Álgebra Linear

Aula Teórica 2

Bruno Santiago

21 de setembro de 2020

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;
- Geometria dos vetores: comprimento e ângulos!

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;
- Geometria dos vetores: comprimento e ângulos!
- Em matemática as noções de comprimento e ângulo são flexíveis; Existem maneiras **estranhas** de medir comprimento e ângulo;

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;
- Geometria dos vetores: comprimento e ângulos!
- Em matemática as noções de comprimento e ângulo são flexíveis; Existem maneiras **estranhas** de medir comprimento e ângulo;
- Isso traz flexibilidade, o que implica aplicabilidade muito maior!

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;
- Geometria dos vetores: comprimento e ângulos!
- Em matemática as noções de comprimento e ângulo são flexíveis; Existem maneiras **estranhas** de medir comprimento e ângulo;
- Isso traz flexibilidade, o que implica aplicabilidade muito maior!
- Além disso, conexões: álgebra linear + estatística=geometria do comportamento humano!

Medindo vetores

- Vamos falar sobre maneiras de medir o tamanho de um vetor;
- Geometria dos vetores: comprimento e ângulos!
- Em matemática as noções de comprimento e ângulo são flexíveis; Existem maneiras **estranhas** de medir comprimento e ângulo;
- Isso traz flexibilidade, o que implica aplicabilidade muito maior!
- Além disso, conexões: álgebra linear + estatística=geometria do comportamento humano!
- A base desse lindo edifício é o conceito de **produto interno**.

Produto interno

Definição

Seja E um espaço vetorial. Um *produto interno* em E é uma função

$$\begin{aligned} \langle,\rangle : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

que a cada par de vetores $u, v \in E$ associa o número real $\langle x, y\rangle$, de modo a satisfazer as seguintes propriedades:

- **simetria** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
- **linearidade** $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **positividade definida** $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e somente se $x = 0$, o vetor nulo de E.

Conexões

- Lembre das conexões: produto interno é quase como medir o ângulo entre os vetores;

Conexões

- Lembre das conexões: produto interno é quase como medir o ângulo entre os vetores;
- **Mas não é a mesma coisa!**

Conexões

- Lembre das conexões: produto interno é quase como medir o ângulo entre os vetores;
- **Mas não é a mesma coisa!**
- **Spoiler Alert!!!**: veremos na aula de hoje como medir comprimento e ângulos a partir de um produto interno;

Conexões

- Lembre das conexões: produto interno é quase como medir o ângulo entre os vetores;
- **Mas não é a mesma coisa!**
- **Spoiler Alert!!!**: veremos na aula de hoje como medir comprimento e ângulos a partir de um produto interno;
- Mas antes, exemplos!

Produto interno euclideano

- Esse é **O** produto interno desse curso!!!

Produto interno euclideano

- Esse é **O** produto interno desse curso!!!

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. O *produto interno euclideano* de x e y é o número

$$\langle x, y\rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d.$$

Exemplos

1. $x = (1, 2)$, $y = (-2, 1)$ em $\mathbb{R}^2 \implies$
   $\langle x, y\rangle = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$;

Produto interno euclideano

- Esse é **O** produto interno desse curso!!!

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. O *produto interno euclideano* de x e y é o número

$$\langle x, y \rangle \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d.$$

Exemplos

1. $x = (1, 2)$, $y = (-2, 1)$ em $\mathbb{R}^2 \implies$
   $\langle x, y \rangle = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$;
2. $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \in \mathbb{R}^7$ e $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^7 \implies$
   $\langle x, y \rangle = 1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = 28$.

Aplicações do produto interno euclideano

Economia

Se $p \in \mathbb{R}^n$ é o *vetor de preços* das commodities de uma determinada economia (ou seja p_j é o preço da commoditie j), e $q \in \mathbb{R}^n$ é a *cesta de consumo* (ou seja q_j é quanto se compra da commoditie j) de um determinado consumidor então o produto interno $\langle p, q \rangle$ é o consumo de renda dessa cesta.

Aplicações do produto interno euclideano

Economia

Se $p \in \mathbb{R}^n$ é o *vetor de preços* das commodities de uma determinada economia (ou seja p_j é o preço da commoditie j), e $q \in \mathbb{R}^n$ é a *cesta de consumo* (ou seja q_j é quanto se compra da commoditie j) de um determinado consumidor então o produto interno $\langle p, q \rangle$ é o consumo de renda dessa cesta.

Probabilidade

Se $p \in \mathbb{R}^d$ é um vetor de probabilidades, ou seja $0 \leq p_j \leq 1$ para todo $j = 1, ..., d$ e $\sum_{j=1}^{d} p_j = 1$, e se $x \in \mathbb{R}^d$ é um vetor qualquer (uma variável aleatória na linguagem dos probabilistas) então o produto interno $\langle p, x \rangle$ é o valor esperado de x.

Aplicações do produto interno euclideano

Análise automática de sentimentos num texto

$n =$ qtd de palavras de um dicionário;

Aplicações do produto interno euclideano

Análise automática de sentimentos num texto

n= qtd de palavras de um dicionário;$x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_j =$ quantidade de aparições da j-ésima palavra no documento.

Aplicações do produto interno euclideano

Análise automática de sentimentos num texto

n= qtd de palavras de um dicionário;$x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_j =$ quantidade de aparições da j-ésima palavra no documento.Considere o vetor $w \in \mathbb{R}^n$ cujas entradas são dadas por

$$w_j = \begin{cases} +1, \text{ se a j-ésima palavra é positiva,} \\ 0, \text{ se a j-ésima palavra é neutra,} \\ -1, \text{ se a j-ésima palavra é negativa} \end{cases} .$$

Aplicações do produto interno euclideano

Análise automática de sentimentos num texto

n= qtd de palavras de um dicionário;$x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_j =$ quantidade de aparições da j-ésima palavra no documento.Considere o vetor $w \in \mathbb{R}^n$ cujas entradas são dadas por

$$w_j = \begin{cases} +1, \text{ se a j-ésima palavra é positiva,} \\ 0, \text{ se a j-ésima palavra é neutra,} \\ -1, \text{ se a j-ésima palavra é negativa} \end{cases}.$$

Então, o produto interno $\langle x, w \rangle$ fornece uma medida do sentimento do documento: quanto mais positivo o produto interno vemos que o documento possui muito mais palavras positivas do que negativas; quanto mais negativo for, vemos que o documento possui muito mais palavras negativas do que positivas.

Outros exemplos

Produto euclideano com pesos

Dados números reais não-negativos $p_1, ..., p_d$, considere a função $P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j y_j, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Outros exemplos

Produto euclideano com pesos

Dados números reais não-negativos $p_1, ..., p_d$, considere a função $P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j y_j, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Observe que o produto interno euclideano é um caso particular dessa função quando $p_1 = p_2 = ... = p_d = 1$

Outros exemplos

Produto euclideano com pesos

Dados números reais não-negativos $p_1, ..., p_d$, considere a função $P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j y_j, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Observe que o produto interno euclideano é um caso particular dessa função quando $p_1 = p_2 = ... = p_d = 1$

Integral

$$I(f, g) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Outros exemplos

Produto euclideano com pesos

Dados números reais não-negativos $p_1, ..., p_d$, considere a função $P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j y_j, \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Observe que o produto interno euclideano é um caso particular dessa função quando $p_1 = p_2 = ... = p_d = 1$

Integral

$$I(f, g) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Esse produto interno é muito importante em engenharia, por exemplo, na análise de frequência de sinais de telecomunicações.

Medindo comprimentos

Definição

Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma função

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\to [0,+\infty) \\ v \in E &\mapsto \|v\| \in [0,+\infty), \end{aligned}$$

satisfazendo às três condições a seguir

- **Positividade definida** $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- **Homogeneidade** $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
- **Desigualdade triangular** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall\, u, v \in E.$

Medindo comprimentos

Definição

Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma função

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\to [0, +\infty) \\ v \in E &\mapsto \|v\| \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

satisfazendo às três condições a seguir

- **Positividade definida** $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- **Homogeneidade** $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- **Desigualdade triangular** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in E$.

Comentários

Essa definição sintetiza os requisitos mínimos que uma maneira abstrata de medir comprimentos deve satisfazer.

Exemplos de norma

Norma do máximo em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_\infty \overset{\text{def.}}{=} \max\{|x_j|; j = 1, ..., d\},$$

Exemplos de norma

Norma do máximo em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{|x_j|; j = 1, \ldots, d\},$$

Norma da soma em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|.$$

Exemplos de norma

Norma do máximo em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_\infty \overset{\text{def.}}{=} \max\{|x_j|; j = 1, \ldots, d\},$$

Norma da soma em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|.$$

Distância do taxista!

Exemplos de norma

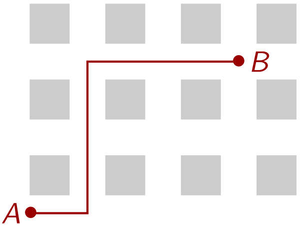
Norma do máximo em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{|x_j|; j = 1, \ldots, d\},$$

Norma da soma em $\mathbb{R}^d$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|.$$

Distância do taxista!



Norma euclideana

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A norma euclideana de x é o número:

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 .$$

Norma euclideana

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A norma euclideana de x é o número:

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 .$$

A norma euclideana é um exemplo de uma norma proveniente de um produto interno:

Observação

Observe que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle , \rangle$ é o produto interno euclideano;

Norma euclideana

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A norma euclideana de x é o número:

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{d} x_j^2.$$

A norma euclideana é um exemplo de uma norma proveniente de um produto interno:

Observação

Observe que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle , \rangle$ é o produto interno euclideano;Nesse curso, a maior parte da teoria (mas não toda!) será desenvolvida em cima do produto interno euclideano;

Norma euclideana

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A norma euclideana de x é o número:

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{d} x_j^2.$$

A norma euclideana é um exemplo de uma norma proveniente de um produto interno:

Observação

Observe que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle , \rangle$ é o produto interno euclideano;Nesse curso, a maior parte da teoria (mas não toda!) será desenvolvida em cima do produto interno euclideano;

Dica

Evite tentar decorar!!!! A memorização ocorre de forma muito mais eficaz por associações e conexões; procure pontes entre os conceitos!

Normas provenientes de um produto interno

Considere E um espaço vetorial qualquer, munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Para fixar ideias, pense num espaço euclideano $\mathbb{R}^d$ com o produto interno euclideano. A função

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \;\; \forall \; x \in E$$

é uma norma, que dizemos ser *proveniente do produto interno dado*

A desigualdade de Cauchy-Schwartz

Proposição

Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$ e seja $\|.\|$ a norma oriunda desse produto interno, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo vetor $x \in E$. Então, quaisqer que sejam $x, y \in E$ vale que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, x e y são *colineares*, ou seja, se existe um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda y$.

Exemplo

Se $x = (1, 3, 7)$ e $y = (2, 0.6, -1)$ em $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno euclideano, então $\langle x, y \rangle = 2 + 3 \times 0.6 - 7 = -3.2$, $\|x\| = \sqrt{59}$ e $\|y\| = \sqrt{5.36}$. Então $\|x\| \|y\| > |\langle x, y \rangle|$.

Ângulo entre vetores

Definição

Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$ e sejam $x, y \in E$. O ângulo entre x e y é o número real

$$\arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Ângulo entre vetores

Definição

Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle .,. \rangle$ e sejam $x, y \in E$. O ângulo entre x e y é o número real

$$\arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Ou seja, se $\theta = \angle(x, y)$ então

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Exemplo

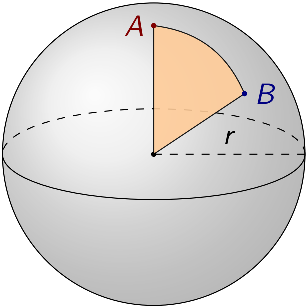
Se $x = (1,3,7)$ e $y = (2, 0.6, -1)$ em $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno euclideano, então $\langle x, y\rangle = 2 + 3 \times 0.6 - 7 = -3.2$, $\|x\| = \sqrt{59}$ e $\|y\| = \sqrt{5.36}$. Então

$$\angle(x,y) = \arccos \frac{-3.2}{\sqrt{5.36 \times 59}} = 100,36^{\text{o}}$$

Aplicação: calculando a distância entre dois países

Modelo Matemático

A superfície da terra é interpretada como uma esfera perfeita, e os países são pontos nessa esfera. A distância entre os pontos é o comprimento do arco de grande círculo ligando esses pontos

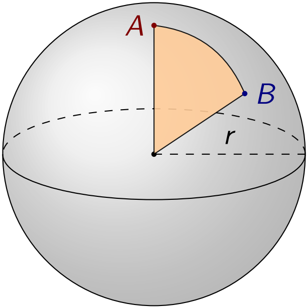


- Colocando coordenadas com o centro da esfera na origem, A B passam a ser vetores em $\mathbb{R}^3$;

Aplicação: calculando a distância entre dois países

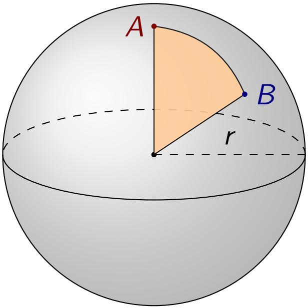
Modelo Matemático

A superfície da terra é interpretada como uma esfera perfeita, e os países são pontos nessa esfera. A distância entre os pontos é o comprimento do arco de grande círculo ligando esses pontos

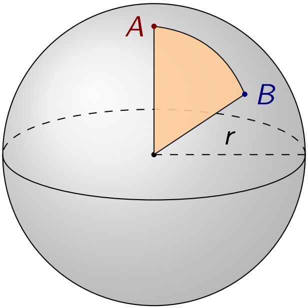


- Colocando coordenadas com o centro da esfera na origem, A B passam a ser vetores em $\mathbb{R}^3$;

Aplicação: calculando a distância entre dois países

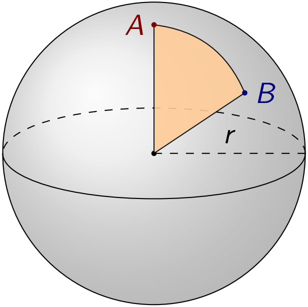


Aplicação: calculando a distância entre dois países



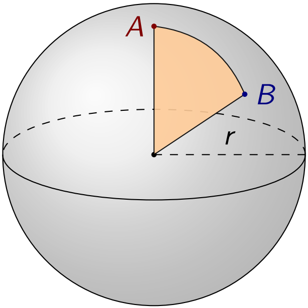
- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$

Aplicação: calculando a distância entre dois países



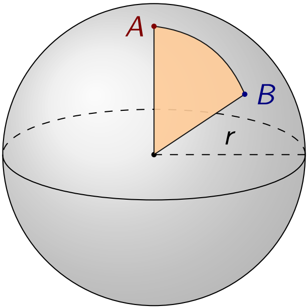
- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0,1,2)$ e $B = (1,1,\sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:

Aplicação: calculando a distância entre dois países



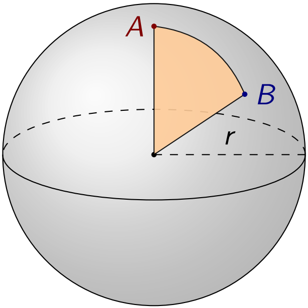
- $d(A, B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 1, \sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$

Aplicação: calculando a distância entre dois países



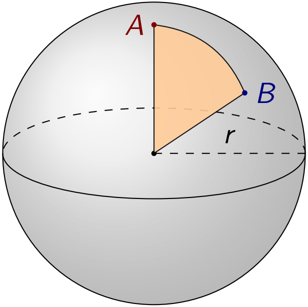
- $d(A, B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 1, \sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$
  - $\|A\|.\|B\| = 5$

Aplicação: calculando a distância entre dois países



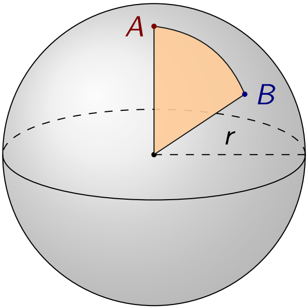
- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0,1,2)$ e $B = (1,1,\sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$
  - $\|A\|.\|B\| = 5$
  - $\angle(A,B) = \arccos(\frac{1+2\sqrt{3}}{5})$

Aplicação: calculando a distância entre dois países



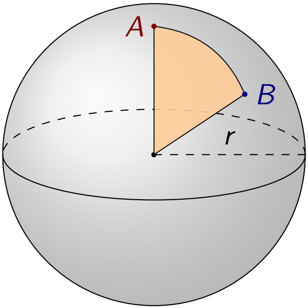
- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0,1,2)$ e $B = (1,1,\sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$
  - $\|A\|.\|B\| = 5$
  - $\angle(A,B) = \arccos(\frac{1+2\sqrt{3}}{5})$=26.77

Aplicação: calculando a distância entre dois países



- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0,1,2)$ e $B = (1,1,\sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$
  - $\|A\|.\|B\| = 5$
  - $\angle(A,B) = \arccos(\frac{1+2\sqrt{3}}{5})$=26.77
  - $d(A,B) = \sqrt{5} \times \frac{26.77}{360}$

Aplicação: calculando a distância entre dois países



- $d(A,B) = r\frac{\angle(A,B)}{360}$
- Exemplo: $A = (0,1,2)$ e $B = (1,1,\sqrt{3})$ então $r = \|A\| = \|B\| = \sqrt{5}$. Então:
  - $\langle A, B\rangle = 1 + 2\sqrt{3}$
  - $\|A\|.\|B\| = 5$
  - $\angle(A,B) = \arccos(\frac{1+2\sqrt{3}}{5})$=26.77
  - $d(A,B) = \sqrt{5} \times \frac{26.77}{360}$=0.16