

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Terceira Avaliação – 2019.1 (Matemática para Economia III a Álgebra Linear)
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (3 pt). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre todos os autovetores e autovalores de A .
- (b) Expresse o vetor $w = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos autovetores de A .
- (c) Usando sua solução do item anterior, expresse o vetor $A^{49}(w)$ em função dos autovetores e dos autovalores de A .

Solução. O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Como podemos fazer a fatoração $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, vemos que as raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Portanto os **autovalores de A são 2 e 4**.

Autovalores associados a $\lambda_1 = 2$ – Procuramos um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaça $A(v) = 2v$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}.$$

A igualdade vetorial acima é equivalente ao sistema de equações numéricas

$$\begin{aligned} x + y &= 2x \\ -3x + 5y &= 2y. \end{aligned}$$

A solução desse sistema é a reta de equação $x = y$. Em particular, **o vetor $v = (1, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor 2**.

Autovalores associados a $\lambda_2 = 4$ – Procuramos um vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaça $A(u) = 4u$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}.$$

A igualdade vetorial acima é equivalente ao sistema de equações numéricas

$$\begin{aligned} x + y &= 4x \\ -3x + 5y &= 4y. \end{aligned}$$

A solução desse sistema é a reta de equação $y = 3x$. Em particular, **o vetor $u = (1, 3)$ é um autovetor de A , associado ao autovalor 4**.

Vemos que o vetor $w = (2, 4)$ pode ser escrito como $w = u + v$. Então, $A(w) = A(u) + A(v) = 4u + 2v$, e portanto

$$A^2(w) = 4A(u) + 2A(v) = 4^2u + 2^2v.$$

Por indução, vemos que

$$A^n(w) = 4^n u + 2^n v,$$

e portanto $A^{49}(w) = 4^{49}(1, 3) + 2^{49}(1, 1)$. □

Exercício 2 (2 pt). *Considere o grafo G da figura a seguir. Prove que não existe um*

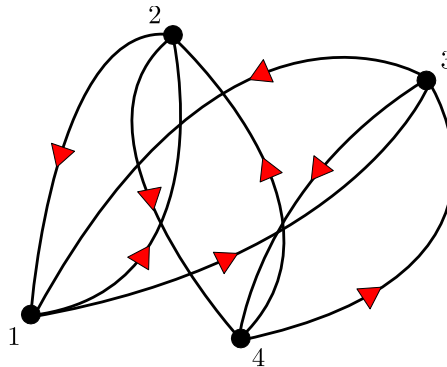


Figura 1: Grafo com 4 vértices e 8 arestas.

caminho que ligue o vértice 4 até o vértice 3 fazendo um número par de travessias.

Solução. A matriz de adjacência do grafo G é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Procedendo indutivamente vemos que as potências sucessivas de A obedecem ao seguinte padrão: as potências pares têm a forma

$$A^{2n} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix},$$

ao passo que as potências ímpares têm a forma

$$A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 0 & 2^{n+1} \\ 2^{n+1} & 0 & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Em particular, vemos que a entrada na linha 3 e coluna 4 de qualquer potência par de A é igual a 0. Isso prova que não existe nenhum caminho que comece no vértice 4 termine no vértice 3, fazendo-se um número par de travessias. \square

Exercício 3 (2 pt). *Uma rede varejista possui 3 lojas espalhadas por Niterói. Cada loja recebe em uma dada semana uma quantidade de mercadoria, de forma que as lojas 1, 2 e 3 recebam, respectivamente, 3, 4 e 5 mil mercadorias. O gerente geral de logística decide redistribuir de forma que para cada loja j , uma fração a_{ij} da quantidade de mercadorias que ela recebe será enviada à loja i . Em particular, a_{jj} representa a fração da quantidade de mercadorias recebidas que permanecerá na loja j . Seja y_j a quantidade de mercadoria final da loja j (após a redistribuição). Supondo que os números a_{ij} formem a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix},$$

determine a quantidade de mercadorias y_3 que a terceira loja receberá após a redistribuição.

Solução. Sejam $x = (3, 4, 5)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Então, o modelo colocado no enunciado fornece a relação a seguinte entre esses vetores: $y = A(x)$. Ou seja,

$$y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 5.2 \\ 3.4 \end{bmatrix}.$$

Portanto $y_3 = 3.4$. Ou seja, a terceira loja vai ficar com 3.4 mil mercadorias após a redistribuição. \square

Exercício 4 (2 pt). *Considere a matriz 7×7 abaixo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^7 .

Solução. Como cada coluna da matriz é a imagem do respectivo vetor da base canônica vemos que $A(e_1) = e_2$, $A(e_2) = e_3, \dots, A(e_6) = e_7$ e $A(e_7) = e_1$. Ou seja, a matriz atua

fazendo uma permutação circular nos vetores da base canônica, como ilustra esquematicamente o diagrama abaixo

$$e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow e_4 \rightarrow e_5 \rightarrow e_6 \rightarrow e_7 \rightarrow e_1.$$

Em particular, ao aplicarmos a matriz sucessivamente a qualquer vetor canônico por sete vezes seguidas voltamos para o mesmo lugar, ou seja $A^7(e_j) = e_j$, para todo $j = 1, \dots, 7$. Portanto, $A^7 = Id$. \square

Exercício 5 (1 pt). *Calcule o posto e determine todos os autovetores e autovalores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Solução. Seja $\mathbb{I} = (1, 1, 1, 1)$. Pelas colunas da matriz vemos que $A(e_1) = 2\mathbb{I}$, $A(e_2) = 4\mathbb{I}$, $A(e_3) = 6\mathbb{I}$ e $A(e_4) = 8\mathbb{I}$. Vemos portanto que a imagem de A é a reta gerada pelo vetor \mathbb{I} . Isso prova que o posto de A é igual a 1. Além disso, a reta gerada pelo vetor \mathbb{I} é a única reta que pode ser invariante. Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix},$$

ou seja $A(\mathbb{I}) = 20\mathbb{I}$, vemos que \mathbb{I} é um autovetor e o único autovalor de A é 20. \square

Desafio 1 (2 pt). *Uma empresa possui um lucro de R\$100.000,00, antes de serem contados os impostos. Suponha que seja permitido a empresa doar uma porcentagem de seu lucro líquido (já descontados os impostos) e que o valor doado não seja computado no cálculo dos impostos. Suponha que a empresa decida doar então 10% de seu lucro líquido, e que o imposto estadual seja de 5% do lucro descontado o valor doado, e que o imposto federal seja de 40% do lucro descontados o imposto estadual e o valor da doação. Determine o custo efetivo da doação, ou seja, o valor doado descontado da dedução fiscal.*

Solução. Sejam δ o valor da doação, ε o valor numérico do imposto estadual e ϕ o valor do imposto federal. Como o lucro antes de serem descontados os impostos é de 100000, o lucro líquido é $100000 - (\varepsilon + \phi)$. Como o valor da doação pretendida é 10% do lucro líquido temos então que

$$\delta = 0.1(100000 - (\varepsilon + \phi)).$$

Como o imposto estadual é 5% do lucro bruto descontada a doação, temos que

$$\varepsilon = 0.05(100000 - \delta).$$

Finalmente, como o imposto federal é de 40% do lucro bruto menos doação mais imposto estadual temos que

$$\phi = 0.4(100000 - (\delta + \varepsilon)).$$

As três equações descritas acima equivalem ao sistema linear

$$\begin{aligned}\delta + 0.1\varepsilon + 0.1\phi &= 10000 \\ 0.05\delta + \varepsilon &= 5000 \\ 0.4\delta + 0.4\varepsilon + \phi &= 40000\end{aligned}\tag{1}$$

A solução desse sistema é (aproximadamente) $\delta = 5956$, $\varepsilon = 4702$ e $\phi = 35736$. Aqui eu usei **Julia** para o cálculo da solução, mas é um sistema 3×3 padrão que se resolve pelo método de eliminação com contas feias apenas. Observe que fazendo a doação o empresário terá um total de débitos igual a

$$\delta + \varepsilon + \phi = 46394,$$

e portanto o lucro líquido (receita menos débitos com doações e impostos) igual a R\$ 53606. Caso o empresário não fizesse a doação pagaria diretamente R\$5000 de imposto estadual (5% do da receita bruta) e R\$38000 de imposto federal (40% de 95000, que é a receita bruta descontada do valor de imposto estadual). Portanto, sem fazer a doação o total de débitos seria R\$43000, e o lucro líquido (receita bruta menos impostos) seria R\$57000.

Isso mostra que o custo efetivo da doação é

$$\text{lucro liq. sem doação} - \text{lucro liq. com doação} = 57000 - 53606 = 3394.$$

□

Desafio 2 (2 pt). Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove que se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz de A relativamente a uma base qualquer de \mathbb{R}^2 então $b \neq 0$, ou $c \neq 0$. Em outras palavras: nenhuma matriz de A é diagonal.

Solução. Observe que a matriz A relativamente a uma certa base $\{u, v\}$ de \mathbb{R}^2 é diagonal se, e somente se, u e v são autovetores LI. No entanto, como $A(e_1) = (0, -1)$ e $A(e_2) = (1, 0)$, vemos que A é uma rotação de 90 graus no sentido horário. No entanto, isso implica que A não pode ter retas invariantes. Logo nenhuma matriz de A é diagonal. □

Desafio 3 (2 pt). A sequência de Fibonacci é definida recursivamente começando-se com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ e cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois termos anteriores. Assim, por exemplo, $x_2 = x_1 + x_0 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = 5$ e assim por diante. Encontre uma matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ tal que

$$A^n(x_0, x_1) = (x_n, x_{n-1}).$$

Calcule os autovalores e autovetores da matriz A e obtenha uma fórmula para o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Solução. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Observe que

$$A(x_{n-1}, x_n) = (x_n, x_{n-1} + x_n) = (x_n, x_{n+1}).$$

Portanto, $A^n(x_0, x_1) = (x_n, x_{n+1})$. Vamos calcular os autovalores e os autovetores de A . O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Portanto, as raízes de p são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Autovetores associados a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – Procuramos um vetor $v = (x, y)$ que satisfaça $A(v) = \lambda_1 v$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y \end{bmatrix}.$$

A equação vetorial acima equivale ao sistema numérico de equações

$$\begin{aligned} y &= \frac{x + x\sqrt{5}}{2} \\ x + y &= \frac{y + y\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

cuja solução é a reta de equação $y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x$. Em particular, $v = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ é um autovetor associado ao autovalor λ_1 .

Autovetores associados a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – Procuramos um vetor $u = (x, y)$ que satisfaça $A(u) = \lambda_2 u$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)y \end{bmatrix}.$$

A equação vetorial acima equivale ao sistema numérico de equações

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x\sqrt{5}}{2} \\ x + y &= \frac{y - y\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

cuja solução é a reta de equação $y = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x$. Em particular, $u = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ é um autovetor associado ao autovalor λ_2 .

Vamos escrever o vetor $e_2 = (x_0, x_1) = (0, 1)$ como combinação linear de u e v . Devemos encontrar números α e β que satisfaçam $\alpha u + \beta v = e_2$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\beta &= 1 \end{aligned}$$

A solução do sistema acima é $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto, como

$$A^n(x_0, x_1) = \beta \lambda_1^n v + \alpha \lambda_2^n u = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right),$$

e como $A^n(x_0, x_1) = (x_n, x_{n+1})$ vemos que o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci será dado por

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

□