⋆ Antiderivadas

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Uma anti-derivada de f é qualquer função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$g'(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: (1) Se $f(x) = 2x$ então $g(x) = x^2$ é uma anti-derivada de f, pois

$$g'(x) = 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) Se $f(x) = e^x$ então $g(x) = e^x$ é uma anti-derivada de f, pois

$$g'(x) = e^x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(3) Se $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ então $g(x) = \log(x)$ é uma anti-derivada de f, pois

$$g'(x) = \frac{1}{x} = f(x), \forall x \in (0,+\infty)$$ //

Se $g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma anti-derivada de $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = g(x) + c, \forall x \in D$$

também é uma anti-derivada de f, pois

$$\varphi'(x) = g'(x) = f(x), \forall x \in D.$$

Obs.: De fato todas as anti-derivadas de f são dessa forma: se ψ e φ são duas anti-derivadas quaisquer de f então $\varphi - \psi$ é uma função constante, pois sua derivada é nula:

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in D.$$

As técnicas de derivação podem ser "dualizadas" e dão origem, assim, às chamadas técnicas de integração. integração por partes, por frações parciais, por mudança de variável ...

O cálculo de antiderivadas tem uma aplicação muito importante na solução das chamadas equações diferenciais, equações em que a incógnita é uma função e em que aparece a derivada dessa função. Em outras palavras, equações diferenciais são problemas matemáticos do seguinte tipo:
"Encontre uma função $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja derivada satisfaça à equação

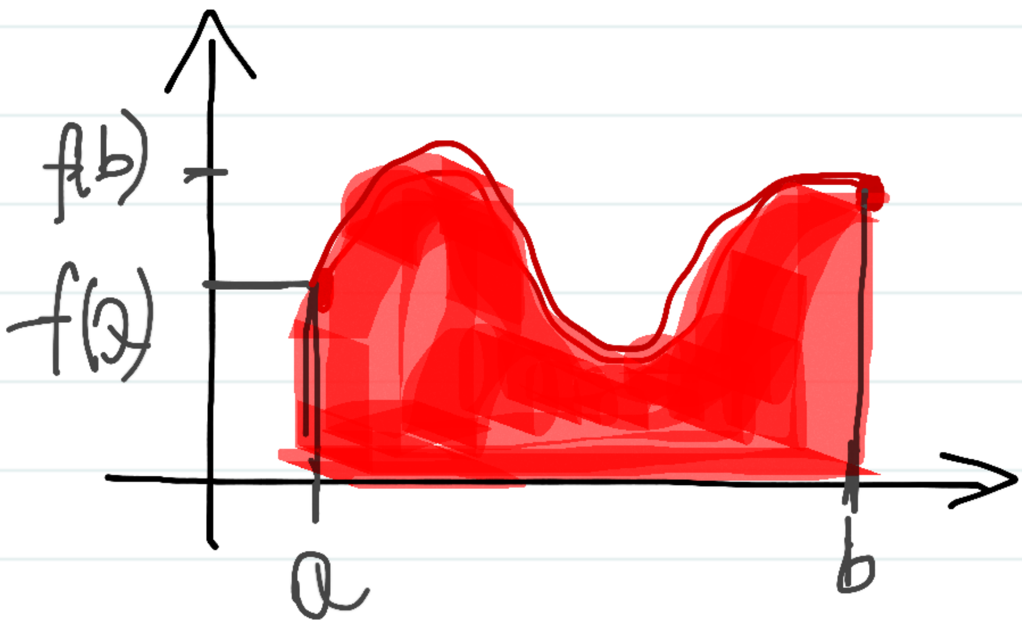
$$f'(x) = f(x)^2 - f(x),$$

e seja tal que $f(0) = 1$."

As equações diferenciais são fundamentais em biologia, física, finanças (só p/ citar algumas).

☆ O Teorema Fundamental do Cálculo:

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua.



Então, a área embaixo do gráfico de f é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b)-\varphi(a),$$

onde $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ é qualquer antiderivada de f.