}$$

Mostre que existem soluções periódicas. Esboce o retrato de fase.

Exercício 5. *Seja* $f(x,y) = (x(x^2+y^2-3x-1)-y, y(x^2+y^2-3x-1)+x)$ *um campo de vetores em* $\mathbb{R}^2$*. Use coordenadas polares e o Teorema de Poincaré-Bendixon para deduzir que a equação* $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ *possui trajetórias periódicas.*

Exercício 6. *Dada uma função* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*, considere a equação no plano* $x'(t) = \nabla\varphi(x(t))$*. Mostre que qualquer conjunto* ω*-limite não-vazio é uma singularidade, e portanto um ponto crítico de* φ*.*

Exercício 7. *Considere a equação*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^2 - y(t)^2 \\ y'(t) &= x(t)^2 + y(t)^2. \end{aligned}$$

(a) Mostre que existe uma reta invariante que contém a origem.

(b) Mostre que não existem órbitas periódicas

Exercício 8. *Dê um exemplo de um campo de vetores com órbitas periódicas mas sem singularidades.*