COMO DETECTAR PADRÕES NUMÉRICOS JOGANDO SINUCA

BRUNO SANTIAGO

1. Introdução

A matemática trata fundamentalmente de buscar padrões nas coisas da natureza. Essa busca é importante porque uma vez que um padrão em um determinado fenômeno é detectado, você sabe como aquilo se comporta e pode passar fazer *previsões*.

E com matemática você pode se divertir tentando encontrar padrões nos mais diversos objetos. Alguns deles podem ser absurdamente abstratos, como álgebras de Lie, espaços vetoriais de dimensão infinita e grupos pseudo-aleatórios. Outros, podem ser simples e corriqueiros e dentre estes últimos está o objeto matemático de maior prestígio de todos: o conjunto dos números naturais.

Encontrar padrões na sequência dos números naturais, 1,2,3,... pode ser divertido e até render um milhão de dólares[1].

Meu objetivo nesse texto é explicar em detalhes um singelo exemplo de como a matemática consegue detectar padrões e com isso prever coisas. Uma das coisas que quero mostrar com esse exemplo é como o caminho da descoberta pode ser inesperado e muito surpreendente. Sobretudo, quando ele vem a partir de uma conexão entre dois problemas completamente não relacionados à primeira vista.[2]

1.1. **Questionando padrões numéricos.** Considere a sequência

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ..., 2^n, ...$$

das potências de 2. Agora, para cada termo, olhe para o primeiro dígito. Assim temos uma nova sequência, formada pelos **primeiros dígitos das potências de 2**:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, ... \tag{1.1}$$

O problema que proponho para discutirmos aqui é o seguinte: é possível prever o comportamento dessa sequência de primeiros dígitos das potências de 2?

Essa pergunta parece bem difícil, porque a sequência não apresenta um padrão numérico imediato. Pelo menos, não como uma progressão aritmética, ou uma progressão geométrica, nas quais o conhecimento de dois dos termos determina completamente todos eles.

Então, vamos fazer uma pergunta mais simples: o dígito 7 aparece alguma vez nessa sequência? Ou seja, existe alguma potência de 2 que comece com o dígito 7?

Uma proposta para tentar responder essa pergunta é simplesmente pegar uma calculadora e ficar multiplicando por 2 loucamente. Bom, eu não resisti e fiz isso.

[1]Veja http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis

[2]Este artigo foi escrito tendo como "público alvo" alunos do final do ensino médio. **Nenhum conhecimento de graduação é necessário para seguir os argumentos**.

Descobri que a primeira vez que o 7 aparece na sequência é em

$$2^{46} = 70368744177664.$$

Contudo, lembre que descobrir se o 7 aparece não era o nosso objetivo inicial. Foi apenas uma tentativa de explorar o verdadeiro, e difícil problema, de prever o comportamento da sequência 1.1.

Apesar disso, vamos manter a linha e continuar explorando. Se o 7 aparece uma vez no termo 46, será que ele aparece de novo? Sim, apertando $\times 2$ um monte de vezes na minha calculadora, descobri que

$$2^{56} = 72057594037927936 \text{ e } 2^{66} = 73786976294838206464.$$

Bizarramente, a partir daí o sete aparece exatamente em $2^{76}, 2^{86}$ e 2^{96}, mas isso não se mantém, pois 2^{106} começa com 8. Esses cálculos, elucidam a questão da aparição do 7, mas deixam entrever uma pergunta inquietante: será que 7 aparece infinitas vezes? **Isso** não dá para responder com a calculadora[3].

Ainda assim, podemos modificar a sequência e considerar os sete primeiros dígitos dos números 2^n. Será que vai aparecer em algum momento a sequência de dígitos 2345678? Em vista do nosso objetivo inicial, faço aqui o seguinte desafio a você, caro leitor:

Problema 1.1. *Existe alguma potência de* 2 *que comece com a sequência de dígitos* 2345678*?*

Se formos testar isso computacionalmente vamos ter que ser mais inteligentes do que o que eu fiz de teclar $\times 2$ sem parar na calculadora. Porém, ainda que usemos ferramentas de cálculo mais sofisticadas (como Matlab, Julia, etc...) e calculemos potências monstruosas de 2 podemos não encontrar uma delas começando com 2345678 e isso não permite tirar nenhuma conclusão sobre o problema, muito menos de trazer resposta ao questionamento inicial, sobre qual é o padrão dessa sequência afinal?

Isso tudo parece um pouco desanimador. Então, vamos esquecer esse problema por enquanto e pensar em outra coisa.

2. Jogando sinuca numa mesa redonda

Você provavelmente conhece o jogo de sinuca. Mas, você já jogou sinuca numa mesa circular? Pois bem, imagine uma mesa circular e uma bolinha posicionada em algum lugar dessa mesa. Ao atirar a bolinha em alguma direção, suponha que ela vai se deslocar na mesa sem atrito e que não há perda de energia ao bater com o bordo da mesa. Nesse caso a bolinha vai ricochetear cada vez que se encontrar com o bordo da mesa.

E agora **vamos nos divertir com esse outro problema**: tentar dizer, ao menos qualitativamente, o que vai acontecer com a bolinha.

Repare que esse é um problema razoavelmente concreto. Porém, fizemos algumas hipóteses simplificadoras (nada de atrito nem de perda de energia) para tentar obter um modelo matemático que descreva a trajetória da bolinha.

Ou seja, para resolver o nosso problema físico (de determinar o comportamento da bolinha) vamos tentar transformá-lo num problema matemático e aí resolvê-lo.

[3]Afinal, nem eu nem você temos a eternidade para ficar teclando $\times 2$ na calculadora...

Para tanto, observe primeiro que a coisa que mais interessa na vida da bolinha de sinuca é a sua sequência de batidas sucessivas no bordo da mesa. Estamos supondo que esse bordo é um círculo.

Mas, matematicamente, o que é um círculo? Essa pergunta admite muitas respostas, todas corretas, mas nem todas úteis para o problema da sinuca. Mas pensando bem, como o que nos interessa é determinar as ricocheteadas sucessivas da bolinha, queremos apenas poder atribuir um número a cada ponto do bordo da mesa. Por isso, vamos pensar cada elemento do círculo como correspondendo a um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ e quando damos uma volta completa no círculo voltamos ao ângulo zero.[4]

Em matemática, para resolver um problema e portanto para determinar um padrão, em geral devemos enunciar e demonstrar algum *teorema*. Ou seja, argumentamos que dada um certa hipótese somos forçados a chegar a uma certa conclusão, devido a uma cadeia irrefutável de argumentos lógicos. Por isso acabamos tendo que descrever coisas repetidamente. Por conta disso é muito prático dar nomes concisos às coisas. Por exemplo, costumamos chamar o círculo de $\mathbb{S}^1$, e denotamos um ponto arbitrário do círculo por $x \in \mathbb{S}^1$, ou $x_0 \in \mathbb{S}^1$, etc...

Agora imagine que você deu uma tacada na bolinha a partir de algum lugar de dentro da mesa, como na Figura 1. Vamos chamar de $x_0 \in \mathbb{S}^1$ o primeiro ponto do círculo onde ela vai bater. Vamos tentar adivinhar, a partir de x_0, aonde vão ser as próximas batidas x_1, x_2, x_3 etc...

Como todo jogador de sinuca sabe, o que determina aonde a bolinha vai bater primeiro é o ângulo da tacada. Vamos supor que o ângulo de batida é igual ao ângulo de saída. Isso é uma hipótese simplificadora comum nesse tipo de problema físico que envolve colisões. É a mesma hipótese que se faz sobre a reflexão da luz, por exemplo.

Então podemos imaginar que você deu a primeira tacada de modo que a bolinha, em sua primeira batida no bordo da mesa, entrou com um ângulo de incidência α, e portanto sai com o mesmo ângulo α. Veja a Figura 1. Usando isso vamos provar o primeiro teorema sobre o problema da sinuca redonda. Na verdade, vamos provar um resultado de segunda importância quando comparado com o *grand finale*. Nesse caso, o chamamos de

Proposição 2.1. *Sejam x_0, x_1 e x_2 três batidas sucessivas da bolinha no bordo da mesa. Considere cx_0, cx_1 e cx_2, respectivamente, os segmentos de reta obtidos ligando-se esses pontos ao centro da mesa (os segmentos vermelhos na Figura 1). Então*

$$\angle(cx_0, cx_1) = \angle(cx_1, cx_2).$$

De fato, se $\alpha > 0$ é o ângulo de incidência na primeira batida x_0 e se x_n, x_{n+1} são duas batidas sucessivas quaisquer então

$$\angle(cx_n, cx_{n+1}) = 2\alpha.$$

Demonstração. Vamos provar que os triângulos cx_0x_1 e cx_1x_2 são congruentes. Se provarmos isso teremos como consequência a igualdade dos ângulos centrais desses triângulos, que são respectivamente $\angle(cx_0, cx_1)$ e $\angle(cx_1, cx_2)$. Com efeito[5], olhe

[4] Se você já viu o conceito de relação de equivalência, isso equivale a descrever o círculo $\mathbb{S}^1$ como o quociente $\mathbb{R}$ pela relação de equivalência $x \sim y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Se você nunca viu, bem, isso é uma nota de rodapé, você pode ignorá-la.

[5] Recomendo ao leitor acompanhar a sequência de argumentos sempre olhando a Figura 1.

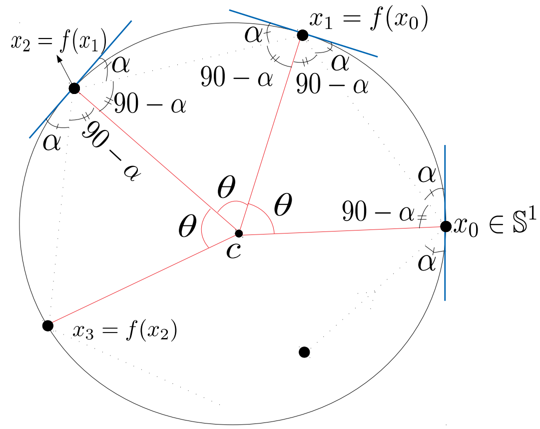

Figura 1. Prova da Proposição 2.1 em uma figura.

a reta tangente ao círculo no ponto x_0. O ângulo de saída é igual ao ângulo de incidência, α. Usando que o ângulo de um raio com a tangente ao círculo vale sempre 90 graus concluímos que

$$\angle(cx_0, x_0x_1) = 90 - \alpha.$$

Como o triângulo cx_0x_1 é isósceles, concluímos que

$$\angle(cx_1, x_1x_2) = 90 - \alpha.$$

Isso implica duas coisas. A primeira é que, o ângulo de incidência em x_1 tem que ser igual a α de novo, pois ele deve somar 90^o com $\angle(cx_1, x_1x_0)$. A segunda é que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180^o, o ângulo central do triângulo cx_0x_1 vale $\theta = 2\alpha$.

Além disso, como o ângulo de saída em x_1 deve também ser igual ao ângulo de incidência, concluímos que o ângulo de saída é α. Usando mais uma vez que o raio do círculo é ortogonal à tangente, concluímos que

$$\angle(cx_1, x_1x_2) = 90 - \alpha.$$

Como o triângulo cx_1x_2 é isósceles e a soma dos ângulos internos é 180^o deduzimos mais uma vez que o ângulo central é igual a 2α. Isso prova a igualdade anunciada. Considerando agora a próxima batida x_3 e repetindo o mesmo argumento concluímos que a variação do ângulo central entre duas duas batidas sucessivas vai ser sempre igual à 2α. Isso termina a prova. $\square$

A conclusão que obtemos a partir da Proposição 2.1 é que a trajetória que a bolinha vai fazer é completamente determinada pela função $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que a cada ponto $x_0 \in \mathbb{S}^1$ associa o ponto $f(x_0)$ obtido pela rotação por um ângulo θ do ponto x_0.

Ou seja, transformamos o problema de descrever o comportamento qualitativo da bolinha num problema puramente matemático: comece com um ângulo inicial $x_0 \in \mathbb{S}^1$ e aplique a ele sucessivamente a função $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que roda os ponto do círculo por um ângulo constante θ. O que vai acontecer? É isso o que chamamos de modelagem matemática: transformar um problema que queremos resolver num problema abstrato de matemática.

Ou seja, no nosso modelo matemático o jogo de bilhar na mesa circular pode ser entendido através da aplicação de rotação f. O comportamento do bilhar fica determinado pela sequência $x_n = f^n(x_0)$ que corresponde a aplicarmos sucessivamente por n vezes a função f ao ponto x_0. Então, estudar o comportamento da bolinha equivale a estudar a sequência numérica $x_n = f^n(x_0)$ no círculo.

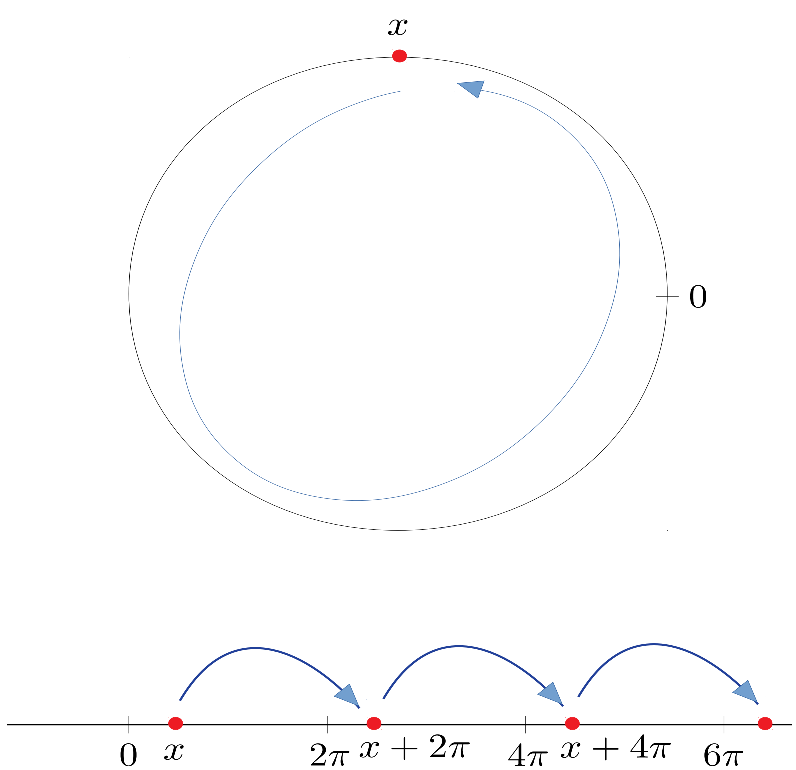

Figura 2. Caminhando na reta e caminhando no círculo: depois de andar 2π voltamos ao mesmo lugar. Na verdade, você pode interpretar qualquer número entre um múltiplo de 2π (por exemplo, 4π, 6π, 8π et...) e o próximo como um ponto do círculo: basta você considerar apenas a distância do ponto aos extremos direito e esquerdo do intervalo onde o ponto se encontra.

2.1. **Estudando as trajetórias da rotação $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.** Bom, para estudar problemas de matemática temos, inevitavelmente, que fazer contas. E para fazer contas com ângulos (que são os pontos do círculos) é muito útil fazermos um dicionário entre números genuínos (pontos da reta numérica) e ângulos (pontos do círculo). A ideia básica é muito simples: imagine que você começa percorrer o círculo no sentido anti-horário, que é (por convenção) o sentido positivo, a partir do ângulo zero. Quando você chega em 2π você volta ao ponto inicial. Quando você continua e percorre um total de $2\pi + \pi/2$ por exemplo, no círculo isso equivale ao ângulo $\pi/2$. E o mesmo funciona para qualquer $x \in [0, 2\pi)$.

Agora repare que a função $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ corresponde apenas a, dado um ângulo $x_0 \in \mathbb{S}^1$ do círculo, somar um ângulo θ fixo. Por exemplo, imagine que $\theta = 2\pi/5$.[6] Como vimos na Proposição 2.1, isso significa que ângulo de incidência da primeira batida é igual $\pi/5 = 36^o$.

As batidas sucessivas vão ser os ângulos x_0, que é o ponto inicial, $x_1 = f(x_0) = x_0 + 2\pi/5$, $x_2 = f(x_1) = x_1 + 2\pi/5 = x_0 + 4\pi/5$. Depois, vamos ter $x_3 = f(x_2) = x_0 + 6\pi/5$, $x_4 = x_0 + 8\pi/5$. Porém, $x_5 = x_0 + 10\pi/5 = x_0 + 2\pi$. Isso quer dizer que, no círculo, x_0 e x_5 são o mesmo ponto (veja a Figura 3). Ou seja, a bolinha volta para o ponto inicial e partir daí passa a repetir o mesmo trajeto, descrevendo um pentágono regular!

Mas e se o ângulo de incidência inicial fosse $\theta = 2\pi/6 = 60^o$? Repetindo o mesmo raciocínio de antes vemos que depois de 6 batidas a bolinha volta para o mesmo lugar e o rastro dela na mesa vai ser um hexágono regular.

Em geral, se o ângulo incidência for $\alpha = 2\pi/n$ então o rastro deixado pela bolinha vai ser um polígono regular de n lados. Um outro fato geral que essas contas que fizemos deixam entrever é que se o ângulo da rotação $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ for θ então o ponto $x_n = f^n(x_0)$, obtido ao aplicar-se a rotação n vezes sucessivas ao ponto inicial x_0, vai ser igual a

$$x_n = x_0 + n\theta. \tag{2.1}$$

Por exemplo, no caso em que $\theta = 2\pi/5$, vimos que $x_4 = x_0 + 4.2\pi/5$.

Contudo, essas contas não esgotam nem de longe todas as possibilidades. Por exemplo, se o ângulo inicial for $6\pi/20 = 54^o$, então depois de vinte batidas a bolinha vai ter rodado um total de

$$20 \times \frac{6\pi}{20} = 6\pi,$$

e portanto $x_{20} = x_0 + 3.2\pi = x_0$ (no círculo!)[7].

2.1.1. *Ângulo de incidência racional.* Inspirados pelas contas que fizemos acima vamos supor que o ângulo de rotação de $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é uma fração vezes 2π. Ou seja, vamos supor que existem números naturais $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\theta = \frac{p}{q} 2\pi.$$

Então, pela equação (2.1) temos que

$$x_q = x_0 + q\theta = x_0 + q\frac{p}{q}2\pi = x_0 + p2\pi = x_0,$$

já que no círculo $x + p2\pi = x$ (reveja a figura 2). Isso demonstra que depois de q iterações a bolinha volta para o mesmo ponto de onde começou e dali passa a repetir o mesmo trajeto.

[6] A unidade de medida não importa muito para estudar esse problema, porque estamos fazendo apenas considerações qualitativas. Assim, apesar de ter usado graus na prova da Proposição 2.1, a partir daqui eu vou usar (quase sempre :D) somente radianos.

[7] Para ajudar a visualizar essa conta você pode conferir essa simulação de uma rotação feita em geogebra aqui `https://www.geogebra.org/classic/u9rnqmdx`

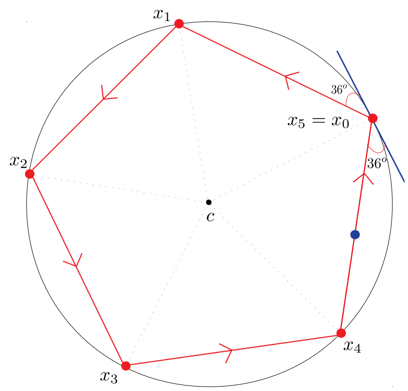

Figura 3. Se o ângulo de incidência for $2\pi/10 = 36^o$ então a trajetória da bolinha vermelha vai ser um pentágono regular.

2.1.2. *Ângulo de incidência irracional.* Mas e se o ângulo de rotação (que é o dobro do ângulo de incidência) não for um múltiplo racional de 2π?[8]

A resposta é surpreendente. Em primeiro lugar, a bolinha nunca vai bater de novo no mesmo lugar de onde começou. Na verdade, ela **nunca vai repetir uma batida!** Mais precisamente, suponha que $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ seja uma rotação de ângulo θ e que, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$, vale

$$\theta \neq \frac{p}{q} 2\pi.$$

Então, em primeiro lugar

Lema 2.2. *Para todo $x_0 \in \mathbb{S}^1$, os pontos $x_n = x_0 + n\theta$ são todos distintos entre si.*

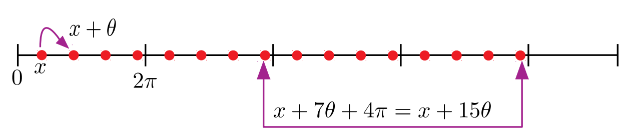

Figura 4. Prova do Lema 2.2.

Demonstração. Vamos supor por contradição que existem dois pontos, digamos x_n e x_m que sejam iguais no círculo. Isso quer dizer que

$$x_0 + n\theta = x_0 + m\theta \text{ (no círculo!!)}.$$

Mas isso significa que a partir do ponto $x_0 + n\theta$ podemos dar algumas voltas no círculo e vamos voltar ao mesmo lugar. Mas, se considerarmos os valores numéricos (na reta) dessas voltas todas, essa igualdade se traduz como na figura 4: existe

[8]Por exemplo se $\theta = \frac{\sqrt{2}}{5} 2\pi$.

$k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} x_0 + n\theta + k.2\pi &= x_0 + m\theta \\ \implies \theta(m-n) &= k2\pi \\ \implies \theta &= \frac{k}{m-n}2\pi, \end{aligned}$$

o que é uma contradição com a nossa hipótese sobre θ (lembre que estamos lidando com o caso em que θ é um múltiplo *irracional* 2π). Essa contradição termina a prova. □

Como consequência do Lema 2.2 temos que a sequência de batidas sucessivas $x_n = f^n(x_0)$ nunca se repete e portanto ela determina infinitos pontos no círculo. Agora, olhe o que acontece nessa simulação (`https://www.geogebra.org/classic/gbhmuawd`) de uma rotação de ângulo irracional[9]. Observe que, como a bolinha nunca volta para o mesmo lugar, a medida que ela vai girando no círculo ela quase fecha, a menos de um errinho que vai ficando cada vez menor. Só que esses erros se espalham e no final a bolinha acaba batendo em praticamente todos os lugares do círculo.

Essa é a intuição que ganhamos testando os exemplos e fazendo simulações no computador. Mas como ter certeza de que isso acontece sempre? Ou de que esse desenho pode mudar de repente, mas depois de muitas iterações?

A certeza em matemática só vem depois que enunciamos e provamos um teorema.

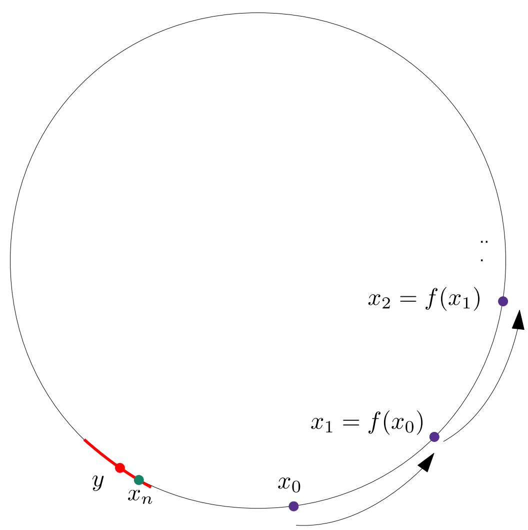

Figura 5. Ilustração do Teorema 2.3.

[9]Para o leitor atento e rigoroso, cabe uma explicação: nessa simulação o ângulo de rotação não é realmente irracional, mas é irracional para "efeitos de visualização". De fato, eu simulei uma rotação de ângulo $85^{o} = \frac{17}{72} \times 2\pi$, que, como já vimos, vai desenhar um polígono regular de 72 lados no círculo. Se quiser ser mais realista, você pode alterar você mesmo o ângulo de rotação nas linhas do comando da simulação e ver o que muda!

Teorema 2.3. *Dado qualquer ponto $y \in \mathbb{S}^1$ e dado qualquer número $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.*

Demonstração. Essa demonstração é ápice desse texto. Não só porque o resultado é muito legal mas também porque o argumento é lindo.

Como vimos, o ângulo de rotação irracional de $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ força com que a sequência de batidas sucessivas $\{x_n = f^n(x_0)\}$ seja um subconjunto infinito do círculo.

Podemos cobrir o círculo com intervalinhos de comprimento exatamente igual a ε: basta você você começar fazendo duas marcações, uma a direita outra a esquerda de y, distando $\varepsilon/2$ cada uma de y. A partir da marcação à direita você anda sempre ε. Em algum momento você chega à esquerda da marcação esquerda inicial, a uma distância menor do que ε. Assim, estritamente falando somente o último intervalinho pode ter comprimento um pouco menor do que ε, mas o ponto importante é que o intervalo que contém y tem comprimento **exatamente** ε[10]. Veja a Figura 6.

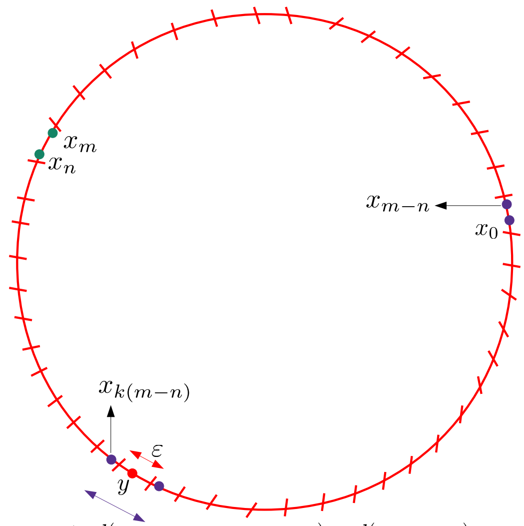

FIGURA 6. Ilustração da prova do Teorema 2.3.

Mas, para fazer essa cobertura do círculos com esses intervalinhos, quantos deles, no máximo, a gente usou? Ora, se cada um deles tem comprimento ε, exceto o último, e se temos $n+1$ intervalos, n de comprimento ε e mais o último, então os n intervalos não esgotam o círculo e portanto a soma dos seus comprimentos é menor

[10]Um comentário dirigido aos iniciados em análise. Uma outra forma de obter uma cobertura do círculo assim é usando a propriedade arquimediana dos números reais: para todo número real existe um número natural maior do que ele. Note que ε é um número potencialmente muito, muito pequeno. Então, $1/\varepsilon$ deve ser um número muito, muito grande. Ainda assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/\varepsilon$, ou seja $1/n < \varepsilon$. Então você pode cobrir o círculo com n intervalos de comprimento exatamente igual a $1/n$. Isso muda algumas desigualdades mas não muda em nada a estrutura da prova.

do que 1, ou seja,

$$n\varepsilon \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como temos $n+1$ intervalos, isso quer dizer que temos menos do que

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1$$

intervalos. Como temos infinitos pontos de batida, certamente temos mais do que $\frac{1}{\varepsilon} + 1$ pontos. Pelo princípio da casa dos pombos[11] um dos intervalos contém pelo menos dois pontos de batida.

Portanto, existem $m > n$ tais que $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. Contudo, $x_m = f^m(x_0)$ é obtido a partir de x_0 fazendo-se m rotações sucessivas de ângulo θ, e $x_n = f^n(x_0)$ é obtido fazendo-se n rotações sucessivas do mesmo ângulo. Daí, se a gente roda os pontos x_m e x_n para trás de um ângulo θ exatamente n vezes, o ponto x_n volta ao ponto inicial x_0 e o ponto x_m vai parar no ponto x_{m-n}. Como estamos rodando os pontos isso não altera a distância mútua entre eles, logo

$$d(x_{m-n}, x_0) = d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Ou seja, se a partir de um ponto $x_0 \in \mathbb{S}^1$ qualquer você roda $m-n$ vezes de um ângulo θ na verdade você está rodando por um ângulo menor do que ε[12].

Então, cada vez que você roda $m-n$ vezes de um ângulo θ você se só se afasta no sentido anti-horário do ponto anterior, por uma distância menor do que ou igual a ε. Logo, se você vai rodando assim, com paciência, uma hora você vai ter que bater no intervalo que contém o y.

De fato, vamos provar isso por redução ao absurdo. Suponhamos por absurdo que, ainda que apliquemos a rotação f^{m-n} (que equivale a rodar menos do que ε no sentido anti-horário) infinitas vezes ao ponto x_0 nunca vamos entrar no intervalo que contém y. Mas então, vamos rodando, rodando e algum momento temos que "pular"o intervalo que contém y. Mais precisamente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k(m-n)} = f^k(m-n)(x_0)$ está antes do intervalo e $x_{(k+1)(m-n)}$, que é ponto subsequente depois de rodarmos $x_{k(m-n)}$ por $m-n$ vezes, está fora desse intervalo. Mas então, como esses dois pontos pularam o intervalo que contém y, a sua distância mútua deve ser maior do que o comprimento desse intervalo, ou seja

$$d(x_{k(m-n)}, x_{(k+1)(m-n)}) > \varepsilon. \tag{2.2}$$

No entanto, $x_{(k+1)(m-n)}$ é obtido rodando-se x_{m-n} por um ângulo menor do que ε, logo

$$d(x_{k(m-n)}, x_{(k+1)(m-n)}) \leq \varepsilon \tag{2.3}$$

mas isso é um absurdo: as desigualdades (2.2) e (2.3) são mutuamente contraditórias.

Esse absurdo só pode ter vindo da nossa hipótese de que a bolinha nunca vai bater no intervalo que contém y. Então, concluímos que isso tem que ser verdade, e isso termina a prova. □

[11] Também conhecido como princípio das gavetas: nse você n gavetas e pelo menos $n+1$ meias, então uma das gavetas deve conter mais de uma meia.

[12] Isso é exatamente o que observamos na simulação https://www.geogebra.org/classic/gbhmuawd

3. Detectando padrões nas potências de 2

Agora vamos mostrar como nosso conhecimento sobre o comportamento de longo prazo da nossa hipotética sinuca numa mesa redonda pode revelar um padrões na sequência (1.1).

De fato, não somente vamos resolver o problema 1.1, como vamos obter um resultado muito mais geral (e surpreendente). Para começar, seja D uma sequência de dígitos em base 10, por exemplo, $D = 2345678$. Observe que podemos interpretar D também como um número natural arbitrário. Tudo depende do contexto. A seguir vamos transitar entre uma interpretação e outra sem maiores comentários.

O resultado tão esperado nesse texto é o seguinte

Teorema 3.1. *Para toda sequência de dígitos D, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que a expressão decimal de 2^n começa com a sequência D.*

Antes de apresentar a prova, vamos fazer alguns leminhas, resultados menores que vão auxiliar na demonstração.

O primeiro leminha é uma estimativa envolvendo a função $x \mapsto \log_{10}$.

Lema 3.2. *Para qualquer número natural $D \in \mathbb{N}$ vale que*

$$\log_{10}(D+1) - \log_{10} D < 1.$$

Demonstração. Com efeito, como D é um número natural, $D \geq 1$. Então,

$$\frac{D+1}{D} \leq \frac{D+D}{D} = 2.$$

Segue que

$$\log_{10}(D+1) - \log_{10} D = \log_{10}\left(\frac{D+1}{D}\right) = \log_{10} 2.$$

Como $\log_{10} 2 < 1$, a prova está terminada.[13] □

Na prova do Teorema 3.1 vamos usar o Teorema 2.3. A base para para o aplicarmos será o seguinte

Lema 3.3. *Seja $\beta = \log_{10} 2$. Então, β é um número irracional.*

Demonstração. Suponha por absurdo que β seja um número racional. Então, β pode ser escrito como uma fração irredutível p/q, com p, q números naturais. Contudo,

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 = \frac{p}{q} \quad &\Longrightarrow \quad 10^{\frac{p}{q}} = 2 \\ &\Longrightarrow \quad 10^p = 2^q \\ &\Longrightarrow \quad 5^p 2^p = 2^q, \end{aligned}$$

o que é uma igualdade absurda, já que do lado esquerdo temos um número com fatores primos 5 e 2 e do lado direito, o mesmo número, só tem 2 como fator primo. Essa contradição mostra que nossa hipótese inicial de que $\beta = \log_{10} 2$ é racional não pode ser verdadeira, provando assim que β é irracional. □

Agora estamos em condições de apresentar a demonstração do Teorema 3.1.

[13]Você pode usar uma calculadora para ver que $\log_{10} 2 \approx 0.3$, ou pode simplesmente notar que, como $\log_{10} 2$ é o expoente ao qual devemos elevar 10 para obter 2, ele tem que ser obrigatoriamente menor do que 1.

Prova do Teorema 3.1. Nessa prova vamos usar a seguinte notação $\beta = \log_{10} 2$ e $\theta = \beta 2\pi$.

A estratégia é olhar a sequência 2^n em escala logarítmica e ver de que maneira ela se desloca no círculo unitário (no espírito da Figura 2).

De fato, observe que a expressão decimal de 2^n começa com a sequência D se e somente se existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$D \times 10^{\ell} \leq 2^n < (D+1) \times 10^{\ell}.$$

Tomando logaritmos de ambos os lados, segue que

$$\log_{10} D + \ell \leq n \log_{10} 2 < \log_{10}(D+1) + \ell.$$

Multiplicando por 2π em ambos os lados obtemos

$$2\pi \log_{10} D + \ell 2\pi \leq n(2\pi \log_{10} 2) < 2\pi \log_{10}(D+1) + \ell 2\pi.$$

Ou seja, concluímos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a expressão decimal de 2^n começa com a sequência D se, e somente se, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\pi \log_{10} D + \ell 2\pi \leq n\theta < 2\pi \log_{10}(D+1) + \ell 2\pi.$$

Pelo Lema 3.2, vemos que $\log_{10}(D+1) - \log_{10} D < 1$ e portanto

$$2\pi \log_{10}(D+1) + \ell 2\pi - (2\pi \log_{10} D + \ell 2\pi) < 2\pi.$$

Tendo isso em mente, veja a figura abaixo Com ela vemos que existem $\ell \in \mathbb{N}$ e

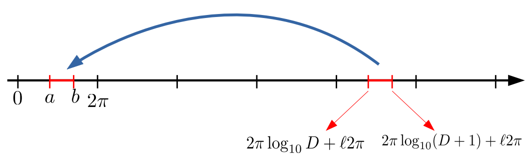

FIGURA 7. Se dois números estão a uma distância mútua menor do que 2π, então transladando-os algumas unidades à esquerda obtemos dois números no intervalo $[0, 2\pi)$

$n \in \mathbb{N}$ tais que

$$2\pi \log_{10} D + \ell 2\pi \leq n\theta < 2\pi \log_{10}(D+1) + \ell 2\pi,$$

se e somente se existem números $a, b \in [0, 2\pi)$ e um natural $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a + k2\pi \leq n\theta < b + k2\pi.$$

Agora olhe de novo para a Figura 2. Concluímos que isso é equivalente a afirmação de que existe um número n tal que ao rodarmos o ponto 0 no círculo por um ângulo θ exatamente n de vezes, vamos parar dentro do intervalo (a, b). Como $\theta = \beta 2\pi$, e sabemos que β é irracional pelo Lema 3.3, o Teorema 2.3 garante que essa última afirmação é verdadeira. Portanto, todas as afirmações da cadeia de equivalências que nos levou a ela são também verdadeiras. Em particular, a primeira afirmação, "a expressão decimal de 2^n começa com a sequência D", é verdadeira. Isso termina a prova. $\square$

Agradecimentos

Essa conexão inusitada entre potências de 2 e rotações me foi apresentada pela Professora Katrin Gelfert, quando fui seu aluno de Teoria Ergódica na UFRJ. Na época ela me indicou a referência [1], onde se encontra o argumento acima no primeiro capítulo. Eu agradeço a ela por aquele belo curso que marcou meu doutorado.

Referências

[1] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. Ergodic theory with a view towards number theory, volume 259 of. *Graduate Texts in Mathematics*.

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense

Current address: Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Bloco H - Campus do Gragoatá São Domingos- Niterói - RJ - Brazil CEP 24.210-201

E-mail address: `brunosantiago@id.uff.br`