UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Verificação de reposição – 2019.1 (Álgebra Linear e Matemática para Economia III)
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (2 pt). *Calcule todos os autovalores a autovetores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução. O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Como podemos fazer a fatoração $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$, vemos que as raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Portanto os **autovalores de A são 1 e 4.**

Autoverores associados a $\lambda_1 = 1$ – Procuramos um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaça $A(v) = v$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A igualdade vetorial acima é equivalente ao sistema de equações numéricas

$$\begin{aligned} 2x + y &= x \\ 2x + 3y &= y. \end{aligned}$$

A solução desse sistema é a reta de equação $y = -x$. Em particular, **o vetor** $v = (1, -1)$ **é um autovetor de A associado ao autovalor** 2.

Autoverores associados a $\lambda_2 = 4$ – Procuramos um vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaça $A(u) = 4u$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}.$$

A igualdade vetorial acima é equivalente ao sistema de equações numéricas

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4x \\ 2x + 3y &= 4y. \end{aligned}$$

A solução desse sistema é a reta de equação $y = 2x$. Em particular, **o vetor** $u = (1, 2)$ **é um autovetor de A, associado ao autovalor** 4. □

Exercício 2 (2 pt). *Seja* $v = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \mathbb{R}^6$. *Encontre* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|kv\| = \pi$. *Qual a quinta coordenada do vetor unitário que possui a mesma direção de* v*?*

Solução. Dado $k \in \mathbb{R}$ temos que

$$\|kv\| = \sqrt{k^2 + 4k^2 + 9k^2 + 16k^2 + 25k^2 + 36k^2} = \sqrt{91k^2} = k\sqrt{91}.$$

Portanto, $\|kv\| = \pi$ se, e só se, $k = \pi/\sqrt{91}$. Observe ainda que $\|v\| = \sqrt{91}$. Portanto, o vetor unitário com a mesma direção de v é

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{91}}(1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Portanto a quinta coordenada do vetor unitário que possui a mesma direção de v é $5/\sqrt{91}$. $\square$

Exercício 3 (2 pt)**.** *Calcule o posto e determine todos os autovalores e autovetores da matriz $n \times n$ abaixo*

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Solução. Seja $\mathbb{I} = (1, 1, ..., 1)$. Observe que, pela forma das colunas de A, podemos deduzir

$$A(e_j) = c_j\mathbb{I}, \quad \forall\ j = 1, ..., n.$$

Isso implica que a imagem de A é a reta gerada por $\mathbb{I}$, e portanto A tem posto 1. Além disso, como

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_j \\ \sum_{j=1}^n c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_j \end{bmatrix},$$

ou seja, $A(\mathbb{I}) = \sum_{j=1}^n c_j\mathbb{I}$. Portanto o único autovalor de A é $\sum_{j=1}^n c_j$, e $\mathbb{I}$ é um autovetor. $\square$

Exercício 4 (3 pt)**.** *Sabendo-se que a matriz da função linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente à base $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$, onde $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (1, 1, 3)$ é*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

determine a matriz de f relativamente à base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solução. Vou resolver esse exercício de duas formas diferentes. A **primeira solução** é mais elementar e baseada exclusivamente na linearidade e no significado das colunas de uma matriz. Se a matriz da função f na base $\{u, v, w\}$ é como anunciado, podemos deduzir a partir das colunas da matriz dada que

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{3u}{2} - \frac{w}{2} \\ f(v) &= \frac{u}{2} + v - \frac{w}{2} \\ f(w) &= \frac{3u}{2} - \frac{w}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado, como $e_2 = v - u$ vemos pela linearidade de f que

$$f(e_2) = f(v) - f(u) = \frac{u}{2} + v - \frac{w}{2} - \frac{3u}{2} + \frac{w}{2} = -u + v = e_2.$$

Além disso, como $e_3 = \frac{w-u}{2}$ temos que

$$f(e_3) = \frac{1}{2}(f(w) - f(u)) = 0.$$

Finalmente, seguindo essa mesma estratégia, para calcular $f(e_1)$ devemos escrever e_1 como combinação linear de u, v e w. Ou seja, devemos encontrar α,β e γ tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = e_1$. Esses sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Subtraindo a terceira equação da primeira vemos que $\gamma = -1/2$ e portanto α e β satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3/2 \\ \alpha + 2\beta &= 1/2, \end{aligned}$$

cuja solução é $\beta = -1$ e $\alpha = 5/2$. Portanto,

$$\begin{aligned} e_1 = \frac{5u}{2} - v - \frac{w}{2} \implies f(e_1) &= \frac{5}{2}f(u) - f(v) - \frac{1}{2}f(w) \\ &= \frac{1}{2}(5f(u) - 2f(v) - f(w)) \\ &= \frac{1}{2}(4f(u) - 2f(v)) \\ &= 2f(u) - f(v) \\ &= 3u - w - \frac{u}{2} - v + \frac{w}{2} \\ &= \frac{5u}{2} - v + \frac{w}{2} \\ &= e_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Em resumo, concluímos que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ e $f(e_3) = 0$. Portanto, a matriz de f na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vou apresentar agora uma **segunda solução**, mais elegante porém que envolve longos cálculos matriciais, que serão apenas esboçados (usei **Julia** para fazer as contas). Na verdade, conceitualmente as duas soluções são a mesma, apenas a forma de apresentação é que muda.

Vimos em aula que se $F = [a_{ij}]$ é a matriz de f na base canônica, se $\tilde{F}$ é a matriz de f na base $\{u, v, w\}$ (dada no enunciado) e se M é a matriz cujas colunas são u, v e w, respectivamente, então

$$\tilde{F} = M^{-1}FM \quad \Longrightarrow \quad F = M\tilde{F}M^{-1}.$$

No produto acima que dá F, a matriz $\tilde{F}$ e dada no enunciado e a matriz M também (conhecemos suas colunas). É preciso então calcular M^{-1}. Na prova, isso deveria ser feito usando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Usando **Julia** basta dar o comando inv(M). Assim, calculamos diretamente $\tilde{F}$ com o comando M*F*inv(M), o que nos fornece a mesma matriz acima. □

Exercício 5 (2 pt)**.** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. Prove que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x - \lambda y$ é ortogonal a y.*

Solução. Tome $\lambda = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$. Então, pela linearidade do produto interno temos que

$$\langle x - \lambda y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0.$$

Portanto, $x - \lambda y$ é ortogonal a y, como queria demonstrar. □

Desafio 1 (3 pt)**.** *Seja G um grafo. Um ciclo num grafo consiste é caminho no grafo que começa e termina no mesmo vértice. Considere o grafo da Figura 1. Determine a quantidade total de ciclos de comprimento 3*

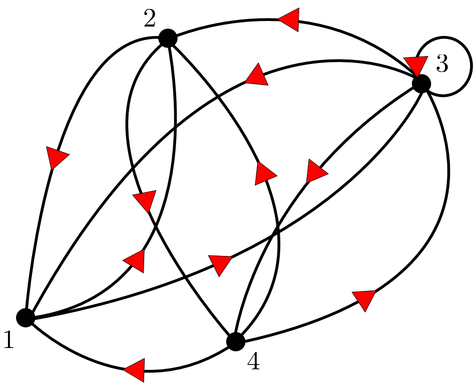

Figura 1: Grafo para o desafio 1.

Solução. A matriz de adjacência do grafo G é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A terceira potência da matriz A é

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

A quantidade total de ciclos no grafo é a soma das entradas na diagonal da matriz A^3, portanto existem 19 ciclos de comprimento 3 no grafo G. $\square$

Desafio 2 (1 pt)**.** *Suponha que o histórico de compras de n produtos por um conjunto de d consumidores seja modelado por uma matriz $Q = [q_{ij}]_{n\times d}$ de tal forma que q_{ij} seja a quantidade do produto i comprada pelo consumidor j. Nesse contexto, podemos interpretar também os preços desses n produtos como sendo um vetor $p \in \mathbb{R}^n$. Um* ***analista de dados*** *procura a matriz $C = [c_{ij}]_{n\times d}$ tal que a entrada c_{ij} forneça a quantidade de dinheiro gasta pelo consumidor j no produto i. Expresse a matriz C em função (das entradas) de Q e do vetor p.*

Solução. Se o consumidor j comprou q_{ij} unidades do produto i, a um preço p_i então o gasto será $q_{ij}p_i$. Ou seja $c_{ij} = q_{ij}p_i$. Portanto

$$C = \begin{bmatrix} q_{11}p_1 & q_{12}p_1 & \cdots & q_{1d}p_1 \\ q_{21}p_2 & q_{22}p_2 & \cdots & q_{2d}p_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1}p_n & q_{n2}p_n & \cdots & q_{nd}p_n \end{bmatrix}$$

$\square$

Desafio 3 (3 pt)**.** *Suponha uma economia constituída por 3 setores S_1, S_2 e S_3. Cada setor S_i consome uma porcentagem p_{ij} da produção do setor S_j. Suponhamos o "modelo fechado"para esta economia: nenhuma outra commoditie entra nessa economia. Denotamos por x_i a quantidade produzida pelo setor S_i. Assumimos que $x_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, 3$. Demonstre que sempre existe um vetor de produção $x = (x_1, x_2, x_3)$ que equilibra a economia, ou seja, de modo que o consumo de cada setor S_i seja igual a produção x_i deste setor.*

Solução. Seja $P = [p_{ij}]_{3\times 3}$. Nosso primeiro objetivo é demonstrar que existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $P(v) = v$. Note que isto é equivalente a mostrar que $0 = P(v) - v = (P - I)v$. Portanto, devemos mostrar que existe pelo menos um vetor com todas as entradas positivas e que esteja no *núcleo* da transformação linear $P - I$, onde I, como sempre, representa a matriz identidade.

Vamos mostrar que o núcleo de $I - P$ é não-trivial. Note que

$$I - P = \begin{bmatrix} 1 - p_{11} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & 1 - p_{22} & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & 1 - p_{33} \end{bmatrix}.$$

Como $\sum_{i=1}^{3} p_{ij} = 1$, para todo $j = 1, 2, 3$, vemos que a soma de cada coluna de $I - P$ é igual a zero. Como a coluna j é a imagem $(I - P)e_j$, vemos que a imagem de $I - P$ está contida no núcleo do funcional linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dado por $f(x, y, z) = x + y + z$. Como o núcleo de f é um plano e como, pelo que acabamos de ver, a imagem de $I - P$ está contida nesse plano, concluímos que a imagem de $I - P$ possui dimensão no máximo 2. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que o núcleo de $I - P$ possui dimensão pelo menos 1 e, portanto, é não-trivial.

Isso prova que existe $v \in \mathbb{R}^3$ diferente do vetor nulo, tal que $P(v) = v$. Vamos agora mostrar que podemos escolher um tal v com todas as entradas positivas. Para isso, supomos por contradição, que $v = (x, y, z)$ possui entradas negativas. Note que se todas as entradas de v forem negativas, basta tomarmos $-v$. Então, podemos supor que apenas duas entradas podem ser negativas (digamos, no máximo x e y são negativos; os outros casos são análogos).

Como $(I - P)v = 0$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{11} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & 1 - p_{22} & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & 1 - p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se $x < 0$, $y, z \geq 0$ como $1 - p_{11} > 0$, teremos que

$$0 = (1 - p_{11})x - p_{12}y - p_{13}y < 0,$$

o que é absurdo. Se $x, y < 0$ e $z \geq 0$, teremos que

$$0 = -p_{31}x - p_{32}y + (1 - p_{33})z > 0,$$

o que também é absurdo. Vemos assim que, em qualquer caso, assumir que v possui entradas < 0 nos leva a um absurdo. Portanto todas as entradas de v são não negativas. $\square$