UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Lista de Exercícios III – Equações Diferenciais Ordinárias I
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *Seja* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x, y) = x^2 + y^4$ *e considere a equação*

$$x' = \nabla g(x).$$

Mostre que a origem é um ponto fixo instável.

Exercício 2. *Prove que a é um ponto fixo assintoticamente estável para a equação*

$$\begin{aligned} x' &= -x + xy \\ y' &= x - y - x^2 - y^3 \end{aligned}$$

Exercício 3. *Considere a equação em coordenadas polares*

$$\begin{aligned} r' &= f(r) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

onde

$$f(r) = \begin{cases} r\sin(\frac{1}{r^2}), & \text{se } r \neq 0 \\ 0, & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

Exercício 4. *Enuncie e demonstre condições necessárias e suficientes sobre uma função linear* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *de forma que todas as soluções da equação* $x' = f(x)$ *sejam*

(a) *limitadas*

(b) *limitadas para* $t > 0$

(c) *convergentes à origem*

Exercício 5. *Calcule* e^{tA} *para* $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0. \end{bmatrix}$.

Exercício 6 (Fórmula de Liouville)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *um campo de vetores limitado e seja* $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *o fluxo associado. Demonstre que*

$$\det D\varphi_t(x) = e^{\int_0^t \operatorname{tr}(Df(\varphi_s(x)))ds},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$ *e* $t \in \mathbb{R}$*. Conclua que se* $\operatorname{div}(f) \equiv 0$ *então o fluxo associado preserva o volume.* Sugestão: aplique a fórmula de mudança de variáveis para integrais.