UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Lista de Exercícios – Álgebra Linear I

Exercício 1. *Dados os vetores* $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 4, -9)$, $w = (0, 1, -7\pi)$ *e* $y = (0, -87, -e^{-\pi})$ *determine o vetor* $x = u + 8v - 47w + 5y$.

Exercício 2. *Determine os vetores* $u, v \in \mathbb{R}^4$ *sabendo que as coordenadas de* u *são todas iguais, a última coordenada de* v *é igual a* 3 *e* $u + v = (1, 2, 3, 4)$.

Exercício 3. *Mostre que* $v = (9, 46) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear dos vetores* $a = (1, 7)$ *e* $b = (3, 4)$.

Exercício 4. *Considere* $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ *e* $w = (2, 0, 0)$, *vetores em* $\mathbb{R}^3$ *e decida se o vetor* $x = (1, 1, 1)$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores* u, v *e* w. *Em caso afirmativo, determine os números reais* α, β *e* γ *tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Exercício 5. *Seja* E *um espaço vetorial. Prove que* $-(-v) = v$, *para todo* $v \in E$.

Exercício 6. *Sejam* E *um espaço vetorial,* $v \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Suponha que* $\lambda v = 0$. *Prove que ou* $\lambda = 0$ *ou* $v = 0$.

Exercício 7. *Sejam* $\alpha_1, ..., \alpha_d$ *números reais. Mostre que*

$$H = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d; \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$.

Exercício 8. *Considere* $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial das funções reais contínuas. Seja*

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável}\} \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Prove que F *é um subespaço.*

Exercício 9. *Sejam* X *e* Y *subespaços vetoriais de um espaço vetorial* E. *Prove que* $X + Y$ *é um subespaço. Prove que* $X \cap Y$ *também é um subespaço.*

Exercício 10. *Decida se as frases a são seguir são verdadeiras ou falsas:*

1. *o vetor* $(1, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao subespaço gerado por* $(1, 1, 0)$ *e* $(\pi^3, 0, 0)$.
2. *os vetores* $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(2, 4, 6)$ *são linearmente independentes*
3. *os vetores* $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(2, 4, 6)$ *geram* $\mathbb{R}^3$.

*Justifique suas respostas (*Dica: *utilize argumentos geométricos e não faça cálculos).*

Exercício 11. *Mostre que o vetor* $x = (4,1,5)$ *pertence ao subespaço gerado pelos vetores* $u = (1,1,1)$, $v = (3,0,4)$ *e* $w = (7,7,7)$.

Exercício 12. *Mostre que se* $X = \{x_1, ..., x_k\} \subset E$ *é LI então nenhum vetor* $x_i \in X$ *é o vetor nulo.*

Exercício 13. *Mostre que se* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *não pertencem à mesma reta então* $\mathcal{S}(u,v) = \mathbb{R}^2$*; em outras palavras, se* $u \in \mathbb{R}^2$ *não é múltiplo de* $v \in \mathbb{R}^2$ *então* $\{u, v\}$ *é um conjunto de geradores de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 14. *Mostre que* $X = \{(1,2), (-1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ *é um conjunto de geradores de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 15. *Sejam* $u = (1,2,3), v = (4,5,6), w = (7,8,9) \in \mathbb{R}^3$. *Prove que* $\{u, v, w\}$ *é um conjunto LD.*

Exercício 16. *Considere* $a = (37,0,0,0,0)$, $b = (0,47,0,0,0)$, $c = (0,0,\pi^2,0,0)$, $d = (0,0,0,\sin\frac{37}{45},0)$ *e* $e = (0,0,0,0,\frac{7}{8})$ *vetores em* $\mathbb{R}^5$. *Prove que* $\{a,b,c,d,e\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^5$.

Exercício 17. *Sem fazer cálculos, mostre que os vetores* $u = (1,1)$ *e* $v = (-1,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 18. *Prove que se um espaço vetorial* E *é a soma direta de subespaços* $E_1, ..., E_k$ *então*

$$\dim E = \sum_{l=1}^{k} \dim E_l.$$

Exercício 19. *Prove que se* $F \subset E$ *é um subespaço de* E *tal que* $\dim F = \dim E$ *então* $F = E$.

Exercício 20. *Seja* $\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *o operador diferenciação agindo no espaço dos polinômios. Prove que* δ *é linear.*

Exercício 21. *Seja* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o operador linear definido por*

$$A(x,y) = (5x + 4y, -3x - 2y).$$

Encontre vetores não-nulos $u = (x,y)$ *e* $v = (a,b)$ *tais que* $Au = u$ *e* $Av = 2v$.

Exercício 22. *Seja* $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ *tal que* $A(1,1,1,1) = (9,8,0,7,-2)$, $A(1,2,1,-3) = (9,9,9,9,9)$. *Determine* $A(9,9,9,9)$ *e* $A(2,3,2,-2)$.

Exercício 23 (O funcional de integração no espaço dos polinômios)**.** *Seja* $\mathrm{I} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dado por* $\mathrm{I}(p) = \int_0^1 p(x)dx$. *Prove que* I *é linear.*

Exercício 24. *Seja* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear tal que* $A(-1,1) = (1,2,3)$ *e* $A(2,3) = (1,1,1)$. *Determine* $A(25,-37)$.

Exercício 25. *Seja* $A : E \to X$ *uma transformação linear injetiva. Suponha que* $X = \{x_1, ..., x_k\}$ *seja LI. Prove* $A(X) = \{A(x_1), ..., A(x_k)\}$ *também é LI.*

Exercício 26. *Seja* $A : E \to X$ *uma transformação linear sobrejetiva. Suponha que* $X = \{x_1, ..., x_n\}$ *seja gerador de* E *. Prove* $A(X) = \{A(x_1), ..., A(x_n)\}$ *é gerador de* X.

Exercício 27. *Prove que as transformações lineares a seguir são invertíveis (*Sugestão: em cada caso, analise o núcleo da transformação*).*

1. $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $A(x) = (x, 2x, ..., nx)$
2. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $A(x, y) = (x + 2y, x + y, x - y)$
3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; $A(x, y, z) = (2x, 3y, 5z, x + y + z)$

Exercício 28. *Mostre que toda transformação linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consiste na multiplicação por um número real. Em outras palavras, mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exercício 29. *Seja $T : E \to X$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Prove que existe $F \subset E$ um subespaço tal que $E \oplus N(T) = E$ e $Im(T) = T(F)$.* Dica: veja a demonstração do teorema do núcleo e da imagem.

Exercício 30. *Seja $T : E \to X$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Mostre que T é injetiva se, e somente se, existe $A : X \to E$ transformação linear tal que $AT = Id_E$.*

Exercício 31. *Seja $T : E \to X$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Mostre que T é sobrejetiva se, e somente se, existe $A : E \to X$ transformação linear tal que $TA = Id_X$.*

Exercício 32. *Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove que se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz de A relativamente a uma base qualquer de $\mathbb{R}^2$ então $b \neq 0$, ou $c \neq 0$. Em outras palavras: nenhuma matriz de A é diagonal.

Exercício 33. *Sabendo-se que a matriz da transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente à base $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$, onde $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (1, 1, 3)$ é*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

determine a matriz de A relativamente à base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 34. *Calcule o posto das matrizes abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

Exercício 35. *Exprima cada um dos vetores da base canônica* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *como combinação linear dos vetores* $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 2)$ *e* $v_3 = (4, 2, -5)$. *Determine a inversa da matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 36. *Calcule a dimensão do subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^5$ *gerado pelos vetores* $v_1 = (2, 4, 8, -4, 7)$, $v_2 = (4, -2, -1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 5, 2, -2, 4)$ *e* $v_4 = (-5, 1, 7, -6, 2)$. *Decida se o vetor* $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ *pertence ou não a este subespaço.*