UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Avaliação Individual I – Álgebra Linear I
Professor: Bruno Santiago

Apresente suas soluções de forma clara e completa, justificando cada etapa do raciocínio.

Questão 1 (1,0 pt)**.** *Sejam* $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$*. Prove que* $\{u, v, w\}$ *é um conjunto LD e determine a dimensão do subespaço* $\mathcal{S}(u, v, w)$ *gerado por* u, v *e* w*.*

Solução. Observe que u e v são não-colineares, pois $\frac{4}{1} \neq \frac{5}{2}$. Além disso, w é combinação linear de u e v pois podemos escrever

$$w = 2v - u.$$

Isso mostra que $\{u, v, w\}$ é um conjunto LD e $\mathcal{S}(u, v) = \mathcal{S}(u, v, w)$. Como $\{u, v\}$ é LI, pois u e v são não colineares, temos que

$$\dim \mathcal{S}(u, v, w) = 2. \quad \square$$

Questão 2 (3,0 pt)**.** *Decida se as frases a são seguir são verdadeiras ou falsas:*

1. *o vetor* $(1, 10^{100}, 1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao subespaço gerado por* $(1, 10^{100}, 0)$ *e* $(1, 0, 0)$*.*
2. *os vetores* $(1, 2, 3)$*,* $(4, 5, 6)$ *e* $(6, 9, 12)$ *são linearmente independentes*
3. *O subespaço gerado pelos vetores* $(1, 2, 3)$*,* $(4, 5, 6)$ *e* $(2, 4, 6)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *possui dimensão 2.*

Solução.

1. Falso, pois qualquer combinação linear de $(1, 10^{100}, 0)$ e $(1, 0, 0)$ possui a terceira coordenada nula.
2. Falso, pois $2(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (6, 9, 12)$.
3. Verdadeiro. Os vetores $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$ são não-colineares, pois suas coordenadas não são proporcionais (por exemplo, $\frac{4}{1} \neq \frac{5}{2}$) e $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$. Isso prova que $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ é LI e

$$\mathcal{S}(\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (2, 4, 6)\}) = \mathcal{S}(\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}).$$

Portanto, $\dim \mathcal{S}(\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (2, 4, 6)\}) = 2$.

$\square$

Questão 3 (2,0 pt)**.** *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $X, Y \subset E$ dois subespaços de E.*

(a) Prove que $X \cap Y$ também é um subespaço de E.

(b) Prove que $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in E; \exists\, x \in X, y \in Y;\ v = x + y\}$ também é um subespaço.

Solução. (a) Como X e Y são ambos subespaços de E, temos que $0 \in X$ e $0 \in Y$. Logo $0 \in X \cap Y$. Sejam agora $u, v \in X \cap Y$. Vamos provar que $u + v \in X \cap Y$. Com efeito, como X é subespaço e como $u, v \in X$ temos que $u + v \in X$. Como Y é subespaço e como $u, v \in Y$ temos $u + v \in Y$. Logo, $u + v \in X \cap Y$. Considere, finalmente, $u \in X \cap Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos demonstrar que $\lambda u \in X \cap Y$. De fato, como $u \in X$ e como X é subespaço temos que $\lambda u \in X$. Similarmente, como Y é subespaço e como $u \in Y$ temos que $\lambda u \in Y$. Portento, $\lambda u \in X \cap Y$. Isso prova que $X \cap Y$ cumpre todos os requisitos da definição de subespaço e completa a demonstração.

(b) Como na demonstração acima, vamos verificar que $X + Y$ cumpre os três requisitos da definição de subespaço. Primeiramente, observe que podemos escrever $0 = 0 + 0$, e como $0 \in X \cap Y$, concluímos que $0 \in X + Y$. Agora, sejam $u, v \in X + Y$. Vamos provar que $u + v \in X + Y$. Com efeito, como $u \in X + Y$, existem $x_u \in X$ e $y_u \in Y$ tais que

$$u = x_u + y_u.$$

Analogamente, como $v \in X + Y$ existem $x_v \in X$ e $y_v \in Y$ tais que

$$v = x_v + y_v.$$

Somando as duas igualdades e levando em conta a associatividade da soma de vetores temos que

$$u + v = (x_u + x_v) + (y_u + y_v).$$

Como X é subespaço, $x_u + x_v \in X$ e como Y é subespaço, $y_u + y_v \in Y$. Dessa forma, escrevemos $u + v$ como soma de um vetor em X e um vetor em Y. Isso prova que $u + v \in X + Y$. Suponhamos agora que $u \in X + Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $\lambda u \in X + Y$. De fato, como $u \in X + Y$, existem $x_u \in X$ e $y_u \in Y$ tais que $u = x_u + y_u$. Pela distributividade, isso implica que

$$\lambda u = \lambda x_u + \lambda y_u.$$

Como X é subespaço, temos $\lambda x_u \in X$ e como Y é subespaço temos $\lambda y_u \in Y$. Mais uma vez, isso mostra que λu pode ser escrito como soma de um vetor em X e um vetor em Y e portanto demonstra que $\lambda u \in X + Y$, como queria. Isso completa a prova. $\square$

Questão 4 (2,0 pt)**.** *Exiba dois subespaços X e Y de $\mathbb{R}^5$ satisfazendo* $\dim X = \dim Y = 3$ *e* $\dim(X + Y) = 4$. *É possível fazer isso de modo que* $\dim(X \cap Y) = 1$*?*

Solução. Seja $\{e_1, ..., e_5\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^5$. Definimos, $X = \mathcal{S}(e_1, e_2, e_3)$ e $Y = \mathcal{S}(e_2, e_3, e_4)$. Como a base canônica é um conjunto LI, e todo subconjunto de um conjunto LI é também LI, temos que tanto X quanto Y são gerados por 3 vetores LI, portanto $\dim X = \dim Y = 3$. Além disso, temos que $X + Y = \mathcal{S}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Com efeito, se $x \in X$ então existem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Se $y \in Y$ então existem $y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ tai que $y = y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4$. Logo, usando a distributividade temos que

$$x + y = x_1e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3 + y_4e_4.$$

Isso mostra que $X + Y \subset \mathcal{S}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Por outro lado, se $v \in \mathcal{S}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ então, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + \alpha_4e_4 = (\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3) + \alpha_4e_4.$$

Como $\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 \in X$ e $\alpha_4 \in Y$, concluímos que $v \in X + Y$. Portanto, provamos também que $\mathcal{S}(e_1, e_2, e_3, e_4) \subset X + Y$. Juntando as duas inclusões que foram provadas, concluímos que $X + Y = \mathcal{S}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ conforme afirmado. Em consequência disso, temos que $\dim X + Y = 4$.

Em geral, se X, Y são subespaços de um espaço vetorial sabemos que $\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$ (esse é um teorema visto em sala de aula). Logo, se sabemos de antemão que $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ e $\dim(X + Y) = 4$ então somos forçados a ter $\dim(X \cap Y) = 2$, portanto não é possível exibir X e Y como pedidos e satisfazendo ainda $\dim(X \cap Y) = 1$. □

Questão 5 (2,0 pt)**.** *Prove que se* $F \subset E$ *é um subespaço de* E *tal que* $\dim F = \dim E$ *então* $F = E$.

Solução. Suponha por contradição que $E \setminus F \neq \emptyset$. Seja $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_d\}$ uma base de F. Como $E \setminus F \neq \emptyset$, existe $b \in E \setminus F$. Como $F = \mathcal{S}(\mathcal{B})$, temos que b não é combinação linear dos elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{B})$. Afirmo que o conjunto $\{b_1, .., b_d, b\}$ é LI. Com efeito, se não fosse haveriam números reais $\alpha_1, .., \alpha_d, \alpha$, nem todos nulos, tais que

$$\alpha_1b_1 + ... + \alpha_db_d + \alpha b = 0.$$

Devemos ter $\alpha \neq 0$, pois do contrario teríamos

$$\sum_{\ell=1}^{d} \alpha_\ell b_\ell = 0,$$

e como $\mathcal{B}$ é LI, concluiríamos que os números $\alpha_1, .., \alpha_d, \alpha$ são todos nulos. No entanto, se $\alpha \neq 0$ podemos escrever

$$b = \sum_{\ell=1}^{d} -\frac{\alpha_\ell}{\alpha} b_\ell \in \mathcal{S}(\mathcal{B}),$$

contradição. Como $d = \dim F = \dim E$, por hipótese, e como todo conjunto LI tem sempre menos elementos que um conjunto gerador (teorema visto em sala de aula) temos que

$$d + 1 \leq d \implies 1 \leq 0,$$

um absurdo. Isso completa a demonstração. □