UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Segunda Avaliação – 2019.1 (Álgebra Linear e Matemática para Economia III)
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (2 pt)**.** *Considere a função linear* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*, definida por*

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, 5z, x + y + z).$$

Calcule a dimensão da imagem de f*.*

Solução. Vamos determinar o núcleo de f. Se $v = (x, y, z)$ satisfaz $f(v) = 0$ então $2x = 3y = 5z = 0$ o que implica $x = y = z = 0$ e portanto $N(f) = \{0\}$. Concluímos assim que $\dim N(f) = 0$. Pelo teorema do Núcleo e da Imagem, segue que $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$.

Observe que a matriz de f na base canônica é

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e que o exercício equivale a dizer que a matriz F tem posto 3. □

Exercício 2 (3 pt)**.** *Considere a função linear* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *cuja matriz na base canônica é*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Calcule o posto de F *e decida se* $b = (1, 2, 3, 4)$ *pertence ou não à* $\operatorname{Im}(f)$*.*

Solução. Vamos aplicar o algorítimo de eliminação de Gauss à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \vdots & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & \vdots & 3 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

No primeiro passo fazemos as substituições de linhas $\ell_2 \to -4\ell_1 + \ell_2$, $\ell_3 \to -7\ell_1 + \ell_3$ e $\ell_4 \to -10\ell_1 + \ell_4$, obtendo assim a nova matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & \vdots & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & \vdots & -4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora as substituições $\ell_3 \to -2\ell_2 + \ell_3$ e $\ell_4 \to -3\ell_2 + \ell_4$ chegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Como em cada etapa do processo de eliminação, trocamos as linhas por combinações lineares entre elas, vemos que o subespaço gerado pelos vetores

$$\{(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,-3,-6,-9),(1,2,3,4)\}$$

e o subespaço gerado pelos vetores

$$\{(1,2,3,4),(4,5,6,7),(7,8,9,10),(10,11,12,13)\}$$

possuem ambos a mesma dimensão. No entanto, o o subespaço gerado por

$$\{(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,-3,-6,-9),(1,2,3,4)\}$$

possui dimensão 2. Portanto, o posto-linha da matriz F é 2. Pelo igualdade entre o posto-linha e o posto coluna, concluímos que o posto de F é 2.

Além disso, o escalonamento da matriz aumentada nos permite concluir também que o sistema linear $F(v) = b$ equivale ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\ -3y - 6z - 9t &= -2, \end{aligned}$$

o qual, por possuir 2 equações e 4 incógnitas, sempre possui solução. Isso prova que $b \in Im(f)$. $\square$

Exercício 3 (2 pt)**.** *Três equipes participam de um torneio esportivo amador em que provas de diversas modalidades foram disputadas. Como nos jogos olímpicos, aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata e bronze para o 1º, o 2º e o 3º lugar, respectivamente. A quantidade de medalhas de cada equipe bem como sua pontuação final são apresentadas na tabela a seguir. Quantos pontos valem cada medalha*

Equipes	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	**46**
B	5	3	1	**57**
C	4	3	3	**53**

Figura 1: Quadro de medalhas para equipes A, B e C.

de ouro, prata e bronze?

Solução. Sejam o o número de pontos atribuídos a cada medalha de ouro, p o número de pontos a cada medalha de prata e b o número de pontos pra cada medalha de bronze. A tabela de pontuação permite estabelecer o seguinte sistema de equações envolvendo esses números

$$\begin{aligned} 4o + 2p + 2b &= 46 \\ 5o + 3p + b &= 57 \\ 4o + 3p + 3b &= 53 \end{aligned}$$

Vamos aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada para obter a solução.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & \vdots & 46 \\ 5 & 3 & 1 & \vdots & 57 \\ 4 & 3 & 3 & \vdots & 53 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1/2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 23 \\ 5 & 3 & 1 & \vdots & 57 \\ 4 & 3 & 3 & \vdots & 53 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell_2 \to -5\ell_1 + 2\ell_2 \\ \ell_3 \to -2\ell_1 + \ell_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 23 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

$$\ell_3 \to -\ell_2 + \ell_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 23 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 8 \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim o sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2o + p + b &= 23 \\ p - 3b &= -1 \\ 4b &= 8 \end{aligned}$$

cuja solução é imediatamente obtida: $b = 2$, $p = 5$ e $o = 8$. □

Exercício 4 (3 pt)**.** *Considere uma conta bancária que rende juros a uma taxa mensal constante igual $\xi \in (0,1)$. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ o vetor que representa o fluxo de dinheiro nessa conta (depósitos e saques) durante n meses. Por exemplo, $c_4 < 0$ significa que houve saque no 4º mês, e $c_7 > 0$ indica que houve depósito no 7º mês. Seja $s \in \mathbb{R}^n$ o vetor saldo, ou seja, a entrada s_j é o saldo na conta no mês j. Assim, $s_1 = c_1$ e*

$$s_{j+1} = (1+\xi)s_j + c_{j+1}.$$

Encontre uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ tal que $A(c) = s$.

Solução. A fórmula recursiva $s_{j+1} = (1+\xi)s_j + c_{j+1}$, tendo-se em conta que $s_1 = c_1$, nos permite escrever

$$s_2 = (1+\xi)s_1 + c_2 = (1+\xi)c_1 + c_2.$$

A partir daí, vemos que

$$s_3 = (1+\xi)s_2 + c_3 = (1+\xi)^2 c_1 + (1+\xi)c_2 + c_3.$$

Ou seja, para cada $\ell = 1, ..., n$, temos

$$s_\ell = \sum_{j=0}^{\ell-1} (1+\xi)^j c_j.$$

A partir dessa fórmula, podemos ver que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1+\xi) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (1+\xi)^2 & (1+\xi) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ (1+\xi)^{n-1} & (1+\xi)^{n-2} & (1+\xi)^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

satisfaz $A(c) = s$. Isso completa a solução. □

Desafio 1 (0.5 pt)**.** *O Campeonato Brasileiro de Futebol é uma competição disputada em dois turnos por 20 equipes. Assim, cada equipe faz 38 jogos no campeonato. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto, e derrotas não pontuam. A equipe campeã é aquela que soma mais pontos ao final da competição. As quatro equipes com menor pontuação são* rebaixadas *para a segunda divisão do campeonato. Os dados das edições anteriores mostram que com 48 pontos uma equipe consegue escapar do rebaixamento. Arthur torce pelo Vasco e gostaria de saber qual o número mínimo de vitórias que o Vasco precisa ter para escapar do rebaixamento. Qual é esse número?*

Solução. Sejam v a quantidade de vitórias, e a quantidade de empates e d a quantidade de derrotas. Em particular, v, e e d representam números naturais positivos. Este exercício é basicamente combinatório e é possível dar uma solução apenas testando valores. No entanto, gostaria de propor uma solução geométrica que usa ideias elementares de álgebra linear.

Pelo enunciado, deduzimos que os números v, e e d estão relacionados pelo seguinte sistema equações

$$\begin{aligned} 3v + e &= 48 \\ d + v + e &= 38 \end{aligned}$$

Esse sistema corresponde, em $\mathbb{R}^3$, a interseção entre os planos de equação $v + e + d = 38$ e $3v + e = 48$. Veja a Figura 2 O plano azul é o plano $v + e + d = 38$ e o plano vermelho é o plano $3v + e = 38$. O conjunto de soluções do sistema de equações acima é a reta laranja, dada justamente pela interseção entre os planos azul e vermelho. Observe que, ao longo da reta laranja, o valor de v diminui quando e aumenta e quando d diminui.

Portanto, o menor valor de v ocorre quando $d = 0$ (lembre que e, v e d são assumidos positivos) e nesse caso os números v e e ficam univocamente determinados pelo sistema bidimensional, que traduz a interseção entre a reta azul pontilhada e a reta vermelha pontilhada na Figura 2,

$$\begin{aligned} 3v + e &= 48 \\ v + e &= 38. \end{aligned} \tag{1}$$

Subtraindo a segunda da primeira equação obtemos $2v = 10$ e portanto $v = 5$ é o número mínimo de vitórias necessárias para se escapar do rebaixamento. □

Desafio 2 (0.5 pt)**.** *Uma investidora possui uma capacidade de investir de no máximo R\$10000. Seu gerente oferece duas opções de investimento: A e B. O investimento A*

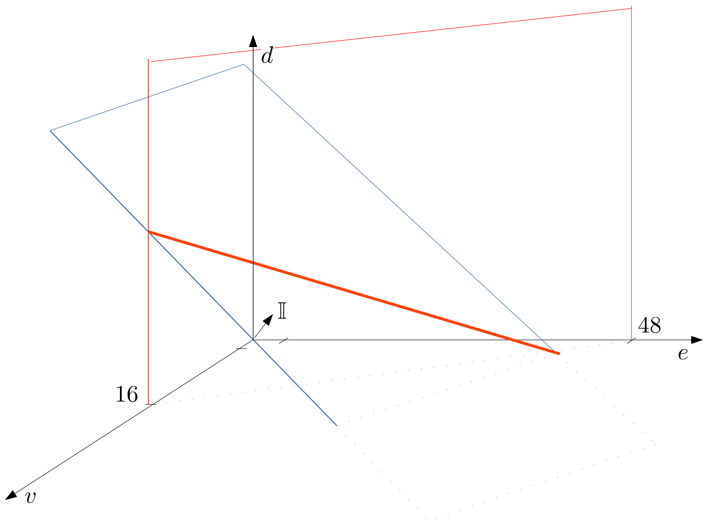

Figura 2: Planos $v + e + d = 38$ e $3v + e = 48$ em $\mathbb{R}^3$.

é muito arriscado mas oferece um lucro de 10% ao ano, ao passo que o investimento B é muito seguro, mas oferece um lucro de 7% ao ano. Após alguma reflexão, ela decide investir no máximo R$ 6000 na opção A e pelo menos R$ 2000 na opção B. Como ela deve investir de modo a maximizar seus lucros, e qual o lucro máximo nesse caso?

Solução. Vamos modelar com a variável a a quantidade a ser investida no ativo A e com a variável b a quantidade a ser investida no ativo B. Nesse caso, o lucro obtido com o investimento é dado pela função

$$L(a, b) = 0.1a + 0.07b.$$

O objetivo do problema é maximizar essa função sujeita às restrições impostas. Como o investimento em A é no máximo R$ 6000, o investimento em B é pelo menos R$ 2000 e como o orçamento é de R$ 10000 temos o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{aligned} 0 \leq a &\leq 6000 \\ b &\geq 2000 \\ a + b &= 10000. \end{aligned}$$

Para determinar a região de restrição em $\mathbb{R}^2$, consideramos a função $f(a, b) = a + b$. Observe que f é uma função linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e seu núcleo é a reta que passa pela origem formando um ângulo de 135° com a horizontal, a reta tracejada azul na Figura 3. As curvas de nível de f são retas paralelas ao seu núcleo, sendo que quanto mais a direita mais alto é o nível. Observe que esse é o lado para onde aponta o vetor gradiente de f (lembre que o vetor gradiente é ortogonal ao núcleo). Assim, a região de restrição é formada por todos os pontos à esquerda da reta vertical $a = 6000$ (reta vermelha na Figura 3) e à direita da reta vertical $a = 0$, aqueles que satisfazem à restrição $0 \leq a \leq 6000$; juntamente com todos os pontos acima da reta verde $b = 2000$ que traduzem a restrição $b \geq 2000$; finalmente, todos os pontos à esquerda da reta azul cuja equação é $f(a, b) = 10$. O resultado é a região tracejada laranja.

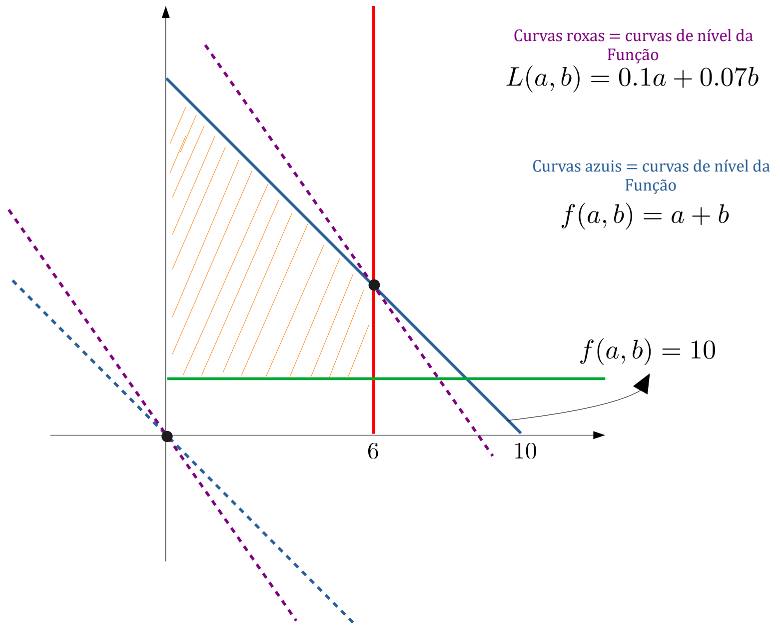

Figura 3: .

Vamos agora analisar o crescimento da função $L(a,b) = 0.1a + 0.07b$. O seu núcleo é a reta roxa tracejada de equação $b = (-1/0.7)a$. Observe que o vetor gradiente de L aponta para a direita. Portanto, o máximo de L vai ser atingido no ponto mais à direita dentro da região de restrição por onde passar uma reta paralela à reta roxa. Como a inclinação da reta roxa é menor do que a inclinação da reta azul e maior do que da reta vermelha, vemos que no ponto de interseção entre a reta azul e reta vermelha passa uma reta roxa paralela e qualquer reta paralela mais a direita não passa pela região de restrição.

Portanto, o ponto de máximo de L dentro da região de restrição é o ponto de interseção entre a reta vermelha de equação $a = 6000$ e a reta azul de equação $a + b = 10000$, ou seja $P = (6000, 4000)$. $\square$

Desafio 3 (3 pt)**.** *Uma matriz quadrada $d \times d$ é dita um quadrado mágico quando a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é uma constante. Mostre que o conjunto dos quadrados mágicos forma um subespaço de dimensão $d^2 - 2d$ do espaço $\mathcal{M}(d \times d)$ das matrizes $d \times d$.*

Solução. Na solução desse exercício, vamos usar o lema a seguir.

Lema 1. *Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita e seja $f : X \to Y$ uma função linear. Considere $v \in \operatorname{Im}(f) \setminus \{0\}$. Seja $n = \dim N(f)$ a nulidade de f. Então, o conjunto*

$$E = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^{-1}(tv).$$

é um subespaço vetorial de dimensão $n + 1$

O significado desse lema é o seguinte: o núcleo de f é um subespaço de X com dimensão n. Além disso, o núcleo de f é, por definição, a curva de nível 0 de f, ou seja,

$N(f) = f^{-1}(0)$. O núcleo é a *única* curva de nível de f que é um subespaço.[1] O que o lema diz é que apesar de cada curva de nível, tomada isoladamente, não ser um subespaço, a sua totalidade forma um subespaço de dimensão 1 a mais que a dimensão do núcleo de f. Essa discussão obviamente não faz parte da solução do exercício, ela tem apenas o intuito de esclarecer um pouco a ideia por trás do Lema 1.

Vamos seguir com a solução do exercício e ver como esse resultado se insere no problema, deixando a demonstração do Lema 1 para o final.

A primeira observação importante da solução é a dimensão do espaço das matrizes. Observe que uma matriz $A = [a_{ij}]_{d\times d}$ pode ser identificada com uma lista ordenada com d^2 entradas. Uma forma de fazer essa identificação é

$$a = (a_{11}, ..., a_{d1}, a_{12}, ..., a_{d2}, ..., a_{dd}).$$

Isso mostra que o espaço das matrizes pode ser identificado com $\mathbb{R}^{d^2}$, e portanto tem dimensão d^2. Usando essa identificação, vamos representar vetores de $\mathbb{R}^{d^2}$ como matrizes $d \times d$.

Dessa forma, considere os vetores

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \; c_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\ell_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \; \ell_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \; \ell_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $k = \dim \mathcal{S}(c_1, ..., c_d, \ell_1, ..., \ell_d, D_1, D_2)$ a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{d^2}$ gerado por esses vetores.

Considere agora a função linear $f : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{2d+2}$ dada por

$$f(x) = (\langle c_1, x\rangle, \dots, \langle c_d, x\rangle, \langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_d, x\rangle, \langle D_1, x\rangle, \langle D_2, x\rangle).$$

A função f está intimamente ligada ao problema dos quadrados mágicos. Cada entrada de $f(x)$ fornece a soma das entradas de uma linha, ou de uma coluna, ou de uma diagonal de x. Mais precisamente, a primeira entrada de $f(x)$ fornece justamente a soma das entradas na primeira coluna de x, a segunda entrada fornece a soma das entradas na segunda coluna de x e assim por diante. A entrada $d + 1$ de $f(x)$ fornece a soma das entradas na primeira linha de x, a entrada $d + 2$ fornece a soma das entradas na segunda linha de x e assim por diante até a entrada $2d$ que fornece a soma das entradas na d-ésima

[1] As outras curvas de nível são o que a gente chama de variedade afim, um subespaço transladado.

linha de x. As duas entradas finais fornecem a soma das entradas nas duas diagonais de x.

Observe que $x \in \mathbb{R}^{d^2}$ é um quadrado mágico se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = t\mathbb{I}$, onde $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{2d+2}$ é o vetor de uns. Nesse caso, a soma das entradas em cada linha, cada coluna e cada diagonal de x é igual a t. Em particular, se denotarmos por $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{d^2}$ o conjunto dos quadrados mágicos, vemos que

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^{-1}(t\mathbb{I}). \tag{2}$$

Pelo Lema 1 concluímos que $\mathcal{Q}$ é um subespaço de dimensão $n + 1$, onde $n = \dim N(f)$. O problema fica reduzido então a determinar n.

Para isso, observe que a matriz de f possui d^2 colunas por $2d + 2$ linhas. Além disso, as linhas da matriz de f são os vetores $\{c_1, ..., c_d, \ell_1, ..., \ell_d, D_1, D_2\}$. Pela igualdade entre o posto-linha e o posto-coluna deduzimos que o posto de f é

$$k = \dim \mathcal{S}(c_1, ..., c_d, \ell_1, ..., \ell_d, D_1, D_2).$$

Afirmo que $k = 2d + 1$. Com efeito, note que

$$\sum_{j=1}^{d} c_j = \sum_{j=1}^{d} \ell_j = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

e portanto o conjunto $\{c_1, ..., c_d, \ell_1, ..., \ell_d, D_1, D_2\}$ é LD. Isso prova que $k \leq 2d + 1$. Por outro lado, o conjunto

$$A = \{c_1, ..., c_{d-2}, c_{d-1}, \ell_1, ..., \ell_d, D_1, D_2\}$$

é LI. Se provarmos isso, teremos como consequência que $k \geq 2d+1$, e a igualdade $k = 2d+1$ sairá como consequência. Vamos ver então que A é LI. Suponha que $\alpha_1, ..., \alpha_{d-1}$, $\beta_1, ..., \beta_d$, γ_1 e γ_2 são tais que

$$\sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j c_j + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \ell_j + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 = 0. \tag{3}$$

Observe que $\sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j c_j + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \ell_j + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 & \beta_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \alpha_3 & \dots & \beta_1 + \alpha_{d-1} & \beta_1 + \gamma_2 \\ \alpha_1 + \beta_2 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_1 & \alpha_3 + \beta_2 & \dots & \alpha_{d-1} + \beta_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 + \beta_d + \gamma_2 & \alpha_2 + \beta_d & \alpha_3 + \beta_d & \dots & \alpha_{d-1} + \beta_d & \beta_d + \gamma_1 \end{bmatrix}.$$

Como todas as entradas dessa matriz são nulas, vemos então que $\beta_2 = \beta_3 = ...\beta_{d-1} = 0$, o que imediatamente implica que $\alpha_1 = \alpha 3 = \alpha_4 = ... = \alpha_{d-1} = 0$. Segue daí que $\beta_1 = 0$, e portanto $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Logo, $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_d = 0$. Concluímos assim que todos os coeficientes da combinação linear (3) são nulos, o que prova que o conjunto A é LI.

Isso confirma que $k = 2d + 1$ é o posto de f. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem a nulidade de f é $d^2 - 2d - 1$. Pela igualdade (2) e pelo Lema 1 concluímos que

$$\dim \mathcal{Q} = d^2 - 2d.$$

Para terminar a solução, vamos apresentar uma prova do Lema 1.

Demonstração do Lema 1. Primeiro vamos ver que E é um subespaço de X. Sejam $x, y \in E$ e α e β número reais. Como $x, y \in E$ existem $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $x \in f^{-1}(tv)$ e $y \in f^{-1}(sv)$. Ou seja $f(x) = tv$ e $f(y) = sv$. Pela linearidade de f segue então que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha tv + \beta sv = (\alpha t + \beta s)v.$$

Portanto, $\alpha x + \beta y \in f^{-1}\left((\alpha t + \beta s)v\right) \subset E$. Isso prova que E é um subespaço.

Seja agora $\{b_1, ..., b_n\}$ uma base para o núcleo de f. Como $v \in \mathrm{Im}(f)$, existe $b \in X$ tal que $f(b) = v$. Como $v \neq 0$, necessariamente $b \notin N(f)$. Portanto, o conjunto $\{b_1, ..., b_n, b\}$ é LI. Vamos provar que ele é gerador de E.

Seja $x \in E$. Então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = tv$. Logo,

$$f(x) = tf(b) = f(tb) \implies 0 = f(x) - f(tb) = f(x - tb).$$

Portanto, $x - tb \in N(f)$. Como $\{b_1, ..., b_n\}$ é base de $N(f)$, devem existir números reais $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que

$$x - tb = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \implies x = tb + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j.$$

Isso prova que o conjunto $\{b_1, ..., b_n, b\}$ é uma base de E, e portanto $\dim E = n+1$. □

□