UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 2

Exercício 1 (Ainda sobre o exercício da semana passada)**.** *Suponha que você tenha que comprar n insumos para a fabricação de um produto (você pode se imaginar um fabricante de cerveja artesanal para maior verossimilhança), e que as quantidades de cada um deles sejam encapsuladas num vetor $q \in \mathbb{R}^n$. Assim, por exemplo, q_5 é a quantidade do 5^o produto da sua lista que deve ser comprado. Você tem em vista alguns fornecedores, digamos um total de k fornecedores. Cada um vende o j-ésimo produto da sua lista por um preço, digamos assim: o fornecedor i vende o produto j pelo preço p_{ij}. Vamos assumir que todas as coordenadas dos vetores envolvidos nessa modelagem são positivos (assim, não estamos contemplando nem quantidades nem preços menores do que ou iguais a zero). Suponha que o seu negócio começou a dar um pouco certo e você decidiu pagar uma consultoria para te ajudar a otimizar os custos de produção. O consultor, pelo qual você pagou bem caro, te diz que o jeito de pagar mais barato é escolher dois fornecedores e comprar metade das quantidades em cada um, i.e. usar o vetor $(1/2)q$ como vetor de quantidades em cada um dos dois fornecedores. O consultor está certo? Use o produto interno euclideano para responder a essa pergunta.*

Solução. Vimos na lista da semana passada que os números $c_j = \langle p^j, q\rangle$ fornecem os custos de se adquirir todos os produtos com o j-ésimo fornecedor. Vimos que escolhendo $\ell = 1, ..., k$ como o índice tal que c_ℓ seja o menor dentre os números $c_1, c_2, ..., c_k$ temos que o ℓ-ésimo fornecedor será o mais barato.

Suponha agora que a gente compre metade das quantidades no fornecedor i e a outra metade num outro fornecedor j (de forma que i e j sejam efetivamente diferentes). O custo de comprar metade das quantidades no fornecedor j é dado por

$$\hat{c}_j = \langle p^j, 0.5q\rangle.$$

Similarmente, o custo de comprar a outra metade no fornecedor i é

$$\hat{c}_i = \langle p^i, 0.5q\rangle.$$

Agora, note que, pela linearidade do produto interno euclideano temos que $\langle p^j, 0.5q\rangle = 0.5\langle p^j, q\rangle$ e similarmente $\langle p^i, 0.5q\rangle = 0.5\langle p^i, q\rangle$. Logo,

$$\hat{c}_j = 0.5c_j \quad \text{e} \quad \hat{c}_i = 0.5c_i.$$

Agora veja que o custo total, se a gente adquire metade no fornecedor i e a outra metade no fornecedor j será dado por $\hat{c}_j + \hat{c}_i$. No entanto, acabamos de ver que

$$\hat{c}_j + \hat{c}_i = 0.5(c_j + c_i).$$

Como $c_\ell = \min\{c_r; r = 1, ..., k\}$, certamente $c_j \geq c_\ell$ e $c_i \geq c_\ell$. Pela igualdade acima, somos levados a concluir que

$$\hat{c}_j + \hat{c}_i = 0.5(c_j + c_i) \geq 0.5(c_\ell + c_\ell) = c_\ell.$$

Ou seja, o custo de adquirir metade num fornecedor e a outra metade em outro não pode ser menor do que comprar tudo no fornecedor de menor custo total. □

Exercício 2 (Temperatura e potência de processadores). *Neste exercício vamos supor como hipótese um determinado modelo matemático e alguns dados e objetivo é extrair conclusões, assumindo que o modelo é válido. Suponha então que temos um dispositivo eletrônico contendo três processadores. Naturalmente, a temperatura do dispositivo depende da potência dissipada por cada um dos processadores.*[1] *Aqui fazemos uma hipótese sobre essa relação entre a temperatura e a potência dissipada por cada processador:* ***vamos supor que ela seja descrita por uma função afim.*** *Em outras palavras, se indicarmos as potências dissipadas pelos processadores por p_1, p_2, p_3, tendo assim um vetor $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, então existem parâmetros $a \in \mathbb{R}^3$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que a temperatura T em função do vetor p é dada por*

$$T(p) = \langle a, p \rangle + b.$$

Agora, vamos supor alguns dados sobre o dispositivo. Quando os processadores estão ociosos, $p = (10, 10, 10)$ a temperatura fica em $T = 30$. Se o primeiro processador opera em potência total, e os dois outros ficam ociosos, i.e. $p = (100, 10, 10)$ então $T = 60$. Se for o segundo que opera em potência total (e aí $p = (10, 100, 10)$) aí a temperatura já sobe para $T = 70$. E se os dois primeiros operam ociosos, mas o terceiro em potência total ($p = (10, 10, 100)$) a temperatura fica em $T = 65$. Agora suponha que os três processadores operam na mesma potência β. Quão grande pode ser o número β, se a temperatura do dispositivo não pode ultrapassar 85?

Solução. Vamos denotar $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então, o modelo proposto tem o vetor a, e portanto suas três coordenadas e o parâmetro b como variáveis de ajuste. Para ajustar essas variáveis, estamos supondo alguns dados. Por exemplo, se $p = (10, 10, 1p)$ então $T(p) = 30$. Como $T(p) = \langle a, p \rangle + b$, todos os dados levantados no enunciado nos levam as equações

$$\begin{aligned} 10(x + y + z) + b &= 30 \\ 100x + 10(y + z) + b &= 60 \\ 10x + 100y + 10z + b &= 70 \\ 10(x + y) + 100z + b &= 65 \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira da segunda, obtemos

$$90x = 30 \quad \Longrightarrow \quad x = 1/3.$$

Subtraindo a primeira da terceira, obtemos

$$90y = 40 \quad \Longrightarrow \quad x = 4/9.$$

Subtraindo a primeira da quarta, obtemos

$$90z = 35 \quad \Longrightarrow \quad z = 7/18.$$

Por fim, substituindo os valores de x, y e z de volta na primeira equação obtemos $b = 18.333....$. Suponha agora que os três processadores operem na mesma potência β. No modelo, isso se traduz via $p = (\beta, \beta, \beta)$. Então, se $T(p) \leq 85$ devemos ter

$$\beta(x + y + z) + b \leq 85 \quad \Longrightarrow \beta \leq \frac{85 - b}{x + y + z} \simeq 57.14.$$

□

Exercício 3. *A analista financeira Marcela, engenheira com mestrado em matemática aplicada, trabalha em um banco e desenvolveu um sistema de pontuação para avaliar o nível de risco associado a emprestar dinheiro para um potencial cliente. A pontuação de uma pessoa é obtida através das respostas dela a questionário (idealizado pela Marcela) contendo 30 questões de*

[1] Por exemplo, a única vez que eu tentei jogar FIFA no meu notebook ele ameaçou queimar minha mesa de trabalho, então eu nunca mais tentei de novo...

múltipla escolha, com três opções (a),(b) ou (c) cada. Exatamente como os questionários que aparecem vez ou outra, compartilhados pelos tios e tias, no Facebook. As respostas são gravadas num vetor $a \in \mathbb{R}^{30}$, onde a entrada a_i é 0, 1 ou 2 de acordo com a resposta a i-ésima questão ((a) vale 0 ponto, (b) vale 1 ponto e (c) vale 2 pontos). De acordo com o algoritmo que a Marcela inventou, a pontuação total deve ser obtida da seguinte maneira: adicionando-se 1, para cada resposta (b), 2 para cada resposta (c) nas perguntas de de 1-15; 2 pontos para cada resposta (b) e 4 pontos para cada resposta (c) nas questões 16-30. Respostas (a) não pontuam nada. Encontre um vetor $u \in \mathbb{R}^{30}$ de forma que a pontuação total seja expressa por uma função

$$f(a) = \langle a, u \rangle.$$

Solução. Procuramos o vetor $u \in \mathbb{R}^{30}$ tal que $u_\ell = 1$ se $\ell = 1, ..., 15$ e $u_\ell = 2$ se $\ell = 16, ..., 30$. □

Exercício 4. *Suponha que $x \in \mathbb{R}^n$ represente o vetor de contagem de palavras de um documento, dentro de um dicionário de n palavras. Vamos supor que todas as palavras do documento estão no dicionário.*

(a) *Qual o significado do número $\beta = \langle \mathbb{I}, x \rangle$, onde $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$?*
(b) *O que significa $x_{666} = 0$?*
(c) *Seja $y \in \mathbb{R}^n$ o vetor que dá o histograma de contagem de palavras, ou seja, y_i é a fração de palavras no documento iguais a i-ésima palavra no dicionário. Expresse y em função de x e β.*

Solução. β é a quantidade total de palavras no texto. Se $x_{666} = 0$ isso significa que a 666ª palavra do dicionário não ocorre no texto (estamos supondo que isso não acontece). E y é o vetor de coordenadas dadas por $y_i = x_i/\beta$. □

Exercício 5. *Suponha que o vetor $x \in \mathbb{R}^{100}$ represente a distribuição de idades em uma determinada população, de modo que x_i seja o número de pessoas com idade $i - 1$. Suponha, por simplicidade que $x \neq 0$ e que ninguém tem idade superior a 99 nessa população. Usando notação vetorial, encontre fórmulas que deem, em função de x e de suas entradas,*

(a) *A quantidade de pessoas na população.*
(b) *A quantidade de pessoas com 65 anos ou mais.*
(c) *A idade média da população*

Demonstração. A quantidade de pessoas na população é $p = \langle x, \mathbb{I} \rangle$ onde $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1)$ é o vetor de uns do $\mathbb{R}^{100}$. A quantidade de pessoas idosas na população pode ser determinada a partir do vetor x via $n_i = \sum_{\ell=66}^{100} x_\ell$. Por fim a idade média da população que é o somatório das idades divido pela quantidade de pessoas, pode ser calculado via

$$\frac{\sum_{\ell=1}^{100} (\ell - 1) x_\ell}{p},$$

e observe que se denotamos por $y = (0, 1, 2, ..., 99) \in \mathbb{R}^{100}$ então o quociente acima pode ser reescrito em notação vetorial:

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, \mathbb{I} \rangle}.$$

□