

Complementos de Matemática Aplicada - Administração e Contabilidade

Aula 11

Bruno Santiago

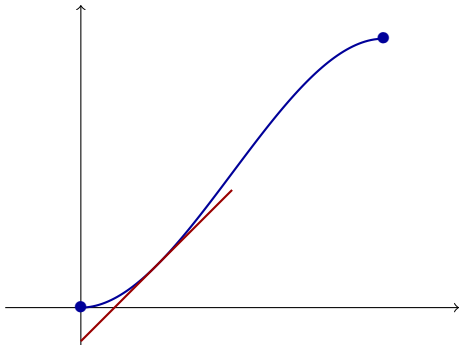
3 de agosto de 2020

Derivadas e plotagem de gráficos

- ▶ O valor numérico da derivada fornece uma informação geométrica a respeito do gráfico de uma função;

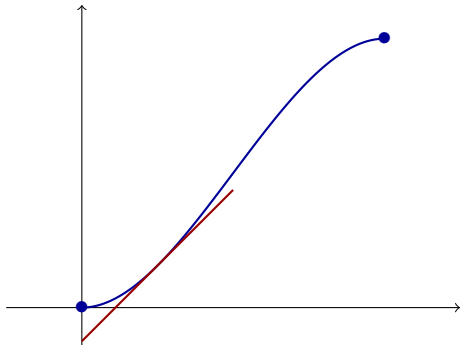
Derivadas e plotagem de gráficos

- O valor numérico da derivada fornece uma informação geométrica a respeito do gráfico de uma função;



Derivadas e plotagem de gráficos

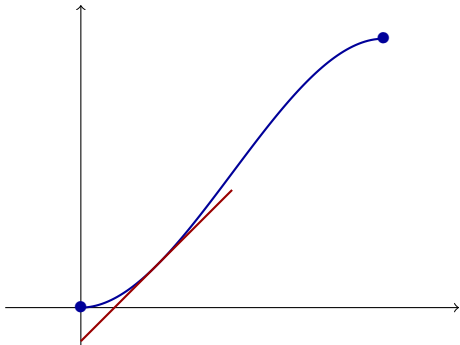
- ▶ O valor numérico da derivada fornece uma informação geométrica a respeito do gráfico de uma função;



- ▶ Em muitas situações a derivada reduz a complexidade da expressão da função;

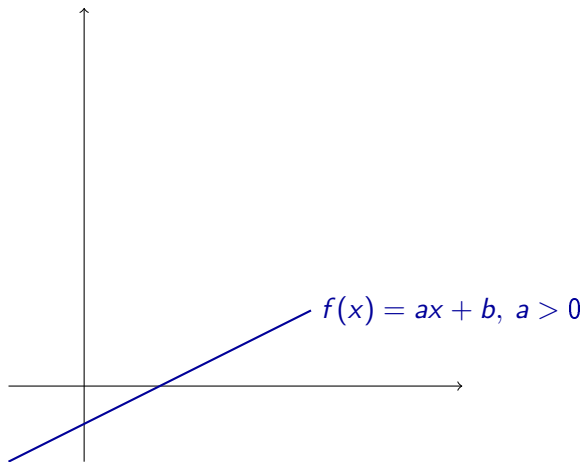
Derivadas e plotagem de gráficos

- ▶ O valor numérico da derivada fornece uma informação geométrica a respeito do gráfico de uma função;

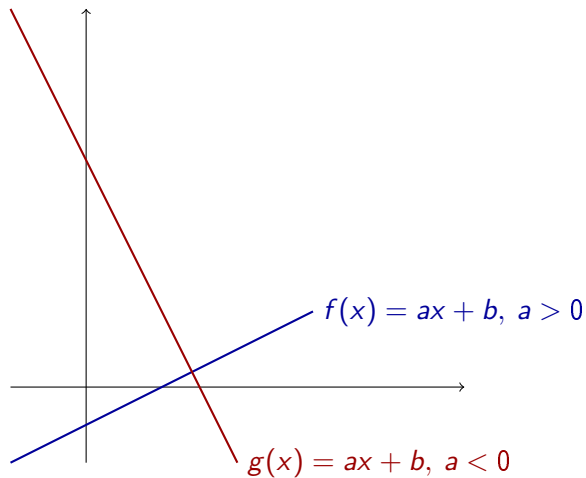


- ▶ Em muitas situações a derivada reduz a complexidade da expressão da função;
- ▶ **Entender a derivada \implies entender a função!**

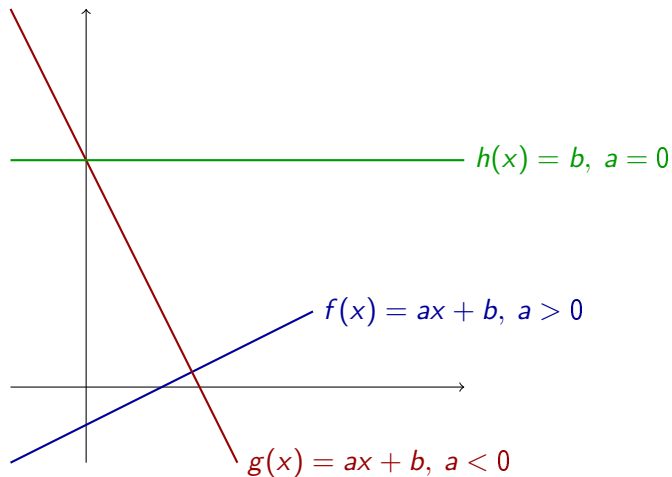
Revisando inclinação de retas



Revisando inclinação de retas



Revisando inclinação de retas



Derivada positiva \implies crescimento

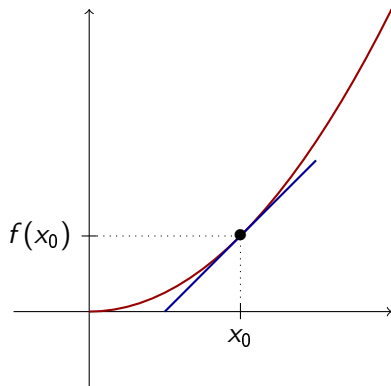
Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) > 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é crescente em J .

Derivada positiva \implies crescimento

Teorema

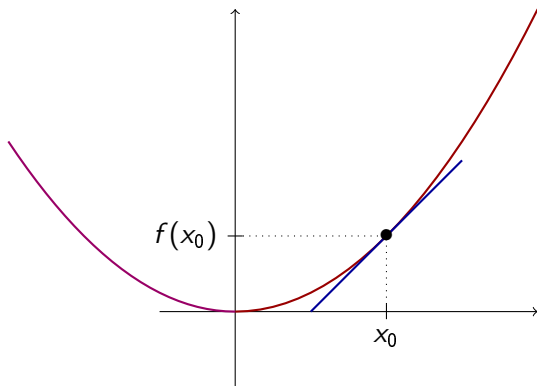
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) > 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é crescente em J .



Derivada positiva \implies crescimento

Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) > 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é crescente em J .



Derivada negativa \implies decrescimento

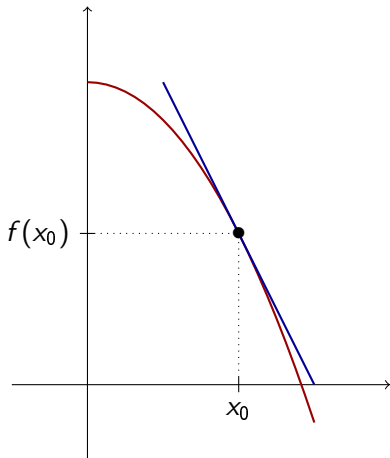
Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) < 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é **decrescente** em J .

Derivada negativa \implies decrescimento

Teorema

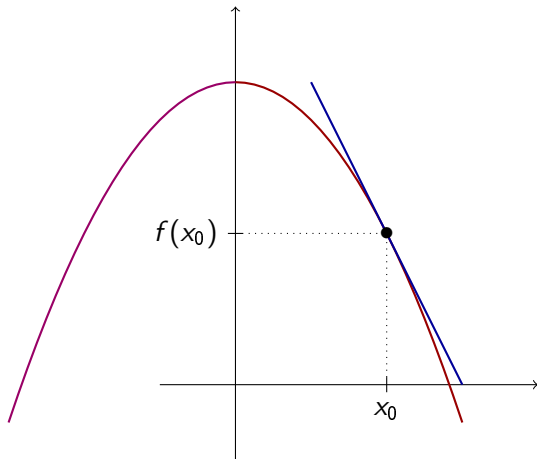
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) < 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é **decrescente** em J .



Derivada negativa \implies decrescimento

Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f'(x_0) < 0$. Então, existe um intervalo J contendo x_0 tal que f é **decrescente** em J .



Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0, \infty)} \text{ é crescente}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0, \infty)} \text{ é crescente}$$

$$\blacktriangleright f'(x) < 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty, 0)} \text{ é decrescente}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

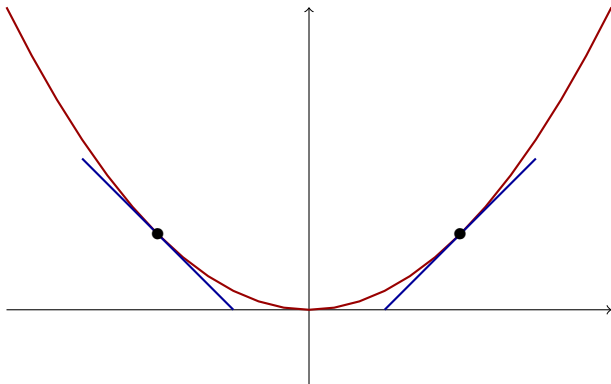
Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0,\infty)} \text{ é crescente}$$

$$\blacktriangleright f'(x) < 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty,0)} \text{ é decrescente}$$



Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

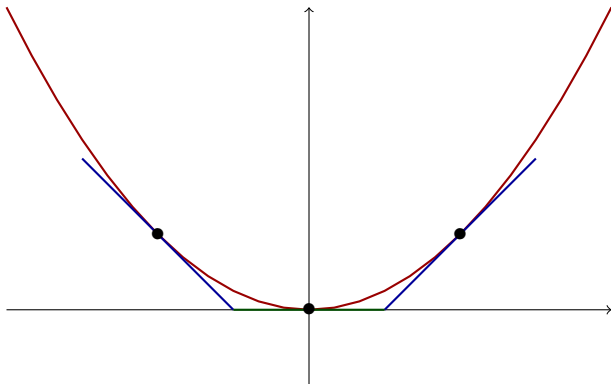
Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \implies f'(x) = \frac{x}{2}$$

▶ $f'(x) = 0 \iff x = 0$

▶ $f'(x) > 0 \iff x > 0 \therefore f|_{(0,\infty)}$ é crescente

▶ $f'(x) < 0 \iff x < 0 \therefore f|_{(-\infty,0)}$ é decrescente



Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty, 0)} \text{ é crescente}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty, 0)} \text{ é crescente}$$

$$\blacktriangleright f'(x) < 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0, +\infty)} \text{ é decrescente}$$

Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

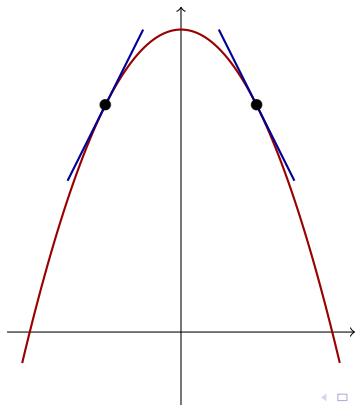
Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty, 0)} \text{ é crescente}$$

$$\blacktriangleright f'(x) < 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0, +\infty)} \text{ é decrescente}$$



Estudo do gráfico de f a partir de sua derivada

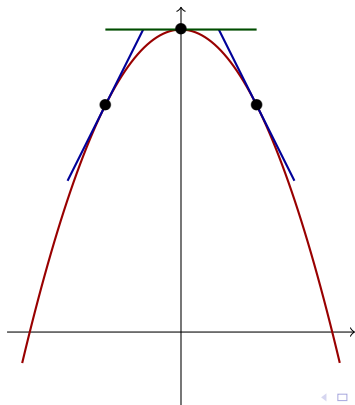
Exemplo

$$f(x) = -x^2 + 4 \implies f'(x) = -2x$$

$$\blacktriangleright f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\blacktriangleright f'(x) > 0 \iff x < 0 \quad \therefore f|_{(-\infty, 0)} \text{ é crescente}$$

$$\blacktriangleright f'(x) < 0 \iff x > 0 \quad \therefore f|_{(0, +\infty)} \text{ é decrescente}$$



Derivada nula

- ▶ Quando a derivada é nula é preciso analisar mais detalhes para determinar o comportamento local

Derivada nula

- ▶ Quando a derivada é nula é preciso analisar mais detalhes para determinar o comportamento local

Exemplo

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{3} + 1 \implies f'(x) = (x-2)^2$$

Derivada nula

- ▶ Quando a derivada é nula é preciso analisar mais detalhes para determinar o comportamento local

Exemplo

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{3} + 1 \implies f'(x) = (x-2)^2$$

- ▶ $f'(x) = 0 \iff x = 2$

Derivada nula

- ▶ Quando a derivada é nula é preciso analisar mais detalhes para determinar o comportamento local

Exemplo

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{3} + 1 \implies f'(x) = (x-2)^2$$

- ▶ $f'(x) = 0 \iff x = 2$

- ▶ $f'(x) > 0 \iff x \neq 2 \therefore f|_{(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)}$ é crescente;

Derivada nula

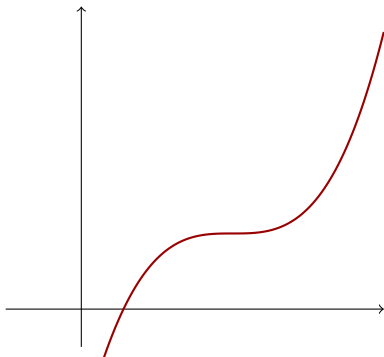
- ▶ Quando a derivada é nula é preciso analisar mais detalhes para determinar o comportamento local

Exemplo

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{3} + 1 \implies f'(x) = (x-2)^2$$

- ▶ $f'(x) = 0 \iff x = 2$

- ▶ $f'(x) > 0 \iff x \neq 2 \therefore f|_{(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)}$ é crescente;



Derivada segunda

- ▶ Analisar a derivada da derivada ajudar a determinar o comportamento qualitativo da derivada e portanto da função

Derivada segunda

- ▶ Analisar a derivada da derivada ajudar a determinar o comportamento qualitativo da derivada e portanto da função
- ▶ No exemplo anterior $f''(x) = 2(x - 2)$, e portanto $f''(x) > 0$ se $x > 2$ e $f''(x) < 0$ se $x < 2$

Derivada segunda

- ▶ Analisar a derivada da derivada ajudar a determinar o comportamento qualitativo da derivada e portanto da função
- ▶ No exemplo anterior $f''(x) = 2(x - 2)$, e portanto $f''(x) > 0$ se $x > 2$ e $f''(x) < 0$ se $x < 2$
- ▶ Logo f' (a derivada de f) é crescente no intervalo $(2, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 2)$.

Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x_0) < 0$ então x_0 é um ponto de máximo local

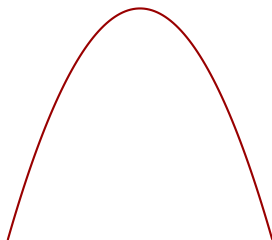
Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x_0) < 0$ então x_0 é um ponto de máximo local



Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto de **mínimo local**

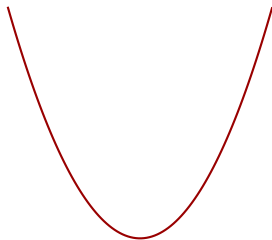
Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto de **mínimo local**



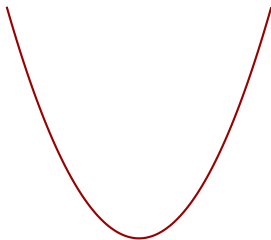
Pontos críticos

Definição

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. $x_0 \in I$ é dito um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto de **mínimo local**



Definição

Seja $x_0 \in I$ um ponto crítico. Se $f''(x_0) = 0$ então x_0 é chamado um **ponto de inflexão**.

Assíntotas

Assíntota horizontal

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ então dizemos que f possui uma assíntota horizontal de altura L .

Assíntota vertical

Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ dizemos que f possui uma assíntota vertical em $x = x_0$.