Álgebra Linear

Aula Teórica 3

Bruno Santiago

28 de setembro de 2020

Aplicações da norma euclideana

- Nesta aula: aplicações dos conceitos vistos até aqui em estatística, finanças e ciência de dados (vídeo separado)

Aplicações da norma euclideana

- Nesta aula: aplicações dos conceitos vistos até aqui em estatística, finanças e ciência de dados (vídeo separado)
- Por trás de tudo isso estão os conceito da semana passada

Aplicações da norma euclideana

- Nesta aula: aplicações dos conceitos vistos até aqui em estatística, finanças e ciência de dados (vídeo separado)
- Por trás de tudo isso estão os conceito da semana passada
- Produto interno, norma e ângulo.

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Exemplo

$x = (1, 3.5, -7.8, 9.57)$ e $y = (1, 2, 3, 45)$ em $\mathbb{R}^4$ então
$\langle x, y \rangle = 1 + (3.5 \times 2) - (7.8 \times 3) + (9.57 \times 45) = 415.25$

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Exemplo

$x = (1, 3.5, -7.8, 9.57)$ e $y = (1, 2, 3, 45)$ em $\mathbb{R}^4$ então
$\langle x, y \rangle = 1 + (3.5 \times 2) - (7.8 \times 3) + (9.57 \times 45) = 415.25$

- Serve para fazer geometria; calculamos comprimento com ele: $\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$;

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Exemplo

$x = (1, 3.5, -7.8, 9.57)$ e $y = (1, 2, 3, 45)$ em $\mathbb{R}^4$ então
$\langle x, y\rangle = 1 + (3.5 \times 2) - (7.8 \times 3) + (9.57 \times 45) = 415.25$

- Serve para fazer geometria; calculamos comprimento com ele: $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$;
- calculamos ângulo $\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$;

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Exemplo

$x = (1, 3.5, -7.8, 9.57)$ e $y = (1, 2, 3, 45)$ em $\mathbb{R}^4$ então
$\langle x, y \rangle = 1 + (3.5 \times 2) - (7.8 \times 3) + (9.57 \times 45) = 415.25$

- Serve para fazer geometria; calculamos comprimento com ele: $\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$;
- calculamos ângulo $\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$;
- No exemplo: $\angle(x, y) \simeq 44.4$.
- Em particular, sempre que $\langle x, y \rangle = 0$ o ângulo entre eles é de 90^o;

Produto interno euclideano em $\mathbb{R}^d$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por
$(x, y) \mapsto \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell$

Exemplo

$x = (1, 3.5, -7.8, 9.57)$ e $y = (1, 2, 3, 45)$ em $\mathbb{R}^4$ então
$\langle x, y\rangle = 1 + (3.5 \times 2) - (7.8 \times 3) + (9.57 \times 45) = 415.25$

- Serve para fazer geometria; calculamos comprimento com ele: $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$;
- calculamos ângulo $\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$;
- No exemplo: $\angle(x, y) \simeq 44.4$.
- Em particular, sempre que $\langle x, y\rangle = 0$ o ângulo entre eles é de 90^o;
- Os vetores canônicos $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,...,$e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ têm todos norma igual a 1 e são ortogonais entre si.

Limitações do produto interno euclideano

- Aplicações em ciência de dados e em finanças “pedem” uma forma “estatística” de medir comprimento e ângulo;

Limitações do produto interno euclideano

- Aplicações em ciência de dados e em finanças “pedem” uma forma “estatística” de medir comprimento e ângulo;
- o produto interno euclideano é ruim para isso

Limitações do produto interno euclideano

- Aplicações em ciência de dados e em finanças “pedem” uma forma “estatística” de medir comprimento e ângulo;
- o produto interno euclideano é ruim para isso

Exemplo

Considere o vetor $\mathbb{I} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Então
$||\mathbb{I}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Limitações do produto interno euclideano

- Aplicações em ciência de dados e em finanças "pedem" uma forma "estatística" de medir comprimento e ângulo;
- o produto interno euclideano é ruim para isso

Exemplo

Considere o vetor $\mathbb{I} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Então $||\mathbb{I}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.Mais geralmente, se $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de uns do $\mathbb{R}^d$ então $||\mathbb{I}|| = \sqrt{1^2 + .. + 1^2} = \sqrt{d}$.

Limitações do produto interno euclideano

- Aplicações em ciência de dados e em finanças "pedem" uma forma "estatística" de medir comprimento e ângulo;
- o produto interno euclideano é ruim para isso

Exemplo

Considere o vetor $\mathbb{I} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Então $||\mathbb{I}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.Mais geralmente, se $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de uns do $\mathbb{R}^d$ então $||\mathbb{I}|| = \sqrt{1^2 + .. + 1^2} = \sqrt{d}$.**No entanto, do ponto de vista estatístico** $(1, 1, 1)$ **e** $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ **tem o mesmo comportamento!**

O produto interno rms

Definição

O *produto interno* rms em $\mathbb{R}^d$ é a função

$$\begin{array}{rcl} R : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \mapsto & R(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{d} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell, \end{array}$$

O produto interno rms

Definição

O *produto interno* rms em $\mathbb{R}^d$ é a função

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\mapsto R(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell, \end{aligned}$$

- **Exercício:** verifique que R é um produto interno

O produto interno rms

Definição

O *produto interno* rms em $\mathbb{R}^d$ é a função

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\mapsto R(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell y_\ell, \end{aligned}$$

- **Exercício:** verifique que R é um produto interno
- Na verdade, R é um caso particular dos produtos internos euclideanos *com pesos*

O produto interno rms

Exemplos

1. Se $x = (2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$ então $R(x, y) = \frac{1}{3}\langle x, y\rangle = \frac{1}{3}6$ enquanto que $\langle x, y\rangle = 6$.

O produto interno rms

Exemplos

1. Se $x = (2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$ então $R(x, y) = \frac{1}{3}\langle x, y\rangle = \frac{1}{3}6$ enquanto que $\langle x, y\rangle = 6$.
2. Se $x = (2, 2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 1, 2)$ então $\langle x, y\rangle = 8$ e $R(x, y) = 2$.

O produto interno rms

Exemplos

1. Se $x = (2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$ então $R(x, y) = \frac{1}{3}\langle x, y\rangle = \frac{1}{3}6$ enquanto que $\langle x, y\rangle = 6$.
2. Se $x = (2, 2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 1, 2)$ então $\langle x, y\rangle = 8$ e $R(x, y) = 2$.
3. Se $x = (2, 2, 2, 2, 1)$ e $y = (1, 1, 1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^5$ então $\langle x, y\rangle = 10$ e $R(x, y) = 2$.

O valor rms de um vetor em $\mathbb{R}^d$

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ o valor rms de x é a norma de x advinda do produto interno rms. Em outras palavras,

$$\operatorname{rms}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{R(x,x)}.$$

Exemplos

1. Seja $x = (1, -1, -1, 1)$ em $\mathbb{R}^4$. Então,
   $\operatorname{rms}(x) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2\right)} = 1.$

O valor rms de um vetor em $\mathbb{R}^d$

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ o valor rms de x é a norma de x advinda do produto interno rms. Em outras palavras,

$$\mathrm{rms}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{R(x,x)}.$$

Exemplos

1. Seja $x = (1, -1, -1, 1)$ em $\mathbb{R}^4$. Então, $\mathrm{rms}(x) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2\right)} = 1$.
2. Seja $e_{100} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^9$. Então, $\mathrm{rms}(e_{100}) = \sqrt{\frac{1}{100}\left(0^2 + \dots + 0^2 + 1^2\right)} = 0.1$. Note que $\|e_{100}\| = 1$.

A desigualdade de Chebyshev

Proposição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ e seja $\varepsilon > 0$. Suponha que n das d entradas de x tenham valor absoluto maior do que ε. Ou seja, existe um subconjunto $K \subset \{1, ..., d\}$, com n elementos, tal que que se $j \in K$ então $|x_j| \geq \varepsilon$. Então vale a seguinte desigualdade

$$\frac{n}{d} \leq \left(\frac{\mathrm{rms}(x)}{\varepsilon} \right)^2 .$$

A desigualdade de Chebyshev

Proposição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ e seja $\varepsilon > 0$. Suponha que n das d entradas de x tenham valor absoluto maior do que ε. Ou seja, existe um subconjunto $K \subset \{1, ..., d\}$, com n elementos, tal que que se $j \in K$ então $|x_j| \geq \varepsilon$. Então vale a seguinte desigualdade

$$\frac{n}{d} \leq \left(\frac{\mathrm{rms}(x)}{\varepsilon}\right)^2.$$

Exemplo

Se $\varepsilon = 10\,\mathrm{rms}(x)$ então $\frac{n}{d} \leq \left(\frac{\mathrm{rms}(x)}{10\,\mathrm{rms}(x)}\right)^2 = \frac{1}{100}$

A desigualdade de Chebyshev

Proposição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ e seja $\varepsilon > 0$. Suponha que n das d entradas de x tenham valor absoluto maior do que ε. Ou seja, existe um subconjunto $K \subset \{1, \ldots, d\}$, com n elementos, tal que que se $j \in K$ então $|x_j| \geq \varepsilon$. Então vale a seguinte desigualdade

$$\frac{n}{d} \leq \left(\frac{\mathrm{rms}(x)}{\varepsilon} \right)^2 .$$

Exemplo

Se $\varepsilon = 10\,\mathrm{rms}(x)$ então $\frac{n}{d} \leq \left(\frac{\mathrm{rms}(x)}{10\,\mathrm{rms}(x)} \right)^2 = \frac{1}{100} \implies$ menos de 1% das entradas de x podem exceder o valor rms de x em 10 vezes

Medindo distâncias em $\mathbb{R}^d$:

- **Distância euclideana:** $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

Medindo distâncias em $\mathbb{R}^d$:

- **Distância euclideana:** $d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d$
- **Distância rms:** $d_{rms}(x, y) = \text{rms}(x - y)$

A média

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}^d$ a *média* de x é o número $\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell$.

A média

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}^d$ a *média* de x é o número $\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell$.

Exemplos

1. Se $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$ então $\mu(\mathbb{I}) = 1$ para todo $d \geq 1$.

A média

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}^d$ a *média* de x é o número $\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell$.

Exemplos

1. Se $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ então $\mu(\mathbb{I}) = 1$ para todo $d \geq 1$.
2. Se $x = (1, -3, 7)$ então $\mu(x) = \frac{1}{3}(1 - 3 + 7) = \frac{5}{3}$.

A média

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}^d$ a *média* de x é o número $\mu(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell$.

Exemplos

1. Se $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ então $\mu(\mathbb{I}) = 1$ para todo $d \geq 1$.
2. Se $x = (1, -3, 7)$ então $\mu(x) = \frac{1}{3}(1 - 3 + 7) = \frac{5}{3}$.

Proposição

A função $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é linear, i.e. $\mu(\alpha x + \beta y) = \alpha\mu(x) + \beta\mu(y)$.

Versão centrada

Versão centrada

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A versão centrada de x é o vetor $x^c \stackrel{\text{def.}}{=} x - \mu(x)\mathbb{I}$.

Versão centrada

Versão centrada

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A versão centrada de x é o vetor $x^c \stackrel{\text{def.}}{=} x - \mu(x)\mathbb{I}$.

Exemplos

1. Seja $x = (1, 3)$. Então $\mu(x) = 2$ e $x^c = (-1, 1)$

Versão centrada

Versão centrada

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A versão centrada de x é o vetor $x^c \stackrel{\text{def.}}{=} x - \mu(x)\mathbb{I}$.

Exemplos

1. Seja $x = (1, 3)$. Então $\mu(x) = 2$ e $x^c = (-1, 1)$
2. Seja $x = (0, -9, 9, 8, 6)$ Então $\mu(x) = 2.8$ e $x^c = (-2.8, -11.8, 6.2, 5.2, 3.2)$

Versão centrada

Versão centrada

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. A versão centrada de x é o vetor $x^c \stackrel{\text{def.}}{=} x - \mu(x)\mathbb{I}$.

Exemplos

1. Seja $x = (1, 3)$. Então $\mu(x) = 2$ e $x^c = (-1, 1)$
2. Seja $x = (0, -9, 9, 8, 6)$ Então $\mu(x) = 2.8$ e $x^c = (-2.8, -11.8, 6.2, 5.2, 3.2)$

Proposição

$\mu(x^c) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^d$.

O desvio padrão

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. O *desvio padrão* de x é

$$\sigma(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{rms}(x^c) = \frac{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{d}(x_\ell - \mu(x))^2}}{\sqrt{d}}.$$

Exemplos

1. Se $x = (1, 1, 4)$ em $\mathbb{R}^3$ então $\mu(x) = 2$ e $x^c = (-1, -1, 2)$.
   Portanto $\sigma(x) = \operatorname{rms}(x^c) = \sqrt{\frac{1}{3}\left((-1)^2 + (-1)^2 + 2^2\right)} = \sqrt{2}$.

O desvio padrão

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}^d$. O *desvio padrão* de x é

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{rms}(x^c) = \frac{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{d}(x_\ell - \mu(x))^2}}{\sqrt{d}}.$$

Exemplos

1. Se $x = (1, 1, 4)$ em $\mathbb{R}^3$ então $\mu(x) = 2$ e $x^c = (-1, -1, 2)$.
   Portanto $\sigma(x) = \mathrm{rms}(x^c) = \sqrt{\frac{1}{3}\left((-1)^2 + (-1)^2 + 2^2\right)} = \sqrt{2}$.
2. Se $x = (0, -9, 9, 8, 6)$ em $\mathbb{R}^5$ então $\sigma(x) \simeq 6.67$

Coeficiente de correlação

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. O *coeficiente de correlação* entre x e y é o número

$$\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\langle x^c, y^c \rangle}{\|x^c\| \|y^c\|}.$$

Coeficiente de correlação

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. O *coeficiente de correlação* entre x e y é o número

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\langle x^c, y^c \rangle}{\|x^c\| \|y^c\|}.$$

Exemplos

1. Se $x = (1, -1, 1)$ e $y = (0, 1, 0)$ então $\mu(x) = 1/3$, $\mu(y) = 1/3$, $x^c \simeq (0.66, -1.33, 0.66)$, $y^c = (-0.33, 0.66, -0.33)$. Logo $\rho(x, y) \simeq -1$. Observe que $-2y^c = x^c$.

Fórmula do desvio padrão da soma

Lema

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. Então

$$\sigma(x+y) = \sqrt{\sigma(x)^2 + 2\rho(x,y)\sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)^2}.$$

Aplicação em finanças

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^d$ representem as séries temporais de retornos de dois portfólios de investimento de tal forma que $\mu(x) = \mu(y) = m \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo retorno) e $\sigma(x) = \sigma(y) = r \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo risco).

Aplicação em finanças

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^d$ representem as séries temporais de retornos de dois portfólios de investimento de tal forma que $\mu(x) = \mu(y) = m \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo retorno) e $\sigma(x) = \sigma(y) = r \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo risco).Considere

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Seja $c = \rho(x, y)$.

Aplicação em finanças

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^d$ representem as séries temporais de retornos de dois portfólios de investimento de tal forma que $\mu(x) = \mu(y) = m \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo retorno) e $\sigma(x) = \sigma(y) = r \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo risco).Considere

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Seja $c = \rho(x, y)$.Então

$$\sigma(z) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + c}. \tag{1}$$

Aplicação em finanças

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^d$ representem as séries temporais de retornos de dois portfólios de investimento de tal forma que $\mu(x) = \mu(y) = m \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo retorno) e $\sigma(x) = \sigma(y) = r \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo risco).Considere

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Seja $c = \rho(x, y)$.Então

$$\sigma(z) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+c}. \tag{1}$$

$\implies$ Se $c = 0$ então $\sigma(z) \simeq 0.707r$.

Aplicação em finanças

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^d$ representem as séries temporais de retornos de dois portfólios de investimento de tal forma que $\mu(x) = \mu(y) = m \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo retorno) e $\sigma(x) = \sigma(y) = r \in \mathbb{R}$ (os investimentos têm o mesmo risco).Considere

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

Seja $c = \rho(x, y)$.Então

$$\sigma(z) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+c}. \tag{1}$$

$\implies$ Se $c = 0$ então $\sigma(z) \simeq 0.707r$.
$\implies$ O risco fica 30% menor!