Complementos de Matemática Aplicada - Administração e Contabilidade

Aula 02

Bruno Santiago

2 de julho de 2020

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m + k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m+k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

$$\begin{aligned} 65 \times 82 &= (60 + 5) \times 82 = 60 \times 82 + 5 \times 82 \\ &= 60 \times (80 + 2) + 5 \times (80 + 2) \\ &= 4800 + 120 + 400 + 10 \\ &= 5330. \end{aligned}$$

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m + k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

$$\begin{aligned} 65 \times 82 &= (60 + 5) \times 82 = 60 \times 82 + 5 \times 82 \\ &= 60 \times (80 + 2) + 5 \times (80 + 2) \\ &= 4800 + 120 + 400 + 10 \\ &= 5330. \end{aligned}$$

- Relação de ordem: 3>2>1; 3<4<5<6<7...

Um problema que $\mathbb{N}$ não resolve

- Qual o saldo da minha conta se eu comprar um iPhone 11 no débito?

Um problema que $\mathbb{N}$ não resolve

- Qual o saldo da minha conta se eu comprar um iPhone 11 no débito?

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
- Operação nova: subtração. Ex: 4-5=-1, 3-1=2;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo=$2p$;
- Lucro total=100 $\implies$ $p + 2p = 100$

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;
- Lucro total$=100 \implies p + 2p = 100$
- $3p = 100$.

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;
- Lucro total$=100 \implies p + 2p = 100$
- $3p = 100$.Mas $3x33 = 99$ e $3 \times 34 = 102$.

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;
- Soma de frações: $x = p/q$ e $y = p'/q'$ são dois números racionais então a sua soma é o número racional

$$x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'},$$

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;
- Soma de frações: $x = p/q$ e $y = p'/q'$ são dois números racionais então a sua soma é o número racional

$$x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'},$$

- Nova aplicação: frações servem para representar a proporção de uma quantidade ocupada por uma parte dela

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

Solução 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

Solução 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

Solução 2:

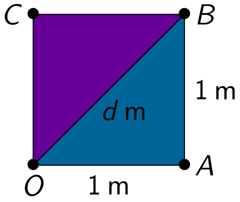
4 fatias mais 2 fatias, de um total de 8 fatias:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

Um problema que $\mathbb{Q}$ não resolve

Problema

Você decide pintar a face lateral de um criado mudo, que tem a forma de um quadrado com 1m de lado, com duas cores, dividindo ela ao meio em dois triângulos iguais.

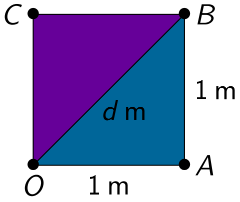


Qual o comprimento do segmento OB?

Um problema que $\mathbb{Q}$ não resolve

Problema

Você decide pintar a face lateral de um criado mudo, que tem a forma de um quadrado com 1m de lado, com duas cores, dividindo ela ao meio em dois triângulos iguais.



Qual o comprimento do segmento OB?

Solução

Teorema de Pitágoras $\implies$ $d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$
$d = \sqrt{2}$, que não é um número racional!

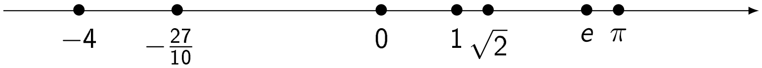
Os números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. É como se $\mathbb{R}$ "fechasse" os buracos deixados por $\mathbb{Q}$. Representamos $\mathbb{R}$ como uma reta, infinita, orientada da esquerda para direita. O "centro" dessa reta é o número 0, e todo ponto a direita de zero representa um número positivo, enquanto aqueles à esquerda representam números negativos. Quanto mais a direita um número estiver, maior ele será.

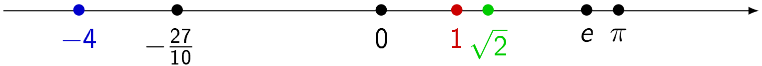
Os números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. É como se $\mathbb{R}$ "fechasse" os buracos deixados por $\mathbb{Q}$. Representamos $\mathbb{R}$ como uma reta, infinita, orientada da esquerda para direita. O "centro" dessa reta é o número 0, e todo ponto a direita de zero representa um número positivo, enquanto aqueles à esquerda representam números negativos. Quanto mais a direita um número estiver, maior ele será.

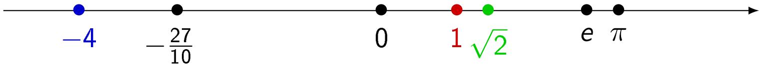
Representação gráfica de $\mathbb{R}$

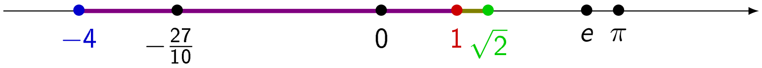


Distância entre números reais



Distância entre números reais

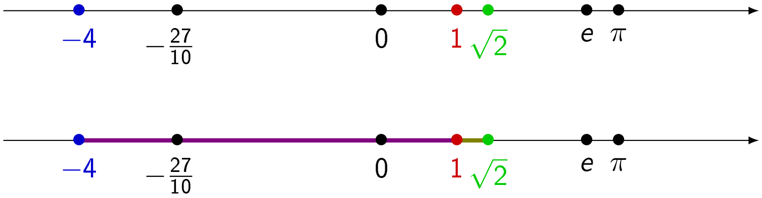




$$d(-4, 1) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

$$d(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \simeq 0.414$$

Distância entre números reais



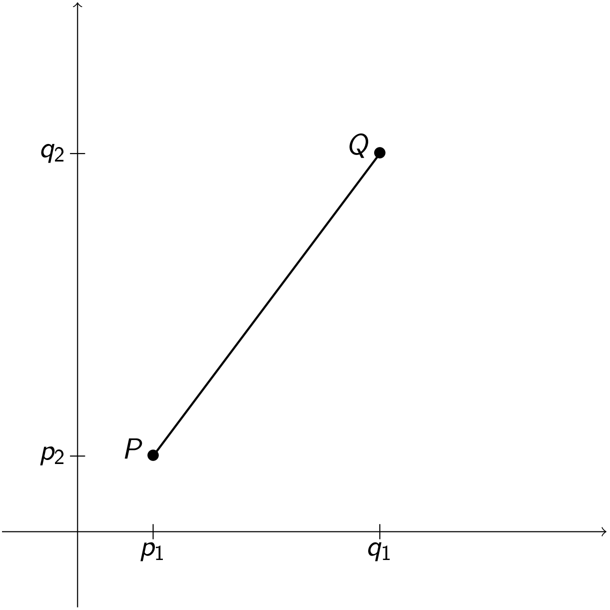
$$d(-4, 1) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

$$d(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \simeq 0.414$$

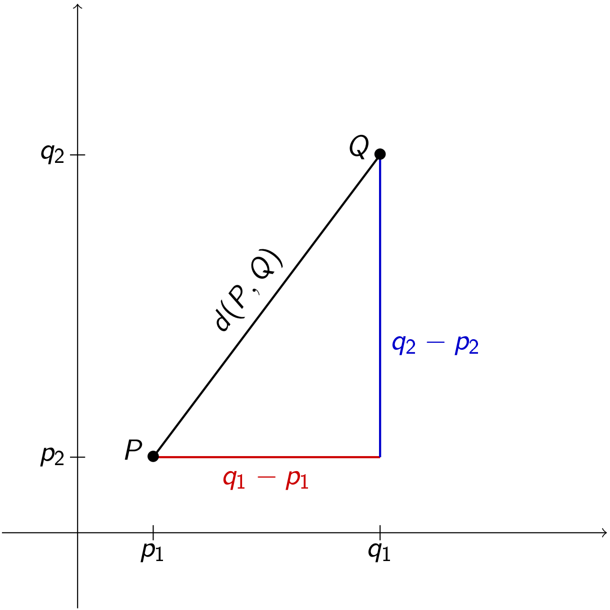
Em geral

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ distintos a distância entre a e b é $d(a, b) = |a - b|$, onde $|a - b|$ significa $a - b$ se $a > b$ ou $b - a$ se $b < a$.

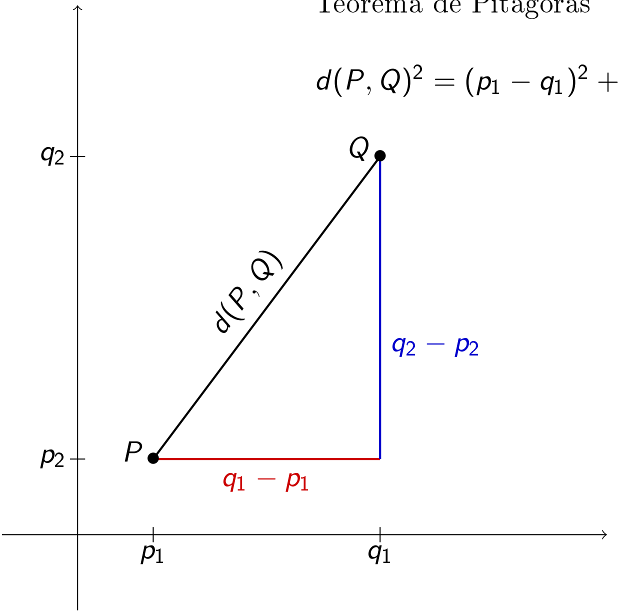
Aplicação: coordenadas no plano



Aplicação: coordenadas no plano



Aplicação: coordenadas no plano



Teorema de Pitágoras

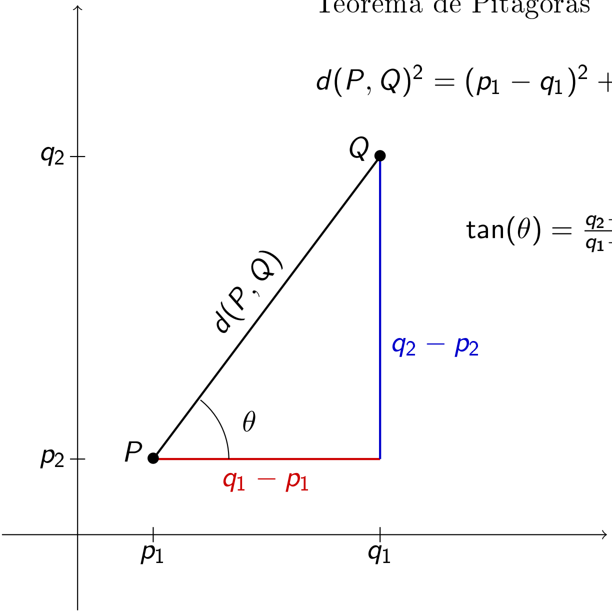
$$d(P,Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

Aplicação: coordenadas no plano

Teorema de Pitágoras

$$d(P,Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

$$\tan(\theta) = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$



Conteúdo adicional: irracionalidade de $\sqrt{2}$

Teorema

Não existe nenhum número racional d que elevado ao quadrado dá 2. Em outras palavras, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Demonstração

Como já foi dito acima, vamos supor, para efeitos de fazer uma redução ao absurdo, que exista um número racional, portanto uma fração, que elevada ao quadrado dá 2. Vamos chamar esse número de d. Por ser uma fração, d é igual ao quociente de dois números inteiro, ou seja, existem números inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $d = p/q$. A primeira etapa da nossa argumentação vai ser tentar estabelecer alguma relação entre os números que compõem o denominador e o numerador dessa fração que dá o número d. Para isso, lembre-se que frações diferentes podem representar o mesmo número. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

No entanto, apesar disso, sempre é possível chegar até a fração onde o denominador e o numerador são os menores possíveis. Um jeito prático de ver isso é lembrar que todo número inteiro é um produto de fatores primos[1], e dada uma fração você pode cancelar os fatores primos comuns ao numerador e ao denominador. No nosso caso, isso quer dizer que existem números inteiros x e y tais que $d = x/y$ e x e y não tem fatores primos em comum. Pronto, concluímos a primeira linha do nosso argumento. Já sabemos que $d = x/y$ é uma fração cujo denominador e o numerador não têm fatores primos comuns. Observe que essa dedução é perfeitamente válida em geral e em nada depende da hipótese que estamos tentando contradizer.

[1] Um número inteiro é primo quando só é divisível por 1 e ele mesmo. Quando um número não é primo podemos dividi-lo, obtendo um divisor e um quociente estritamente menores. Se esses forem primos, obtemos a fatoração. Se não, dividimos agora o quociente e o divisor e continuamos esse processo. Como sempre reduzimos os números envolvidos em cada etapa, esse processo vai ter que terminar em algum momento.

Vamos para o segundo passo. Nele vamos usar a hipótese de contradição (d elevado ao quadrado dá 2) para analisar se x e y são números pares ou ímpares. Bom, como $d^2 = 2$ podemos escrever

$$\frac{x^2}{y^2} = 2.$$

Logo $x^2 = 2y^2$. Isso prova que x^2 é um número par. E isso por sua vez implica que x tem que ser par, porque se x fosse ímpar seu quadrado seria ímpar.[2] Se x é par então x é múltiplo de 2 logo $x = 2k$, onde k é o quociente da divisão de x por 2. Mas isso implica que

$$x^2 = 4k^2 = 2y^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 2k^2,$$

e portanto y^2 é par o que, como já vimos, implica que y é par.

[2] Com efeito, se x fosse um número ímpar então o resto da divisão de x por 2 seria 1 logo $x = 2k + 1$, onde k é o quociente da divisão. Mas então teríamos $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$, um número ímpar.

Concluímos o nosso segundo passo com a dedução de que ambos x e y são números pares, portanto ambos são divisíveis por 2. Mas, no passo 1 havíamos deduzido que x e y não tinham fatores em comum, logo não podem ser ambos divisíveis por 2. Ou seja, encontramos uma contradição. Portanto, a nossa hipótese inicial é falsa, e isso conclui a demonstração.