UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Lista de Problemas – Álgebra Linear I
Professor: Bruno Santiago

Apresente suas soluções de forma clara e completa, justificando cada etapa do raciocínio.

Problema 1 (Amigos que gostam de cerveja, uns mais outros menos)**.** *Divida 100 litros de cerveja entre 5 amigos, em progressão aritmética de modo que a soma das duas menores quantidades seja um sétimo da soma das três maiores.*

Problema 2 (Benefícios de Doações)**.** *Uma empresa possui um lucro de R$100.000,00, antes de serem contados os impostos. Suponha que seja permitido a empresa doar uma porcentagem de seu lucro líquido (já descontados os impostos) e que o valor doado não seja computado no cálculo dos impostos. Suponha que a empresa decida doar então 10% de seu lucro líquido, e que o imposto estadual seja de 5% do lucro descontado o valor doado, e que o imposto federal seja de 40% do lucro descontados o imposto estadual e o valor da doação. Determine o custo efetivo da doação, ou seja, o valor doado descontado da dedução fiscal.*

Problema 3 (O problema das medalhas)**.** *Três equipes participam de um torneio esportivo amador em que provas de diversas modalidades foram disputadas. Como nos jogos olímpicos, aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata e bronze para o 1º, o 2º e o 3º lugar, respectivamente. A quantidade de medalhas de cada equipe bem como sua pontuação final são apresentadas na tabela a seguir.*

Equipes	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	**46**
B	5	3	1	**57**
C	4	3	3	**53**

Figura 1: Quadro de medalhas para equipes A, B e C.

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Problema 4 (Cortando triângulos)**.** *Considere um triângulo retângulo com um dos catetos medindo 50cm. Por uma linha paralela ao outro cateto é possível cortar um trapézio de área 320cm^2, e altura 20cm. Determine as dimensões do triângulo.*

Problema 5 (O problema do fluxo de tráfego)**.** *Suponhamos a seguinte situação, inspirada em fatos reais: com o intuito de melhor planejar as ações do* Programa Niterói de

Bicicleta, *a prefeitura de Niterói decidiu fazer uma contagem de ciclistas nas principais vias da cidade. Para realizar esta tarefa, dedicou agentes da* Nitrans *para realizar a contagem de ciclistas que passam por cada via, em cada intervalo de 60 minutos. Como o número de agentes é limitado, a prefeitura decide contratar uma consultoria matemática que usará Álgebra Linear para melhor alocar os agentes. Na figura a seguir estão indicados quatro cruzamentos e a quantidade de ciclistas que passam por cada via, antes e depois de cada cruzamento. Observe que quatro destas quantidades não estão indicadas na figura, pois não é preciso dedicar agentes para fazer estas contagens, já que usando-se Álgebra Linear podemos determinar estas quantidades. Ajude a prefeitura de Niterói e*

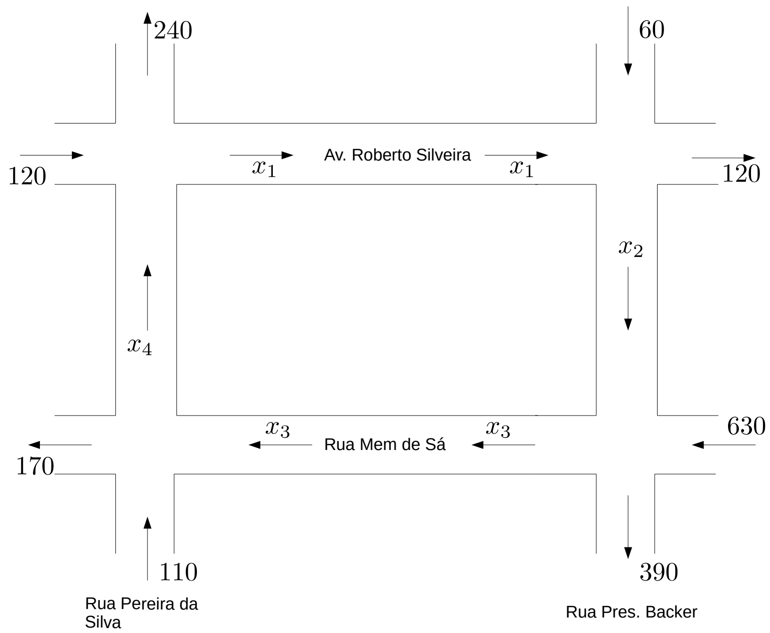

Figura 2: As quantidades de ciclistas x_1, x_2, x_3 e x_4 podem ser facilmente determinadas usando-se um pouco de Álgebra Linear.

mostre como é possível fazer isso.

Problema 6 (Quadrados Mágicos)**.** *Uma matriz quadrada $d \times d$ é dita um quadrado mágico quando a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é uma constante.*

(a) Mostre que o conjunto dos quadrados mágicos forma um subespaço de dimensão $d^2 - 2d$ do espaço $\mathcal{M}(d \times d)$ das matrizes $d \times d$.

(b) Determine os valores a serem colocados nas entradas com asterisco na matriz abaixo

de modo à torná-la um quadrado mágico.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 4 & 5 & 6 & * \\ 7 & 8 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Problema 7 (Espaços Vetoriais Espelhados e aplicações)**.** *Sejam E um espaço vetorial e X um conjunto. Suponha que exista uma função bijetiva $f : E \to X$. Prove que é possível munir o conjunto X de uma estrutura de espaço vetorial que o torna isomorfo a E. Prove que o conjunto $\mathcal{M}(n \times m)$ de todas as matrizes com entradas reais e com n linhas e m colunas possui dimensão nm como corolário disso.*

Problema 8 (O problema das compras)**.** *Um empresário do ramo da gastronomia possui 4 restaurantes (R1,R2,R3 e R4) e precisa decidir os fornecedores de tomates, cebolas, coentro, morangos e laranjas, para cada um deles. As demandas (em Kg) de cada produto por parte de cada restaurante estão especificadas na tabela abaixo.*

	tomates	*cebola*	*coentro*	*morango*	*laranja*
R1	60	50	35	41	76
R2	40	43	32	70	35
R3	23	27	29	41	32
R4	31	32	30	28	44

Dois pequenos produtores (P1 e P2) ofertam esses produtos por preços (para cada Kg, em reais) designados na tabela abaixo

	$P1$	$P2$
tomates	$0,98$	$1,33$
cebola	$1,78$	$1,23$
coentro	17	$16,89$
morango	$4,89$	$5,45$
laranjas	$5,76$	$4,99$

Suponha que estes preços só sejam garantidos se todos os produtos forem comprados juntos. Determine, para cada restaurante, em qual produtor é mais vantajoso comprar, de modo que o custo de aquisição seja o menor possível.

Problema 9 (O problema dos hiperlinks)**.** *Suponha que A_1, A_2, A_3 e A_4 sejam páginas da* Internet*. Considere a matriz quadrada A na qual a entrada a_{ij} é 1 se a página A_i faz um* link *para a página A_j, e 0 caso contrário. Suponha que*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada $i, j = 1, 2, 3, 4$ determine de quantas formas diferentes é possível ir da página A_i para a página A_j com, no máximo, 4 cliques.

Problema 10 (O modelo *input-output* de Leontief). *Suponha uma economia constituída por* n *setores* $S_1, ..., S_n$. *Cada setor* S_i *consome uma porcentagem* p_{ij} *da produção do setor* S_j. *Suponhamos o "modelo fechado"para esta economia: nenhuma outra commoditie entra nessa economia. Denotamos por* x_i *a quantidade produzida pelo setor* S_i. *Assumimos que* $x_i \geq 0$, *para toto* $i = 1, ..., n$.

(a) *Considere o caso em que a economia é constituída por três setores* S_1, S_2 *e* S_3 *e que a matriz* $[p_{ij}]$ *que determina que fração da produção do setor* S_i *é consumida pelo setor* S_j *seja dada por*

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Observe que a soma das entradas em cada coluna dessa matriz é igual a 1. Explique este fato. Para que esta economia esteja em equilíbrio, deve existir um vetor de produção $x = (x_1, x_2, x_3)$ *de modo que o consumo de cada setor* S_i *seja igual a produção* x_i *deste setor. Supondo que ao menos um destes vetores existe, determine todos eles.*

(b) *No caso geral de uma economia com* 3 *setores, mostre que sempre existe um vetor de produção que equilibra a economia, ou seja, de modo que o consumo de cada setor* S_i *seja igual a produção* x_i *deste setor.*

Problema 11 (O destino do Vasco). *O Campeonato Brasileiro de Futebol é uma competição disputada em dois turnos por 20 equipes. Assim, cada equipe faz 38 jogos no campeonato. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto, e derrotas não pontuam. A equipe campeã é aquela que soma mais pontos ao final da competição. As quatro equipes com menor pontuação são* rebaixadas *para a segunda divisão do campeonato. Os dados das edições anteriores mostram que com 48 pontos uma equipe consegue escapar do rebaixamento. Arthur torce pelo Vasco e gostaria de saber qual o número mínimo de vitórias que o Vasco precisa ter para escapar do rebaixamento. Qual é esse número?*

Problema 12 (Triângulos em grafos). *Um arquipélago é composto por* n *ilhas e* k *pontes conectando algumas dessas ilhas. Demonstre que se* $k > \frac{n^2}{4}$ *então existem ilhas* A, B *e* C *nesse arquipélago e pontes* AB, AC *e* BC. *Dê um exemplo com* $k = \frac{n^2}{4}$ *e tal que a conclusão seja falsa. (*Dica: *esse é o Teorema de Mantel da teoria de Grafos. Veja por exemplo* Bela Bollobas, Modern Graph Theory, *Cap. 01. A ideia é que se um grafo possui um número suficientemente grande de arestas, em comparação com a quantidade vértices, então o grafo contém um triângulo, obrigatoriamente.)*

Problema 13 (Caminhos em Malta). *O arquipélago de Malta, no sul da Europa, é composto por três ilhas: Malta, Comino e Gozo. Existem barcos ligando Comino à Gozo e Comino à Malta. Determine de quantas formas diferentes é possível ir de Malta à Gozo fazendo-se exatamente* 666 *travessias.*

Problema 14 (Modelo Markoviano de Desemprego). *Suponha que exista uma probabilidade* p *de uma pessoa empregada tornar-se desempregada no próximo mês (e portanto com probabilidade* $1-p$ *esta pessoa continua empregada no próximo mês), e uma probabilidade* *q de uma pessoa desempregada tornar-se empregada no próximo mês (e portanto com probabilidade* $1-q$ *esta pessoa continua desempregada no próximo mês). As constantes* p *e* q *são números reais entre* 0 *e* 1*, e são ajustadas de acordo com as configurações da economia. Assim, se* x *pessoas estão empregadas atualmente, e* y *pessoas estão desempregadas então*

$$px + (1-q)y$$

pessoas estarão desempregadas no próximo mês, ao passo que

$$(1-p)x + qy$$

pessoas estarão empregadas no próximo mês. Mostre que existem números $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *tais que se* β *pessoas estão desempregadas agora e* α *pessoas estão empregadas, então teremos as mesmas quantidades (*α *e* β*) de pessoas empregadas e desempregadas no próximo mês. Ou seja, prove que existe uma taxa de desemprego que permanece constante ao longo do tempo. (*Dica: *isto equivale a demonstrar o caso* $n = 2$ *do Teorema de Perron-Frobenius.)*

Problema 15 (Modelo Markoviano de imigração)**.** *Suponhamos que um determinado país A seja dividido em três regiões demográficas. Suponhamos também que estudos tenham aferido que todo ano* 5% *dos residentes da região 1 imigram para a região 2 e* 5% *para a região 3. Dos moradores da região 2,* 15% *mudam-se para a região 1 e* 10% *para a região 3. E dos residentes da região 3,* 10% *mudam-se para a região 1 e* 5% *para a região* 2*. Mantidos esses números ao longo do tempo, que porcentagem (aproximada) da população residirá em cada região após um longo período de tempo?*

Problema 16 (Pagerank, ou quase)**.** *Um grupo de quatro adolescentes (Mario, João, José e Rodrigo) quer eleger qual dentre eles é o "Rei da rede social". Para isso eles decidem que a importância de um perfil mede-se de acordo com as curtidas que ele recebe. No início, todos tem a mesma importância (digamos,* $1/4$*). Em seguida, cada perfil transfere uma fração de sua importância para cada perfil por ele curtido. Por exemplo, se Mário curtiu três perfis cada um deles receberá* $1/3$ *da importância do perfil de Mário. Podemos continuar esse procedimento, e com isso a importância de cada perfil modifica-se a cada etapa até atingir um valor limite. Nesse valor limite a soma dos ganhos de importância, vindos dos perfis que curtem um dado perfil, coincide com a importância desse perfil. Suponha que Mário curte todos os perfis, exceto o seu próprio; João curte apenas José e Rodrigo, José curte apenas Mario e Rodrigo curte Mário e José. Determine qual dos 4 adolescentes possui o perfil mais importante, seguindo esse critério, e quanto mede essa importância.*

Problema 17 (Risco versus segurança em investimento)**.** *Uma investidora possui uma capacidade de investir de no máximo R$10000. Seu gerente oferece duas opções de investimento: A e B. O investimento A é muito arriscado mas oferece um lucro de 10% ao ano, ao passo que o investimento B é muito seguro, mas oferece um lucro de 7% ao ano. Após alguma reflexão, ela decide investir no máximo R$ 6000 na opção A e pelo menos R$ 2000 na opção B. Como ela deve investir de modo a maximizar seus lucros, e qual o lucro máximo nesse caso?*

Problema 18 (Sistemas Dinâmicos caóticos). *O Toro $\mathbb{T}^2$ pode ser visto como o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência $x \sim y$ se, e só se, $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Intuitivamente, é como se você pegasse um quadrado e identificasse os lados opostos. Considere agora a matriz $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que se $x \sim y$ então $A(x) \sim A(y)$.

(b) Mostre que podemos induzir uma aplicação $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ pondo $A([x]) = [A(x)]$ (a imagem de uma classe de equivalência é a classe de equivalência da imagem).

(c) Um ponto $p \in \mathbb{T}^2$ é dito periódico *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n(p) = p$ (ou seja, após aplicar-se a transformação um número finito de vezes volta-se para o mesmo lugar). Mostre que todo ponto $x \in \mathbb{T}^2$ pode ser arbitrariamente aproximado por pontos periódicos de A.*

(d) Mostre que existe um ponto $x \in \mathbb{T}^2$ que não é ponto periódicos de A mas é tal que a sequência $\{A^n(x)\}$ é densa *em $\mathbb{T}^2$ (ou seja, qualquer ponto em $\mathbb{T}^2$ pode ser arbitrariamente aproximado por pontos da sequência).*

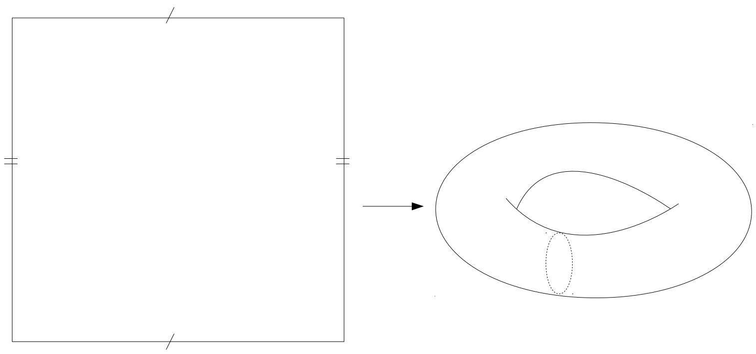

Figura 3: Você junta o lado de cima com o de baixo, dá um cilindro. Daí, você junta o círculo da esquerda com o círculo da direita, dá um toro!