Álgebra Linear

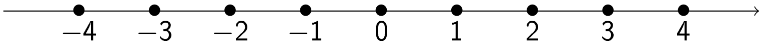
Aula 02

Bruno Santiago

7 de setembro de 2020

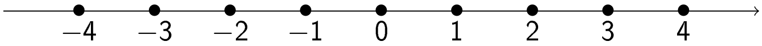
Coordenadas na reta: o conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto dos números $\mathbb{R}$eais



Coordenadas na reta: o conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto dos números $\mathbb{R}$eais

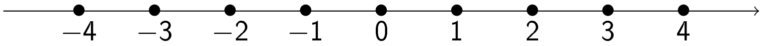


Operações com números $\mathbb{R}$eais

- **Soma:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$;

Coordenadas na reta: o conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto dos números $\mathbb{R}$eais

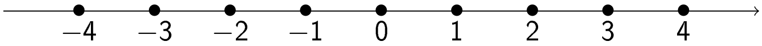


Operações com números $\mathbb{R}$eais

- **Soma:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$;
- Exemplos: $2 + 3 = 5$, $4 + (-6) = -1$, $3 + \pi \sim 6.141$, etc...

Coordenadas na reta: o conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto dos números $\mathbb{R}$eais

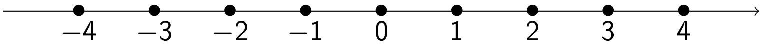


Operações com números $\mathbb{R}$eais

- **Soma:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$;
- Exemplos: $2 + 3 = 5$, $4 + (-6) = -1$, $3 + \pi \sim 6.141$, etc...
- **Multiplicação:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x.y \in \mathbb{R}$

Coordenadas na reta: o conjunto $\mathbb{R}$

O conjunto dos números $\mathbb{R}$eais



Operações com números $\mathbb{R}$eais

- **Soma:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$;
- Exemplos: $2 + 3 = 5$, $4 + (-6) = -1$, $3 + \pi \sim 6.141$, etc...
- **Multiplicação:** $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x.y \in \mathbb{R}$
- Exemplos: $2.3 = 6$, $4.(-6) = -24$, $3.\pi \sim 9.423$, etc...
- **Propriedades:** comutatividade, associatividade, distributividade, elemento neutro.

Coordenadas no plano. O conjunto $\mathbb{R}^2$:

Definição

O conjunto $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de *todas os pares ordenados de números reais*, i.e.

$$\mathbb{R}^2 \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

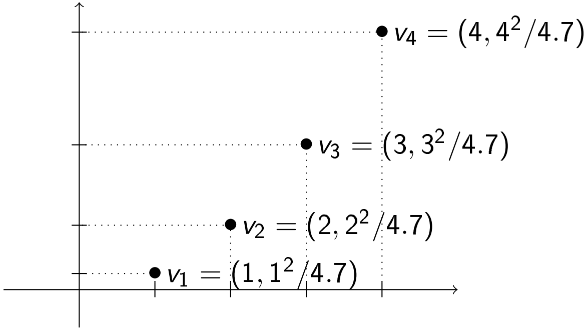
Coordenadas no plano. O conjunto $\mathbb{R}^2$:

Definição

O conjunto $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de *todas os pares ordenados de números reais*, i.e.

$$\mathbb{R}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Representação Cartesiana



Vetores no plano

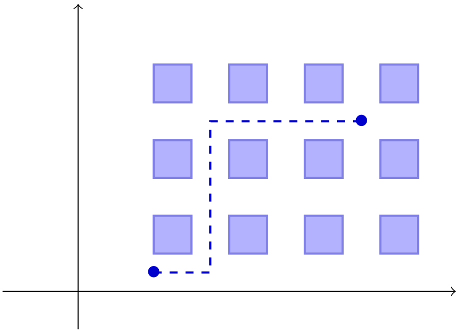
- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são chamados de **vetores**;

Vetores no plano

- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são chamados de **vetores**;
- Aplicação: O conjunto $\mathbb{R}^2$ pode ser usado para modelar posições e deslocamentos na superfície da terra, como em um bairro ou uma cidade por exemplo

Vetores no plano

- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são chamados de **vetores**;
- Aplicação: O conjunto $\mathbb{R}^2$ pode ser usado para modelar posições e deslocamentos na superfície da terra, como em um bairro ou uma cidade por exemplo



Soma de vetores no plano

Definição: soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b)$.

Soma de vetores no plano

Definição: soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, -2)$ e $u = (9, 79)$ então $v + u = (10, 77)$

Soma de vetores no plano

Definição: soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, -2)$ e $u = (9, 79)$ então $v + u = (10, 77)$
2. Se $v = (\pi, -\sqrt{2})$ e $u = (e, 7\sqrt{3})$ então $v + u = (e + \pi, 7\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Soma de vetores no plano

Definição: soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \overset{\text{def.}}{=} (x + a, y + b)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, -2)$ e $u = (9, 79)$ então $v + u = (10, 77)$
2. Se $v = (\pi, -\sqrt{2})$ e $u = (e, 7\sqrt{3})$ então $v + u = (e + \pi, 7\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
3. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ então $e_1 + e_2 = (1, 1)$

Soma de vetores no plano

Definição: soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, -2)$ e $u = (9, 79)$ então $v + u = (10, 77)$
2. Se $v = (\pi, -\sqrt{2})$ e $u = (e, 7\sqrt{3})$ então $v + u = (e + \pi, 7\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
3. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ então $e_1 + e_2 = (1, 1)$

Vetores canônicos

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são chamados os *vetores canônicos* do plano $\mathbb{R}^2$.

Soma de vetores no plano

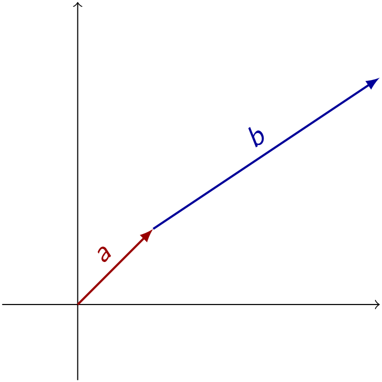
Aplicação: deslocamentos

Se $a, b \in \mathbb{R}^2$ representam deslocamentos, então o vetor soma $a + b$ representa o deslocamento líquido obtido-se primeiro deslocando-se segundo o vetor a e em seguida deslocando-se de acordo com o vetor b

Soma de vetores no plano

Aplicação: deslocamentos

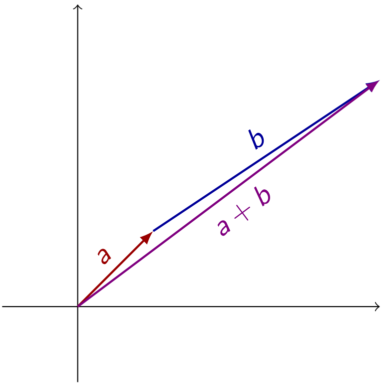
Se $a, b \in \mathbb{R}^2$ representam deslocamentos, então o vetor soma $a + b$ representa o deslocamento líquido obtido-se primeiro deslocando-se segundo o vetor a e em seguida deslocando-se de acordo com o vetor b



Soma de vetores no plano

Aplicação: deslocamentos

Se $a, b \in \mathbb{R}^2$ representam deslocamentos, então o vetor soma $a + b$ representa o deslocamento líquido obtido-se primeiro deslocando-se segundo o vetor a e em seguida deslocando-se de acordo com o vetor b

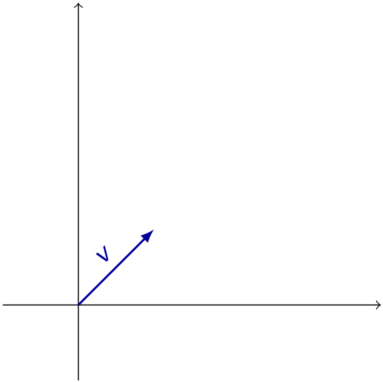


Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:

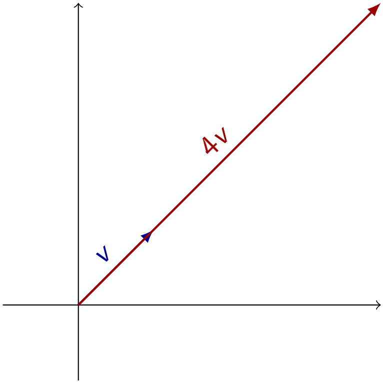
Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:



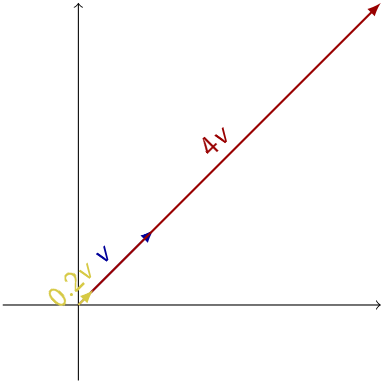
Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:



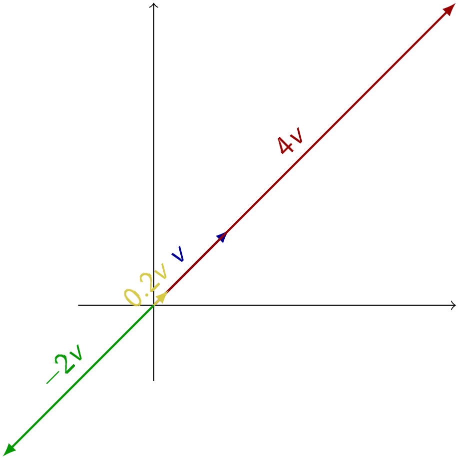
Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:



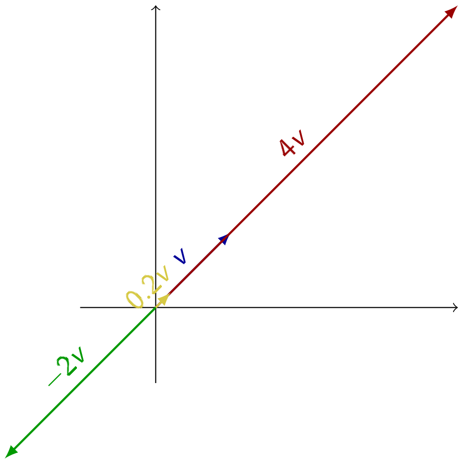
Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:



Multiplicação de vetor por escalar

- Operação de esticar, contrair ou refletir um vetor:



Multiplicação de vetor por escalar

Definição: multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$

Sejam $v = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \overset{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y)$.

Multiplicação de vetor por escalar

Definição: multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$

Sejam $v = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \overset{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, 1)$ e $\lambda = 4$ então $\lambda v = (4, 4)$

Multiplicação de vetor por escalar

Definição: multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$

Sejam $v = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \overset{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, 1)$ e $\lambda = 4$ então $\lambda v = (4, 4)$
2. Se $v = (1, \sqrt{2})$ e $\lambda = \sqrt{2}$ então $\lambda v = (\sqrt{2}, 2)$.

Multiplicação de vetor por escalar

Definição: multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^2$

Sejam $v = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \stackrel{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y)$.

Exemplos

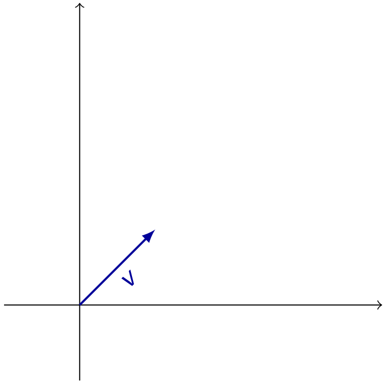
1. Se $v = (1, 1)$ e $\lambda = 4$ então $\lambda v = (4, 4)$
2. Se $v = (1, \sqrt{2})$ e $\lambda = \sqrt{2}$ então $\lambda v = (\sqrt{2}, 2)$.
3. Se $v = (7.37, \pi)$ e $\lambda = 0.1$ então $\lambda v = (0.737, \frac{\pi}{10})$.

Conexões ocultas: retas e vetores

- Uma reta no plano nada mais é do que o conjunto de todos os múltiplos de um vetor

Conexões ocultas: retas e vetores

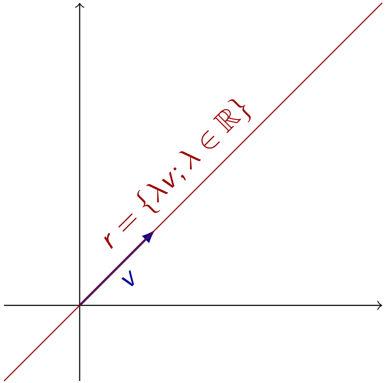
- Uma reta no plano nada mais é do que o conjunto de todos os múltiplos de um vetor



- A notação $r = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$ deve ser lida exatamente assim: *a reta r é o conjunto de todos os múltiplos λv do vetor v possíveis, para todos os valores possíveis de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Conexões ocultas: retas e vetores

- Uma reta no plano nada mais é do que o conjunto de todos os múltiplos de um vetor



- A notação $r = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$ deve ser lida exatamente assim: *a reta r é o conjunto de todos os múltiplos λv do vetor v possíveis, para todos os valores possíveis de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Coordenadas no espaço. O conjunto $\mathbb{R}^3$

Definição

O conjunto $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de *todas as triplas ordenados de números reais*, i.e.

$$\mathbb{R}^3 \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

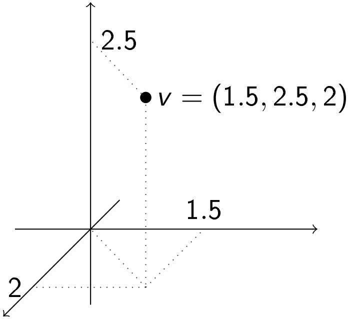
Coordenadas no espaço. O conjunto $\mathbb{R}^3$

Definição

O conjunto $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de *todas as triplas ordenados de números reais*, i.e.

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Representação cartesiana



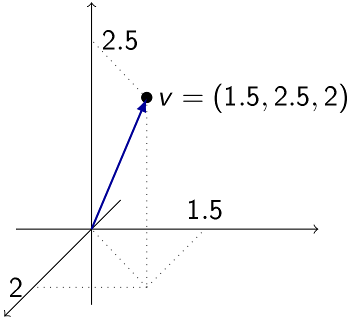
Coordenadas no espaço. O conjunto $\mathbb{R}^3$

Definição

O conjunto $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de *todas as triplas ordenados de números reais*, i.e.

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Representação cartesiana



Vetores no espaço

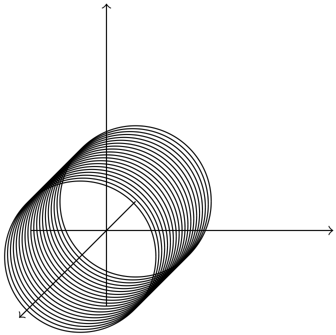
- Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são chamados de **vetores**.
- Aplicação: O conjunto $\mathbb{R}^3$ pode ser usado para modelar posições e deslocamentos no espaço.

Vetores no espaço

- Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são chamados de **vetores**.
- Aplicação: O conjunto $\mathbb{R}^3$ pode ser usado para modelar posições e deslocamentos no espaço.Ele também está presente em *softweres* de modelagem 3D

Vetores no espaço

- Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são chamados de **vetores**.
- Aplicação: O conjunto $\mathbb{R}^3$ pode ser usado para modelar posições e deslocamentos no espaço.Ele também está presente em *softweres* de modelagem 3D



Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \overset{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Exemplos

1. Se $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 2, 2)$ então $u + v = (3, 3, 3)$

Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \overset{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Exemplos

1. Se $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 2, 2)$ então $u + v = (3, 3, 3)$
2. Se $u = (-7, -8.78, 9.98)$ e $v = (7, 0.78, -0.98)$ então $u + v = (0, -8, 9)$

Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Exemplos

1. Se $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 2, 2)$ então $u + v = (3, 3, 3)$
2. Se $u = (-7, -8.78, 9.98)$ e $v = (7, 0.78, -0.98)$ então $u + v = (0, -8, 9)$

Multiplicação por escalar

Sejam $v = (x, y, z)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \stackrel{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Exemplos

1. Se $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 2, 2)$ então $u + v = (3, 3, 3)$
2. Se $u = (-7, -8.78, 9.98)$ e $v = (7, 0.78, -0.98)$ então $u + v = (0, -8, 9)$

Multiplicação por escalar

Sejam $v = (x, y, z)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \stackrel{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, 1, 1)$ e $\lambda = \pi$ então $\lambda v = (\pi, \pi, \pi)$;

Operações com vetores no espaço

Soma de vetores

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$ dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$. O vetor *soma* de u com v é o vetor $u + v \stackrel{\text{def.}}{=} (x + a, y + b, z + c)$.

Exemplos

1. Se $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 2, 2)$ então $u + v = (3, 3, 3)$
2. Se $u = (-7, -8.78, 9.98)$ e $v = (7, 0.78, -0.98)$ então $u + v = (0, -8, 9)$

Multiplicação por escalar

Sejam $v = (x, y, z)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O resultado da multiplicação do vetor v pelo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é o vetor $\lambda v \stackrel{\text{def.}}{=} (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Exemplos

1. Se $v = (1, 1, 1)$ e $\lambda = \pi$ então $\lambda v = (\pi, \pi, \pi)$;
2. Se $v = (7, 4.1, 0.9)$ e $\lambda = 10$ então $\lambda v = (70, 41, 9)$.

Aplicações e conexões

- Cada vetor no espaço pode representar uma uma direção, sentido e comprimento de deslocamento no espaço. A soma de dois vetores representa então o deslocamento líquido obtido pela combinação de dois deslocamentos, cada um representado por um vetor.

Aplicações e conexões

- Cada vetor no espaço pode representar uma uma direção, sentido e comprimento de deslocamento no espaço. A soma de dois vetores representa então o deslocamento líquido obtido pela combinação de dois deslocamentos, cada um representado por um vetor.
- Uma **reta** no espaço pode ser modelada precisamente pelo conjunto de todos os **múltiplos escalares** de um dado vetor:

Aplicações e conexões

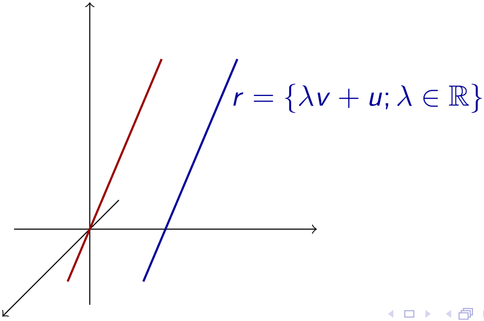
- Cada vetor no espaço pode representar uma uma direção, sentido e comprimento de deslocamento no espaço. A soma de dois vetores representa então o deslocamento líquido obtido pela combinação de dois deslocamentos, cada um representado por um vetor.
- Uma **reta** no espaço pode ser modelada precisamente pelo conjunto de todos os **múltiplos escalares** de um dado vetor:

$$r = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Aplicações e conexões

- Cada vetor no espaço pode representar uma uma direção, sentido e comprimento de deslocamento no espaço. A soma de dois vetores representa então o deslocamento líquido obtido pela combinação de dois deslocamentos, cada um representado por um vetor.
- Uma **reta** no espaço pode ser modelada precisamente pelo conjunto de todos os **múltiplos escalares** de um dado vetor:

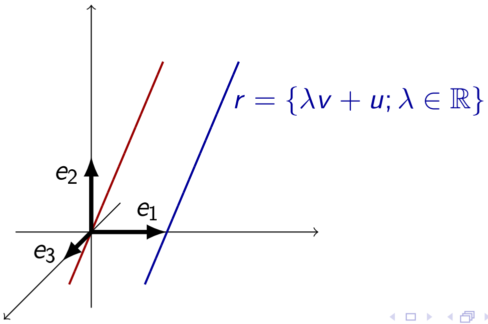
$$r = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



Aplicações e conexões

- Cada vetor no espaço pode representar uma uma direção, sentido e comprimento de deslocamento no espaço. A soma de dois vetores representa então o deslocamento líquido obtido pela combinação de dois deslocamentos, cada um representado por um vetor.
- Uma **reta** no espaço pode ser modelada precisamente pelo conjunto de todos os **múltiplos escalares** de um dado vetor:

$$r = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



Generalizações e abstração

- Observe como foi natural a passagem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ do ponto de vista **algébrico**: listas ordenadas com dois números -> listas ordenadas com três números;

Generalizações e abstração

- Observe como foi natural a passagem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ do ponto de vista **algébrico**: listas ordenadas com dois números -> listas ordenadas com três números;
- A geometria plana e a geometria do espaço jogam um papel secundário em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$: elas podem ser usadas, se for conveniente, para provar teoremas, para fazer cálculos, para fazer aplicações (como em *softweres* de modelagem 3D). Mas a geometria como a gente conhece não é intrínseca a nenhum desses conjuntos.
- Do ponto de vista algébrico a gente pode, portanto, falar em listas ordenadas com tantos números quanto a gente quiser. As operações de soma e multiplicação por escalar tem um sentido óbvio;

Generalizações e abstração

- Observe como foi natural a passagem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ do ponto de vista **algébrico**: listas ordenadas com dois números -> listas ordenadas com três números;
- A geometria plana e a geometria do espaço jogam um papel secundário em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$: elas podem ser usadas, se for conveniente, para provar teoremas, para fazer cálculos, para fazer aplicações (como em *softweres* de modelagem 3D). Mas a geometria como a gente conhece não é intrínseca a nenhum desses conjuntos.
- Do ponto de vista algébrico a gente pode, portanto, falar em listas ordenadas com tantos números quanto a gente quiser. As operações de soma e multiplicação por escalar tem um sentido óbvio;
- Mas qual a vantagem de estudar o $\mathbb{R}^{357}$??????

Generalizações e abstração

- Observe como foi natural a passagem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ do ponto de vista **algébrico**: listas ordenadas com dois números -> listas ordenadas com três números;
- A geometria plana e a geometria do espaço jogam um papel secundário em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$: elas podem ser usadas, se for conveniente, para provar teoremas, para fazer cálculos, para fazer aplicações (como em *softweres* de modelagem 3D). Mas a geometria como a gente conhece não é intrínseca a nenhum desses conjuntos.
- Do ponto de vista algébrico a gente pode, portanto, falar em listas ordenadas com tantos números quanto a gente quiser. As operações de soma e multiplicação por escalar tem um sentido óbvio;
- Mas qual a vantagem de estudar o $\mathbb{R}^{357}$??????É difícil listar uma só, mas teremos um semestre inteiro para isso!

Espaços euclideanos

Definição

O *espaço euclideano* $\mathbb{R}^d$ é conjuntos das d-uplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, x_2, ..., x_d);\ x_1, x_2, ..., x_d \in \mathbb{R}\}.$$

Cada elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ é chamado um *vetor*, e os números $x_1, ..., x_d$ são chamados *coordenadas* do vetor x. O ponto $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ é chamado a *origem*, ou o *vetor nulo*.

Espaços euclideanos

Definição

O *espaço euclideano* $\mathbb{R}^d$ é conjuntos das d-uplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, x_2, ..., x_d);\ x_1, x_2, ..., x_d \in \mathbb{R}\}.$$

Cada elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ é chamado um *vetor*, e os números $x_1, ..., x_d$ são chamados *coordenadas* do vetor x. O ponto $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ é chamado a *origem*, ou o *vetor nulo*.

Soma de vetores

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$. O vetor *soma* de x e y, denotado por $x + y$, é o vetor cujas coordenadas são $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d)$. Em símbolos,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d).$$

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.
2. Sejam $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Então, $x + y = (5, 5, 5, 5) \in \mathbb{R}^4$.

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.
2. Sejam $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Então, $x + y = (5, 5, 5, 5) \in \mathbb{R}^4$.
3. Sejam $x = (1.13, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (3, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$. Então $x + y = (4.13, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$.

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.
2. Sejam $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Então, $x + y = (5, 5, 5, 5) \in \mathbb{R}^4$.
3. Sejam $x = (1.13, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (3, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$. Então $x + y = (4.13, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$.
4. Se $x = (1, 2, 1, -7) \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda = 9 \in \mathbb{R}$ então $\lambda x = (9, 18, 9, -63) \in \mathbb{R}^4$.

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.
2. Sejam $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Então, $x + y = (5, 5, 5, 5) \in \mathbb{R}^4$.
3. Sejam $x = (1.13, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (3, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$. Então $x + y = (4.13, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$.
4. Se $x = (1, 2, 1, -7) \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda = 9 \in \mathbb{R}$ então $\lambda x = (9, 18, 9, -63) \in \mathbb{R}^4$.
5. Se $x = (1, \sqrt{\pi}, \pi) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda = \sqrt{\pi}$ então $\lambda x = (\sqrt{\pi}, \pi, \pi\sqrt{\pi}) \in \mathbb{R}^3$.

Espaços euclideanos

Multiplicação por escalar

Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. O produto de λ por x é o vetor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_3)$.

Exemplos

1. Sejam $x = (0, 0, \sqrt{7}, 89, 14)$ e $y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Então, $x + y = (\pi, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{7}, 89, 14) \in \mathbb{R}^5$.
2. Sejam $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e $y = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Então, $x + y = (5, 5, 5, 5) \in \mathbb{R}^4$.
3. Sejam $x = (1.13, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (3, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$. Então $x + y = (4.13, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$.
4. Se $x = (1, 2, 1, -7) \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda = 9 \in \mathbb{R}$ então $\lambda x = (9, 18, 9, -63) \in \mathbb{R}^4$.
5. Se $x = (1, \sqrt{\pi}, \pi) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda = \sqrt{\pi}$ então $\lambda x = (\sqrt{\pi}, \pi, \pi\sqrt{\pi}) \in \mathbb{R}^3$.

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\Longrightarrow$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\implies$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;
- Muita abstração pode resultar num objeto matemático difícil de encontrar representatividade na realidade;

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\Longrightarrow$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;
- Muita abstração pode resultar num objeto matemático difícil de encontrar representatividade na realidade;
- Pouca abstração pode resultar num objeto matemático simplório demais para fornecer conclusões não-triviais;

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\Longrightarrow$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;
- Muita abstração pode resultar num objeto matemático difícil de encontrar representatividade na realidade;
- Pouca abstração pode resultar num objeto matemático simplório demais para fornecer conclusões não-triviais;
- Existe um equilíbrio tênue!

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\implies$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;
- Muita abstração pode resultar num objeto matemático difícil de encontrar representatividade na realidade;
- Pouca abstração pode resultar num objeto matemático simplório demais para fornecer conclusões não-triviais;
- Existe um equilíbrio tênue!
- No entanto, às vezes os objetos mais exóticos encontram aplicações inesperadas (Ex.: geometria algébrica sendo usada em criptografia e segurança da internet)

Abstraindo ainda mais

- Abstração $\Longrightarrow$ ganho de flexibilidade para fazer modelagem;
- Muita abstração pode resultar num objeto matemático difícil de encontrar representatividade na realidade;
- Pouca abstração pode resultar num objeto matemático simplório demais para fornecer conclusões não-triviais;
- Existe um equilíbrio tênue!
- No entanto, às vezes os objetos mais exóticos encontram aplicações inesperadas (Ex.: geometria algébrica sendo usada em criptografia e segurança da internet)
- A melhor postura é manter aberta e aprender o máximo possível.

Espaços Vetoriais

- Espaços vetoriais generalizam os espaços euclideanos;

Espaços Vetoriais

- Espaços vetoriais generalizam os espaços euclideanos;
- Eles sintetizam a estrutura algébrica fundamental à ideia de **linearidade**;

Espaços Vetoriais

- Espaços vetoriais generalizam os espaços euclideanos;
- Eles sintetizam a estrutura algébrica fundamental à ideia de **linearidade**;

Definição

Um *espaço vetorial* é um conjunto E, cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações

1. *soma de vetores* que a cada par $u, v \in E$ associa um novo elemento de E, o qual denotamos por $u + v$.
2. *multiplicação de vetores por um escalar* que a cada elemento $v \in E$ e a cada número real $\lambda \in \mathbb{R}$ associa um novo elemento de E, o qual denotamos por λv.

Estas operações devem ainda satisfazer um conjunto de vários axiomas

Axiomas de espaço vetorial

- **comutatividade:** $u + v = v + u$;
- **associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- **vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$ tal que $0 + u = u + 0 = u$, para todo $u \in E$;
- **simétrico aditivo:** para cada $u \in E$ existe um vetor $-u \in E$ que satisfaz $u + (-u) = -u + u = 0$;
- **distributividade:** se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in E$ então

  $$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

  e se, além disso, $v \in E$ então

  $$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$

- **neutro multiplicativo:** $1.u = u$, para todo $u \in E$.

Exemplos de espaços vetoriais

- Espaços euclideanos $\mathbb{R}^d$, com as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar;

Exemplos de espaços vetoriais

- Espaços euclideanos $\mathbb{R}^d$, com as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar;
- O espaço $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com as operações $(f+g)(x)\stackrel{\text{def.}}{=} f(x)+g(x)$ e $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.

Exemplos de espaços vetoriais

- Espaços euclideanos $\mathbb{R}^d$, com as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar;
- O espaço $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com as operações $(f+g)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x)+g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- O subconjunto $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ do polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ degrau $\leq d$, ou seja o conjunto de todas as funções $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo

Exemplos de espaços vetoriais

- Espaços euclideanos $\mathbb{R}^d$, com as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar;
- O espaço $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com as operações $(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x)+g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- O subconjunto $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ do polinômios $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ degrau $\leq d$, ou seja o conjunto de todas as funções $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ do tipo

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_d x^d = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell x^\ell.$$