UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 1

Exercício 1. *Suponha que você tenha que comprar n insumos para a fabricação de um produto (você pode se imaginar um fabricante de cerveja artesanal para maior verossimilhança), e que as quantidades de cada um deles sejam encapsuladas num vetor $q \in \mathbb{R}^n$. Assim, por exemplo, q_5 é a quantidade do 5^o produto da sua lista que deve ser comprado. Você tem em vista alguns fornecedores, digamos um total de k fornecedores. Cada um vende o j-ésimo produto da sua lista por um preço, digamos assim: o fornecedor i vende o produto j pelo preço p_{ij}. Vamos assumir que todas as coordenadas dos vetores envolvidos nessa modelagem são positivos (assim, não estamos contemplando nem quantidades nem preços menores do que ou iguais a zero). Se for para você escolher apenas um fornecedor, tendo como informação apenas os preços praticados pelos k fornecedores e as quantidades que você precisa[1], como você embasaria sua escolha?*

Solução. Temos um vetor $q \in \mathbb{R}^n$, cujas entradas são $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, que é o **vetor de quantidades**. Cada entrada fornece a quantidade a ser comprada do insumo correspondente. Temos, para cada fornecedor um vetor de preços. Assim, para o fornecedor indexado pelo número j temos um vetor $p^j \in \mathbb{R}^n$, cujas entradas $(p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{jn})$ fornecem os preços dos produtos, de acordo com a indexação dos produtos de 1 até n.
Quanto você gasta no fornecedor j?–. O gasto é dado pelo número

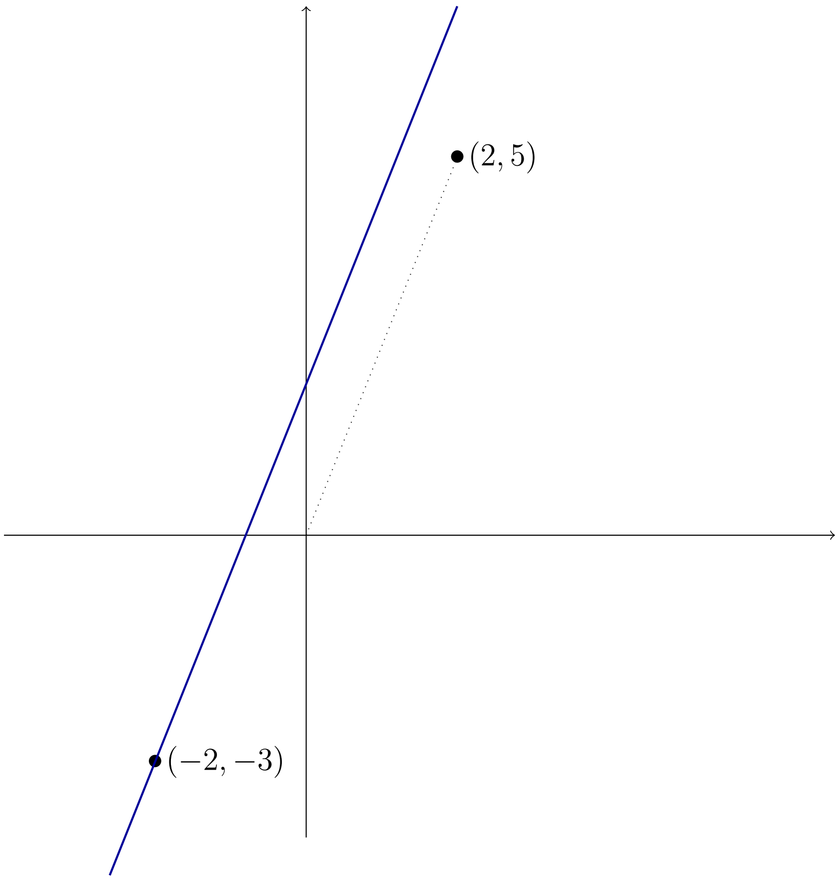
$$c^j(q) = p_{j1}q_1 + p_{j2}q_2 + \cdots + p_{jn}q_n = \sum_{\ell=1}^{n} p_{j\ell}q_\ell.$$

Assim, para comprar do fornecedor que te dá o menor custo, basta escolher o j para o qual $c^j(q)$ seja o menor possível. $\square$

Exercício 2. *Para cada número real $t \in \mathbb{R}$, considere o vetor $v(t) = (-2, -3) + t(2, 5)$. Observe que, a medida que t varia, o vetor $v(t)$ descreve uma reta no plano. Determine as interseções dessa reta com os eixos horizontal e vertical no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.*

Solução. $v(t) = (-2, -3) + t(2, 5) = (-2 + 2t, -3 + 5t)$.
Interseção com o eixo horizontal–. $-3 + 5t = 0 \implies t = 3/5$, logo a interseção se dá no ponto $(-2 + 2(3/5), 0) = (-4/5, 0)$.
Interseção com o eixo vertical–. $-2 + 2t = 0 \implies t = 1$ logo a interseção se dá no ponto $(0, -3 + 5.1) = (0, 2)$. Veja a figura abaixo. $\square$

[1] Ou seja, não vale responder "é só ir no Mundial que tem tudo lá".



Exercício 3. *Um analista de dados está estudando o padrão de consumo elétrico em uma fábrica. Ele plotou o consumo de energia (em MWh) a cada hora durante uma semana, obtendo assim um vetor $w \in \mathbb{R}^{168}$. Os dados revelaram que o padrão de consumo é o mesmo a cada dia. Expresse matematicamente o que isso significa em termos das coordenadas do vetor w.*

Solução. $w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_{24}, w_1, w_2, w_3, ..., w_{24}, ..., w_1, w_2, w_3, ..., w_{24})$. □

Exercício 4. *No exercício anterior, escreva uma fórmula envolvendo apenas as coordenadas do vetor w que retorne o consumo médio semanal da fábrica.*

Solução. Média das entradas de $x \in \mathbb{R}^n$ em geral é dada por $\mu(x) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell$.

No caso do vetor $w \in \mathbb{R}^{168}$, como as entradas são periódicas com período 24,

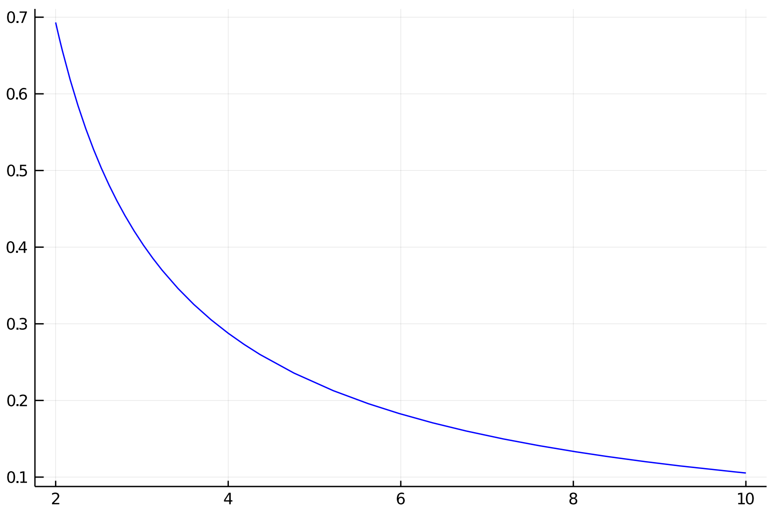
$$\mu(w)\frac{1}{24}\sum_{\ell=1}^{2} 4w_\ell.$$

□

Exercício 5. *Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^d$, o* vetor das diferenças *associado a x é o vetor $\hat{x} = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_d - x_{d-1})$. Dado $x \in \mathbb{R}^d$, temos $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.*

(a) *Qual a relação entre n e d?*
(b) *Suponha que a ℓ-ésima coordenada de x seja dada por $x_\ell = f(\ell)$, onde $f(x) = ax + b$. Escreva uma fórmula para $\hat{x}$ em função dos coeficientes da função f.*
(c) *Suponha que a ℓ-ésima coordenada de x seja dada por $x_\ell = \log \ell$. Quais são, respectivamente, a maior e a menor coordenada de $\hat{x}$ nesse caso?*

Solução. Observe que as entradas de $\hat{x}$ podem ser indexadas de 2 até d. Logo, temos $d-1$ entradas. Assim $n = d-1$. Além disso, a ℓ-ésima entrada de $\hat{x}$ é $x_{\ell+1} - x_\ell$. Logo, se $x_\ell = a\ell + b$ e $x_{\ell+1} = a(\ell+1)+b$, as entradas de $\hat{x}$ serão todas iguais a $a\ell + a + b - a\ell - b = a$. Logo, no caso do item (b), temos $\hat{x} = (a, a, a, .., a) = a\mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ é o vetor de uns de $\mathbb{R}^n$. No item (c) o



vetor $\hat{x}$ é dado por

$$(\log(2) - \log(1), \log(30 - \log(2), \ldots, \log(d) - \log(d-1)).$$

Na figura acima está plotado o gráfico da função $x \mapsto \log(x) - \log(x-1)$, para $x \geq 2$. Você pode ver que ela é decrescente. Logo a maior entrada de $\hat{x}$ é a primeira e a menor é a última. $\square$