Universidade Federal Fluminense

Complementos de Matemática Aplicada

Administração e Ciências Contábeis

Professora Maria Emilia Neves Cardoso

Notas de Aula / 2º semestre de 2017

Capítulo 1: Noções Iniciais

Neste capítulo faremos uma breve revisão das ideias básicas de equações de retas e de funções, necessárias à boa compreensão do texto.

1.1 – Coeficiente angular e equações de retas

As linhas retas num plano têm equações muito simples, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas. Estas equações podem ser deduzidas utilizando-se o conceito de **coeficiente angular**.

Definição: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos distintos de uma reta r. Se $x_1 \neq x_2$ então o **coeficiente angular** (ou inclinação) m de r é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo 1: Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (–2, 5) e (3, –1).

Solução: $m = \dfrac{-1-5}{3-(-2)} = \dfrac{-6}{5}$

Exemplo 2: Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (7, 1) e (3, 1).

Solução: $m = \dfrac{1-1}{3-7} = \dfrac{0}{-4} = 0$

Observação: O valor de m calculado pela definição anterior é independente da escolha dos dois pontos em r.

Seja (x_1, y_1) um ponto dado de uma reta de coeficiente angular m.

Então, para qualquer outro ponto (x, y) da reta com $x \neq x_1$ temos que $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Daí, multiplicando ambos os membros por $(x - x_1)$ obtemos a equação da reta na forma **ponto-coeficiente angular**.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

Se o ponto conhecido é aquele em que a reta corta o eixo y, e é denotado por (0, b), então a equação (1) torna-se

$$y = mx + b \qquad (2)$$

Neste caso, b é chamado de **interseção y da reta** ou **coeficiente linear** e (2) é a equação da reta na forma **coeficiente angular-interseção** (ou equação reduzida da reta**)**.

Exemplo 3: Escreva, em cada caso, a equação da reta que:

a) passa pelos pontos (4, – 2) e (5, 8).

b) passa por (2, – 3) e tem coeficiente angular – 4.

c) tem coeficiente angular 2 e coeficiente linear – 5.

Solução:

a) $m = \dfrac{8-(-2)}{5-4} = 10$

Então por (1) a equação da reta é $y - 8 = 10(x - 5)$ ou $y = 10x - 42$

b) Por (1), $y - (-3) = -4(x - 2) \therefore y + 3 = -4x + 8 \therefore y = -4x + 5$

c) Por (2), $y = 2x - 5$

Observações:

1 – O coeficiente angular de uma reta vertical não é definido, por isso as fórmulas (1) e (2) não são apropriadas para se obter sua equação. Mas como as primeiras coordenadas de todos os pontos de uma reta vertical são iguais, uma reta vertical que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem equação $x = x_1$.

2 – Duas retas não verticais são **paralelas** se e somente se seus coeficientes angulares são iguais, isto é,

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

3 – Duas retas não verticais são **perpendiculares** se e somente se o coeficiente angular de uma é igual ao simétrico do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja,

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$$

4 – O coeficiente angular de uma reta é uma constante. O número $y_2 - y_1$ é a variação na coordenada y e $x_2 - x_1$ é a variação na coordenada x. Dessa forma, o coeficiente angular de uma reta fornece a razão entre a variação de y e a variação de x, ou ainda, a **taxa de variação** de y em relação à x.

1.2 – Função

Intuitivamente, a palavra **função** está associada à ideia de **dependência**. Quando dizemos que a demanda de carne é função do preço do produto, que o preço cobrado para enviar um pacote pelo correio é função do peso do pacote ou que a área de um quadrado é função de seu lado, o que pretendemos dizer é, que a demanda de carne depende do preço do produto, que o preço cobrado para enviar um pacote pelo correio depende do peso do pacote e que a área de um quadrado depende de seu lado.

Em termos gerais, uma **função** consiste em dois conjuntos e uma "regra" que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro. Vamos supor, por exemplo, que um fabricante esteja interessado em determinar o efeito do preço sobre o número de unidades vendidas de certo produto. Para estudar essa relação, é preciso conhecer o conjunto de preços admissíveis, o conjunto de vendas possíveis e uma regra para associar cada preço a um determinado número de unidades vendidas. A definição que vamos adotar é a seguinte:

Definição: Uma **função** de um conjunto A em um conjunto B é uma relação que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B.

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e seja a relação de A em B que a cada elemento x de A associa $y = 2x$ em B. Assim,

$x = 1$ está associado a $y = 2$
$x = 2$ está associado a $y = 4$
$x = 3$ está associado a $y = 6$

Esta relação é uma função de A em B, pois cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

As letras f, g e h serão usadas para representar funções, embora seja comum, em situações práticas, usar letras que lembrem as grandezas envolvidas.

O conjunto A é chamado de **domínio** da função e o conjunto B de **contradomínio**. Quando o domínio e o contradomínio de uma função f são subconjuntos de números reais dizemos que f é uma **função real**. As funções estudadas neste texto serão sempre reais de uma variável real.

A letra x que representa um número arbitrário do domínio de uma função f é chamada de **variável independente**; a letra y cujo valor depende do valor atribuído a x é chamada de **variável dependente**.

O valor y que uma função f associa a um número x pertencente ao domínio é chamado de **imagem** de x por f e denotado por $f(x)$. Assim, por exemplo, quando escrevemos que $f(2) = 4$ estamos indicando que 4 é o número que a função f associa ao número 2 ou que 4 é a imagem de 2 por f. O **conjunto imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ obtidos quando x varia por todo o domínio.

Funções também podem ser representadas por tabelas e descrições por palavras. Outras se representam naturalmente com gráficos, como o eletrocardiograma (EKG). Embora seja possível construir uma fórmula para representar aproximadamente uma função EKG, isto raramente é feito. O que o médico precisa é o esquema de repetições, e é muito mais fácil vê-lo num gráfico do que em uma fórmula. Mas cada EKG representa uma função que dá a amplitude de impulsos elétricos gerados no músculo cardíaco em função do tempo.

Para representar geometricamente uma função real em um gráfico, costumamos usar um sistema de coordenadas no qual as unidades da variável independente x são marcadas no eixo horizontal e as unidades da variável dependente y são marcadas no eixo vertical. O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que x pertence ao domínio de f e y = f(x).

Embora uma função real f possa ser descrita de várias formas, é comum que seja definida enunciando apenas a “regra” para achar f(x), como por exemplo, $f(x) = \sqrt{x}$. Nesse caso, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais que tornam possíveis as operações indicadas na regra. Nesse exemplo o domínio de f é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a zero.

Observações: 1) f é uma **função polinomia**l **de grau n**, se:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0 são números reais com $a_n \neq 0$ e n é um número inteiro não negativo.

Exemplos:

a) $f(x) = 7$ é uma função polinomial de grau 0.

b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ é uma função polinomial de grau 2.

c) $f(x) = x^5 - 5x^2 - 6x + 2$ é uma função polinomial de grau 5.

2) Uma **função racional** é um quociente entre duas funções polinomiais.

3) **Função algébrica** é aquela que pode ser expressa como soma, diferença, produto, quociente ou potência racional de polinômios. As funções que não são algébricas são chamadas de **transcendentes**. As funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são exemplos de funções transcendentes.

Exercícios de fixação

Nas questões de 1 a 5, determine os domínios e os valores indicados das funções dadas.

1) $f(x) = x^2 + 4$

a) $f(-1)$　　b) $f(0)$　　c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$　　d) $f(\sqrt{2})$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

a) $f(7)$　　b) $f(-1)$　　c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$　　d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$　　e) $f(\sqrt{2})$

3) f(x) = $\dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) f(0) b) f(–2) c) f(2) d) f(5)

4) f(x) = $\sqrt{x-2}$

a) f(2) b) f(3) c) f(4) d) f(6)

5) f(x) = $\sqrt[3]{x-2}$

a) f(1) b) f(2) c) f(0) d) f(10)

As funções das questões 6 e 7 a seguir são definidas por regras distintas em diferentes partes de seus domínios. Tais funções são "definidas por mais de uma sentença" ou "definidas por partes". Determine o domínio e os valores especificados de cada uma delas:

6) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) f(0) b) f(1) c) f($\sqrt{3}$) d) f(4)

7) f(x) = $\begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 5 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

a) f(–5) b) f(0) c) f(2) d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e) $f\left(\dfrac{11}{3}\right)$

Respostas:

1) Dom(f) = IR a) 5 b) 4 c) $\dfrac{17}{4}$ d) 6

2) Dom(f) = IR* a) $\dfrac{1}{7}$ b) – 1 c) 2 d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3) Dom(f) = IR – { –1, 1} a) 0 b) $\dfrac{-2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{5}{24}$

4) Dom(f) = [2, ∞) a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 2

5) Dom(f) = IR a) – 1 b) 0 c) $\sqrt[3]{-2}$ d) 2

6) Dom (f) = IR a) – 1 b) 5 c)13 d) 65

7) Dom (f) = IR a) – 1 b) 5 c) 5 d) 5 e) 1

Capítulo 2: Limite de uma função real

O Cálculo Diferencial e Integral é um importante ramo da Matemática com um grande número de aplicações: plotagem de curvas, otimização de funções, análise de taxas de variação e determinação de áreas, entre outras.

O que distingue o Cálculo da Álgebra é o conceito de **limite** que é o ponto de partida para definir todos os outros conceitos do Cálculo, como os de “derivada” e “integral”.

Na linguagem comum, as pessoas se referem ao limite de velocidade, ao limite de peso de um lutador, ao limite de resistência de um maratonista, ou ao fato de esticar uma mola até o limite. Todas essas frases sugerem que o limite é uma fronteira que em certas circunstâncias não pode ser atingida, mas em outras pode ser atingida ou mesmo ultrapassada. Um limite matemático se parece com esses limites. Nesse capítulo vamos apresentar uma ideia intuitiva do conceito matemático de limite e mostrar como pode ser calculado.

2.1 – Noção intuitiva do conceito de limite

Falando de maneira geral, o processo de determinar o limite de uma função real f consiste em investigar o comportamento do valor de f(x) à medida que a variável independente x se aproxima de um número c, que pode ou não pertencer ao domínio de f.

Vamos supor que queremos saber o que acontece com $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ à medida que x se aproxima de 1.

Embora f(x) não seja definida em x = 1, podemos avaliar f(x) para valores de x próximos de 1. Para fazer isto, preparamos uma tabela como a que aparece a seguir:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,05	1,1
f(x)	2,9	2,95	2,99	2,999	–	3,001	3,01	3,05	3,1

Os valores da função nesta tabela sugerem que:

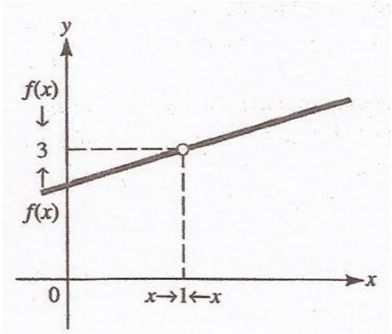
- f(x) se aproxima do número 3 à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

- Podemos obter valores para f(x) tão próximos de 3 quanto quisermos, bastando para isso tomar valores de x suficientemente próximos de 1.

Esse comportamento pode ser descrito, intuitivamente, dizendo que “o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3” e abreviado por

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Geometricamente, a expressão “o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3” significa que a altura do gráfico de y = f(x) se aproxima de 3 à medida que x se aproxima de 1.



O gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ é uma reta com um "buraco" em (1,3), e os pontos (x, y) no gráfico se aproximam desse buraco à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

Temos a seguinte definição (informal) de limite:

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de c, exceto talvez em c. Se o valor de f(x) fica arbitrariamente próximo de L para todos os valores suficientemente próximos de c, dizemos que f tem limite L e escrevemos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Ao definirmos limite, admitimos que f é definida para todos os valores de x nas proximidades de c, mas não necessariamente em x = c. A função não precisa existir em x = c, e mesmo que exista, seu valor f(c) neste ponto pode ser diferente do limite quando x tende a c.

Isso está ilustrado na figura 1 abaixo. Para as três funções representadas, o limite de f(x) quando x tende a c, é igual a L, embora as funções se comportem de forma bastante diferente em x = c. Em (a), f(c) é igual ao limite L; em (b), f(c) é diferente de L, e em (c), f(c) não está definido.

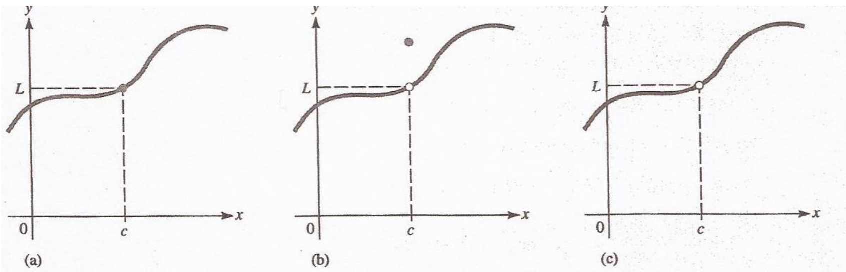


figura 1

A figura 2 abaixo mostra os gráficos de duas funções que não têm limite quando x tende a c. O limite não existe na figura 2(a) porque os "limites laterais" são diferentes, isto é, f(x) se aproxima de 5 quando x tende a c pela direita e se aproxima de 3 (um valor diferente) quando x tende a c pela esquerda. A função da figura 2(b) não tem limite (finito) quando x tende a c porque os valores de f(x) aumentam indefinidamente à medida que x se aproxima de c. Dizemos que funções como a da figura 2(b) têm um "limite infinito" quando x tende a c. Limites laterais e limites infinitos serão estudados mais adiante.

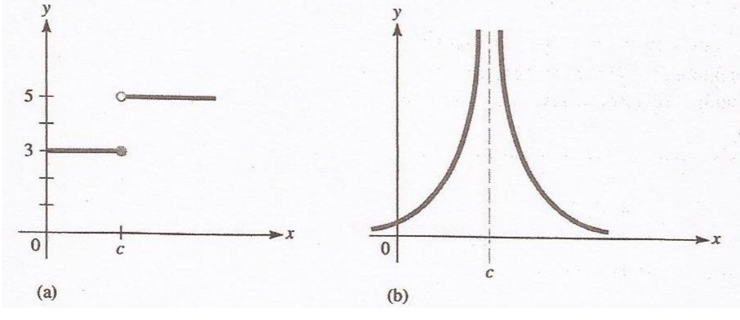


figura 2

2.2 – Propriedades dos limites

Utilizamos uma tabela na seção anterior para nos ajudar a determinar o valor do limite da função dada. O nosso objetivo agora é introduzir propriedades (teoremas) que permitam simplificar o cálculo dos limites de funções algébricas.

O teorema 1 se refere aos limites de duas funções lineares elementares.

Teorema 1: Sejam c e k números reais.

a) $\lim\limits_{x \to c} k = k$ b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 5} 7 = 7$

2) $\lim\limits_{x \to 4} x = 4$

O teorema 2 mostra como calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções cujos limites já conhecemos.

Teorema 2: Se L, M, c e k são números reais e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ então:

a) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

b) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

c) $\lim\limits_{x \to c} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) . \lim\limits_{x \to c} g(x) = L.M$

d) $\lim\limits_{x \to c} (k.f(x)) = k.\lim\limits_{x \to c} f(x) = K.L$

e) $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n = L^n$ onde $n \in Z_+^*$

f) Se $M \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

g) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, desde que L > 0 se n for par.

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2x + 5) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 + \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 5 = \left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^3 + 2\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 5 = 2^3 + 2.2 + 5 = 17$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x+8} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+8)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 2}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 8} = \dfrac{0-2}{0+8} = -\dfrac{2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Podemos determinar mais facilmente o limite de funções polinomiais e de algumas funções racionais através do seguinte resultado:

Teorema 3: a) Seja p(x) uma função polinomial. Então $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$

b) Seja r(x) = $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Se $q(c) \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c)$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^5 - 3x^2 + 5x + 7) = 32 - 12 + 10 + 7 = 37$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x}{x+4} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$

Teorema 4: Se $\lim\limits_{x\to c} h(x) = L$ e f é uma função tal que f(x) = h(x) para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo ao redor de c, excluindo o valor x = c, então $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solução: f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ não está definida para x = 2, mas para todos os valores de x tais que $x \neq 2$ temos:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

Então, pelo teorema 4, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2)$

Além disso, pelo teorema 3 $\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

Portanto $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

Solução: f(x) = $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ não está definida em x = 1, mas para todos os valores de x tais que $x \neq 1$ temos:

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 1 + \sqrt{x}$$

Logo, pelo teorema 4, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} (1 + \sqrt{x})$

Mas sabemos, pelos teoremas anteriores, que $\lim\limits_{x \to 1} (1 + \sqrt{x}) = 2$

Então $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 2$

Exercícios de fixação

Calcule os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x - 10)$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x^2+3x}$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{5x-6}$

5) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4-x^2}{2x+4}$

9) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+2x^2}{3x+6}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

11) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

12) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

Respostas:

1) 30 2) $\dfrac{1}{2}$ 3) 0 4) – 1 5) 8 6) 3

7) $\dfrac{5}{2}$ 8) 2 9) $\dfrac{4}{3}$ 10) 2 11) $\dfrac{1}{4}$ 12) $\dfrac{1}{6}$

Exercícios – lista 1

Determine os limites:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (5 - 3x - x^2)$

2) $\lim\limits_{x \to 3} (5x^2 - 7x - 3)$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{8x + 1}{x + 3}}$

5) $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

6) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3 + x)^2 - 9}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$

9) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x}$

11) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

13) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{3x^2 - x^3}$

14) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$

15) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$

16) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)^3}{3x - 3}$

17) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 2x - 3}$

18) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 7}$

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

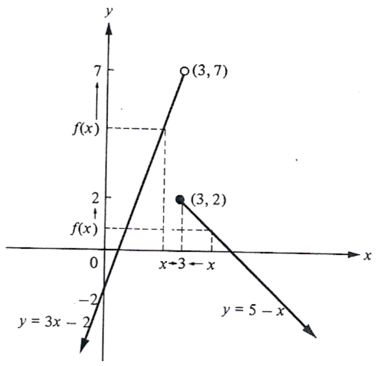
20) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$

Respostas:

1) 7	2) 21	3) 1 / 2	4) 3 /2	5) – 14
6) – 1	7) 6	8) 3	9) 8	10) – 1
11) 0	12) $1 / 2\sqrt{2}$	13) 0	14) 6	15) 4
16) 0	17) 2	18) 0	19) 1 / 6	20) 2 / 3

2.3 – Limites laterais

Algumas vezes uma função f se comporta de forma diferente de cada lado de um número c, isto é, tende para valores diferentes quando x tende para c “pela esquerda” e “pela direita”. Essa situação é ilustrada no seguinte exemplo:



Seja $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se} \quad x < 3 \\ 5 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

A figura mostra que o valor de f(x) tende a 7 quando x tende a 3 para valores **menores** que 3, isto é, f(x) tende a 7 quando x tende a 3 **pela esquerda**. Denotamos esse fato simbolicamente como

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$$

A figura mostra, também, que o valor de f(x) tende a 2 quando x tende a 3 para valores **maiores** que 3, isto é, f(x) tende a 2 quando x tende a 3 **pela direita**. Simbolicamente temos

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

Esses limites são chamados de **limites laterais**.

Observação: Os teoremas da seção anterior podem ser estabelecidos para limites laterais.

No exemplo dado, não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$, já que os valores de f(x) não tendem para um único número L quando x tende a 3 pela esquerda e pela direita. O critério para a existência de um limite é dado pelo teorema a seguir.

Teorema: O $\lim_{x \to c} f(x)$ existe e é igual a L se e somente se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{se} \quad x < 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \\ x + 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

Determine, se existirem: a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 4} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solução: a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x^2 - 5) = -5$

b) $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x + 5) = 9$

c) Nesse caso precisamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 5) = 7 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x^2 - 5) = 7$$

Então $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$

Logo $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

Exercícios de fixação:

Nas questões de 1 a 4, calcule os limites:

1) $\lim_{x \to 2^+} (x^3 - 2x + 5)$ 2) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$ 3) $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x^2 - 9}{3 - x}$ 4) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

5) Seja f(x) = $\begin{cases} 3x + 7 & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim_{x \to -1} f(x)$

6) Seja f(x) = $\begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim_{x \to 2} f(x)$

7) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ Determine, se existir $\lim_{x \to 2} f(x)$

8) Seja f(x) = $\begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ 3x - 7 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim_{x \to 5} f(x)$

Respostas:

1) 9 2) 0 3) 0 4) 4

5) não existe

6) 5

7) 4

8) a) 1 b) não existe c) 8

2.4 – Continuidade

Na linguagem comum, um processo "contínuo" é aquele que ocorre sem interrupções ou mudanças repentinas. Informalmente, dizemos que uma função é **contínua** se podemos desenhar o seu gráfico "sem tirar o lápis do papel". Para que uma função f não tenha interrupção em um número c é preciso que a função seja definida em c e que os valores de f(x) para x próximo de c estejam próximos de f(c). Formalmente, a definição de continuidade é expressa utilizando a noção de limite da seguinte maneira:

Definição: Uma função f é **contínua em um número c** se:

a) f(c) é definida
b) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe
c) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Exemplo: Verifique se as funções abaixo são contínuas em x = 2

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \\ 3-x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

Solução:

a) Temos que f(2) = 5 e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. Então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Logo, f é contínua em x = 2

b) f(2) não é definida (o denominador é igual a zero quando x = 2). Então f não é contínua em x = 2.

c) Temos que f(2) = 3

Calculando os limites laterais: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3-x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ então $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe. Logo f não é contínua em x = 2.

d) Nesse caso f(2) = 1 e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ concluímos que f não é contínua em x = 2.

Considerando o teorema 3 da seção 2 e a definição de continuidade, podemos afirmar que:

Teorema 1: Uma função polinomial é contínua em todos os números reais.

Teorema 2: Uma função racional é contínua em todos os números nos quais é definida.

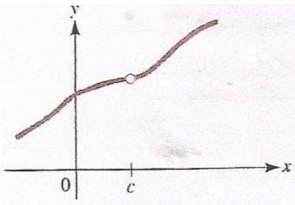
Exemplos: 1) $f(x) = 3x^2 - x + 5$ é contínua em IR

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ é contínua em IR – {– 1}

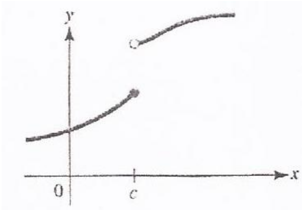
3) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ é contínua em IR

Observação: Se uma função f não é contínua em um número c, dizemos também que f é **descontínua** em c.

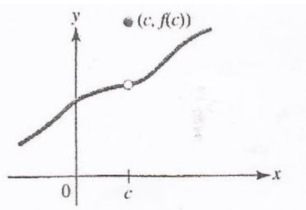
Apresentamos abaixo os gráficos de três funções descontínuas em c.



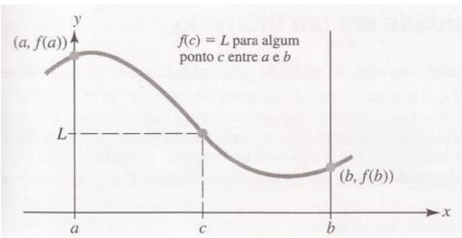
f(c) não é definida



$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ não existe



$\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$



Uma propriedade importante das funções contínuas que utilizaremos mais adiante é o **teorema do valor intermediário**, segundo o qual se f é uma função contínua no intervalo [a, b] e L é um número entre f(a) e f(b) então existe algum número c entre a e b tal que f(c) = L. Isso significa que uma função contínua assume todos os valores entre dois de seus valores.

Exercícios de fixação

Nas questões de 1 a 5, verifique se as funções são contínuas nos números dados:

1) $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - x^2$ em x = 1

2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$ em x = 2

3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$ em x = – 1

4) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$ em x = 3

5) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x<4 \\ 15 & \text{se} \quad x=4 \\ 3x+3 & \text{se} \quad x>4 \end{cases}$ em x = 4

Respostas: 1) sim 2) sim 3) sim 4) não 5) sim

Exercícios – lista 2

Nas questões de 1 a 4, diga se as funções dadas são contínuas em qualquer número real.

1) $f(x) = x^5 + 6x^4 - 7x^2 + 9$

2) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{se} \quad x \neq -1 \\ -4 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 0 & \text{se} \quad x = -2 \\ 11 - x^2 & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}$

Nas questões de 5 a 10 determine todos os valores de x onde a função dada é contínua.

5) $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

6) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 6}$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$

8) $f(x) = \dfrac{x^4 + 8}{x^2 - 1}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

10) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

11) Seja $f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se} \quad x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Para que valor da constante c a função f é contínua em IR?

12) Explique por que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$ é descontínua em x = 1.

Respostas:

1) sim

2) não, f não é contínua em x = 1

3) sim

4) não, f não é contínua em x = – 2

5) IR

6) IR – {– 3}

7) IR – {0, 1}

8) IR – {– 1, 1}

9) IR*

10) IR

11) $\dfrac{2}{3}$

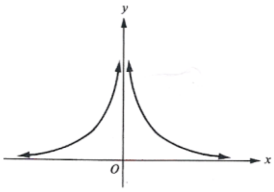
12) Porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

2.5 – Limites que envolvem infinito

2.5.1 – Limites infinitos

Nessa seção veremos que algumas vezes o limite de uma função f quando x tende para um número c não existe porque à medida que x se aproxima de c os valores de f aumentam ou diminuem ilimitadamente.

Vamos analisar, por exemplo, o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima de zero. É evidente a partir da tabela e do gráfico de f abaixo, que à medida que x fica mais próximo de zero, os valores de f (de ambos os lados) aumentam ilimitadamente.



x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)	100	10.000	1.000.000	–	1.000.000	10.000	100

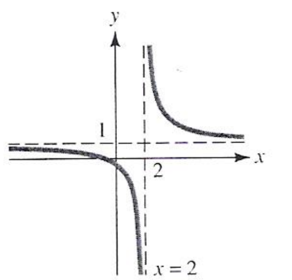
Assim, os valores de f não tendem para um número e não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Embora o limite não exista, costuma-se descrever esse comportamento de f dizendo que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tende a infinito quando x tende a zero e escrever $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Escrevemos $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ para indicar que os valores de f decrescem ilimitadamente (tomando valores negativos muito grandes) quando x tende a c. Notações similares serão usadas no caso de limites laterais.

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	– 29	– 299	– 2.999	– 29.999	–	30.001	3.001	301	31



Vemos que à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda, os valores de f(x) diminuem ilimitadamente e, que quando x se aproxima de 2 pela direita, os valores de f(x) aumentam ilimitadamente. Então

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

Segue-se que f não tem limite (finito ou infinito) quando x tende a 2.

Observação: Os símbolos ∞ e – ∞ não representam números reais. São apenas notações para indicar que f(x) aumenta ou diminui ilimitadamente quando x se aproxima de um número real.

Podemos estudar muitos desses limites raciocinando intuitivamente: se $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, $L \neq 0$ e $\lim_{x \to c^+} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, com o sinal dependendo dos sinais de L e de g(x) à direita de c. Um raciocínio análogo pode ser feito para o limite à esquerda de c com as mesmas conclusões.

Exemplos: 1) Determine $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6$ e que $\lim\limits_{x \to 3^-} (x - 3) = 0$. Além disso, para x próximo e menor do que 3, o denominador é próximo de zero e negativo. Então, como o numerador é positivo e o denominador é negativo, o sinal da fração é negativo.

Logo $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3} = -\infty$

2) Calcule $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{7-x}{(x-5)^2}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 5^-} (7 - x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 5^-} (x - 5)^2 = 0$. Quando x está próximo e é menor do que 5, o denominador é próximo de zero e positivo. Então, como o numerador e o denominador são positivos, o sinal da fração é positivo.

Logo $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{7-x}{(x-5)^2} = \infty$

3) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-5}{1-x}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 5) = -4$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x) = 0$. Quando x está próximo e é maior do que 1, o denominador é próximo de zero e negativo. Como o numerador e o denominador são negativos, o sinal da fração é positivo.

Então $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-5}{1-x} = \infty$

4) Determine $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$

Quando x se aproxima de 1 pela direita (x > 1), o numerador é positivo e o denominador é positivo; quando x se aproxima de 1 pela esquerda (x < 1), o numerador é positivo e o denominador é negativo.

Portanto $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$

Então $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1}$ não existe.

Exercícios de fixação:

Nas questões de 1 a 6, determine, se existirem, os limites:

1) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{9-x}{x-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-3x}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1-x}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{x^3-x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x+1}$

Respostas:

1) ∞ 2) ∞ 3) $-\infty$ 4) ∞ 5) $-\infty$ 6) não existe

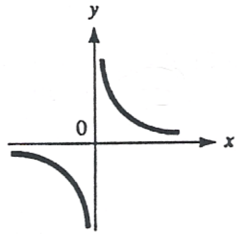
2.5.2 – Limites no infinito

Estamos interessados em estudar agora, o comportamento dos valores f(x) de uma função quando x cresce ou decresce ilimitadamente.

Vamos analisar, inicialmente, o comportamento de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ através da tabela abaixo.

– 10.000	– 1.000	– 100	– 10	x	10	100	1.000	10.000
– 0,0001	– 0,001	– 0,01	– 0,1	f(x)	0,1	0,01	0,001	0,0001

À medida que x aumenta ou diminui, os valores de f(x) se aproximam de zero. Isso também pode ser observado no gráfico de f, esboçado ao lado.



Então $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

De modo geral, temos:

Teorema: Se n é um número inteiro positivo e c é um número real então

$$\lim_{x\to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Exemplos: 1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{12}{x^7} = 0$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7}{x^4} = 0$

Observação: Sabemos que o símbolo ∞ não representa um número, mas a expressão $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$ é lida como "o limite de f(x) quando x tende para infinito é igual a L".

Os valores de f(x) também podem crescer ou decrescer ilimitadamente, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Por exemplo, os valores de $f(x) = x^3$ crescem ilimitadamente quando $x \to \infty$ e decrescem ilimitadamente quando x → – ∞; os valores de f(x) = – x^3 decrescem ilimitadamente quando x → ∞ e crescem ilimitadamente quando x → – ∞. Denotamos isso, escrevendo:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = \infty$$

O limite no infinito de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente (pois se colocarmos esse termo em evidência, todos os demais tendem a zero). Por exemplo:

$$\lim_{x\to\infty} (2x^5 - 4x^2 + 3x + 7) = \lim_{x\to\infty} 2x^5\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{7}{2x^5}\right) = \lim_{x\to\infty} 2x^5 = \infty$$

Como consequência, quando tivermos o limite no infinito de um quociente de dois polinômios, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior expoente do numerador e do denominador. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^7 + 5x^4 - 3x + 7}{2x^3 - 6x + 9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 = \infty$$

Exercícios de fixação

Calcule os limites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^4} =$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x^5} =$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - 3x^2 + x - 7) =$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - x^2 + x^3 + 3x^4 - 2x^7) =$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^5 + x^2 - 4) =$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^4 + 5x^3 - x + 9) =$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{7x+8} =$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} =$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x + 5}{2 + 4x - x^2} =$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3 - 2x + x^2 - 4x^3}{x^3 + 5x^2 + 4} =$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5}{8 - 5x - x^2} =$

12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + 7x - 5}{6x^5 + 4x^2} =$

Respostas:

1) 0	2) 0	3) ∞	4) ∞	5) – ∞	6) – ∞
7) 2/7	8) 0	9) – ∞	10) – 4	11) ∞	12) 1/6

Exercícios - lista 3

Determine os limites:

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to -8^-} \dfrac{3x}{(x+8)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x}$

7) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1-x}{(x-5)^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3+x}{(x-1)^2}$

9) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{x-7}{x+7}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{2x+2}$

14) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5}{x-4}$

15) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-3x-4}$

16) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

Respostas:

1) ∞

2) $-\infty$

3) $-\infty$

4) $-\infty$

5) ∞

6) $-\infty$

7) $-\infty$

8) ∞

9) não existe

10) $-\infty$

11) não existe

12) $-\infty$

13) $-\infty$

14) não existe

15) $-\infty$

16) $-\infty$

Exercícios – lista 4

Nas questões de 1 a 16, determine os limites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^4 - 7x + 1)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + 5x - x^2 + 4x^3)$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (6x - 10x^2)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^5 + x^3 + 9)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^5}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{-10x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-7}{2x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{x+4}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 + x^2 + 4}{-x^2 - 2x + 7}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{3x^3 + 1}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^4 - 1}{-5x^3}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + x^2}{1 - 2x}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5 + x - 7x^2}{x^3 + 2x - 1}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x + 1}{4 - x}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x + 3}{6x + 7}$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2 + 3x - x^3}{5}$

Respostas:

1) ∞	2) $-\infty$	3) $-\infty$	4) ∞
5) 0	6) 0	7) 0	8) 1
9) $-\infty$	10) 0	11) ∞	12) $-\infty$
13) 0	14) -4	15) 1 / 3	16) ∞

Exercícios de revisão de limites – lista 5

Determine os limites abaixo:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right)^6$

4) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{x + 3}$

5) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-3x}{x + 1}$

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + 6x^3}{2x^3 + 3x}$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{4x^2 + 5x + 9}$

8) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{3x - 12}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{3x}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{4x}$

11) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x - 3}{x^2 - 1}$

12) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

13) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^{100} - x^{99}}{x^{101} - x^{100}}$

14) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{x}$

15) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x + 1}$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^4}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$

18) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x}{x - 5}$

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3x + 1} - 2}$

20) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

Respostas:

1) 1	5) ∞	9) ∞	13) 0
2) 6	6) 3	10) 1 / 4	14) 1
3) 64	7) 0	11) 3 / 2	15) ∞
4) $-\infty$	8) 8 / 3	12) 0	16) ∞
17) 1 / 6	18) não existe	19) – 3	20) 4

Capítulo 3 – Derivada de uma Função Real

O conceito de derivada foi introduzido no século XVII em estudos de problemas de Física ligados à pesquisa dos movimentos. Entre outros, destacam-se o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e o filósofo e matemático alemão Gottfried Leibnitz (1646-1716).

3.1 – Taxa de Variação

Nesta seção usaremos a noção de limite para definir o conceito de taxa de variação para quaisquer quantidades variáveis de qualquer espécie, mas vamos resolver, inicialmente, o problema de achar a velocidade de um corpo em movimento em determinado instante.

Vamos considerar a seguinte situação: um carro está se movendo ao longo de uma estrada reta e d(t) representa a sua distância do ponto de partida após t horas e queremos determinar a velocidade do carro num instante t_1.

Para definir essa velocidade, primeiro calculamos a velocidade média em um intervalo de tempo próximo de t_1. Consideramos, por exemplo, os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ onde Δt é um número real. As distâncias percorridas correspondentes são $d(t_1)$ e $d(t_1 + \Delta t)$. A velocidade média (v_m) do carro entre os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ é:

$$v_m = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{\Delta t}$$

Para obtermos a velocidade do carro no instante t_1 (ou a velocidade instantânea em t_1), calculamos a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores. Se o intervalo de tempo Δt é pequeno, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea. Podemos então definir a velocidade no instante t_1 ou a **taxa de variação (instantânea)** da distância em relação ao tempo como o limite quando Δt tender a zero na expressão para a velocidade média, isto é:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

Exemplo 1: A distância (em metros) de um objeto a um ponto é dada por $d(t) = t^2 + 5$ onde o tempo t é medido em segundos. Determine a velocidade do objeto em $t_1 = 3$.

Solução: $v(3) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{d(3 + \Delta t) - d(3)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(3 + \Delta t)^2 + 5 - (9 + 5)}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2 + 5 - 9 - 5}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6 + \Delta t) = 6$$

Então a velocidade do objeto no instante $t_1 = 3$ é 6 metros por segundo.

As considerações a respeito da taxa de variação da distância em relação ao tempo podem ser generalizadas e assim serem aplicadas para quaisquer quantidades variáveis de qualquer espécie.

Definição: Seja y = f(x). A **taxa de variação (instantânea) de y em relação a x** quando x tem o valor x_1 é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo 2: Estima-se que daqui a x anos a população de certa cidade será de

$$P(x) = 100x^2 + 400x + 5.000 \text{ pessoas.}$$

Determine a taxa de variação da população com o tempo daqui a 5 anos.

Solução: Seja P′(x) a taxa de variação de P em relação a x. Queremos calcular P′(5).

Então $P'(5) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(5+\Delta x) - P(5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{100(5+\Delta x)^2 + 400(5+\Delta x) + 5.000 - 9.500}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{100(25 + 10\Delta x + (\Delta x)^2) + 2.000 + 400\Delta x - 4.500}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.500 + 1.000\Delta x + 100(\Delta x)^2 + 400\Delta x - 2.500}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1.400\Delta x + 100(\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(1.400 + 100\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1.400 + 100\Delta x) = 1.400$$

Logo, a taxa de variação será de 1.400 pessoas por ano.

3.2 – Derivada de uma função

Vimos na seção anterior que o problema de encontrar a taxa de variação de uma variável em relação a outra é resolvido pelo cálculo de um tipo de limite, que por ocorrer em muitas outras aplicações, recebe nome e notação especiais.

Definição: Seja f uma função. A **derivada de f em x_0**, denotada por $f'(x_0)$ é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ se o limite existir (é finito).}$$

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^3$. Determine $f'(2)$.

Solução: $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2+\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2) = 12$$

No exemplo anterior determinamos $f'(2)$ mas é possível calcular a derivada de $f(x) = x^3$ em qualquer outro número. Assim, para cada valor de x podemos encontrar $f'(x)$, ou seja, definir uma nova função: a derivada.

Definição: Seja $y = f(x)$. A **função derivada** (ou simplesmente derivada) de f é a função tal que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais para os quais o limite existe.

Exemplo 2: Determine a derivada de $f(x) = x^3$

Solução: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

Então $f'(x) = 3x^2$

Dessa maneira, se $x = 2$ temos $f'(2) = 12$; se $x = -1$ temos $f'(-1) = 3$, etc..

Observações:

1 - O limite indicado na definição de derivada pode existir para alguns valores de x e deixar de existir para outros. Se o limite existe (é finito) para x = a, dizemos que a função é **derivável** (diferenciável) **em a**. Uma função **derivável** (diferenciável) é aquela que é derivável em cada ponto de seu domínio.

2 - A notação f' usada na definição anterior tem a vantagem de enfatizar que a derivada de f é uma função de x que está associada de certa maneira com a função f dada. Se a função é apresentada na forma $y = f(x)$, com a variável dependente explícita, então o símbolo y' é usado em lugar de $f'(x)$. A derivada de $y = f(x)$ é também indicada por $\frac{dy}{dx}$ e algumas vezes por $D_x\,y$.

3.3 – Regras básicas de derivação

A operação de encontrar a derivada de uma função é chamada **derivação** ou **diferenciação** e pode ser efetuada aplicando-se a definição de derivada. No entanto, se conseguirmos achar a função derivada das principais funções elementares e se, além disso, soubermos achar as funções derivadas de somas, diferenças, produtos e quocientes dessas funções elementares, poderemos encontrar as derivadas de muitas funções sem termos de recorrer à definição (o que muitas vezes pode ser trabalhoso).

Sendo $c \in IR$, $n \in Q$ e u e v funções reais de variável x.

1) Regra da constante: Se f(x) = c então $f'(x) = 0$

2) Regra da identidade: Se f(x) = x então $f'(x) = 1$

3) Regra da potência: Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n.x^{n-1}$

4) Regra da soma: Se f(x) = u + v então $f'(x) = u' + v'$

5) Regra do produto: Se f(x) = uv então $f'(x) = u'v + uv'$

6) Regra do produto por uma constante: Se f(x) = c.u então $f'(x) = c.u'$

7) Regras do quociente: a) Se $f(x) = \frac{u}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

b) Se $f(x) = \frac{c}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{-cv'}{v^2}$

Exemplos:

1) Determine as derivadas:

a) $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 4.3x^2 - 7.2x + 9.1 - 0 = 12x^2 - 14x + 9$

b) $f(x) = (5x^2 + 2x)(3x - 4)$

$f'(x) = (10x + 2)(3x - 4) + (5x^2 + 2x).3 = 30x^2 + 6x - 40x - 8 + 15x^2 + 6x$

$f'(x) = 45x^2 - 28x - 8$

c) $f(x) = 7x^4 + 3\sqrt{x}$

Temos que $f(x) = 7x^4 + 3\sqrt{x} = 7x^4 + 3x^{1/2}$

Então $f'(x) = 28x^3 + 3\frac{1}{2}x^{-1/2} = 28x^3 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{5}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-5.4x^3}{(x^4)^2} = \frac{-20x^3}{x^8} = \frac{-20}{x^5}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5}{4x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{9x^2(4x^2+1) - (3x^3-5)8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{36x^4 + 9x^2 - 24x^4 + 40x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 9x^2 + 40x}{(4x^2+1)^2}$$

Exercícios de fixação

Calcule as derivadas:

1) $f(x) = x^3 + 4x + 7$

2) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 8$

3) $f(x) = 2x^5 + 6x^{-7} - 9x^{-2} - x$

4) $f(x) = 7(x^5 - 2x^3 + 4)$

5) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 5x)$

6) $f(x) = (4x^2 - 2)(7x^3 + x)$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

8) $f(x) = \dfrac{7}{x^3}$

9) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 7}$

10) $f(x) = \dfrac{5x + 7}{2x - 1}$

Respostas:

1) $3x^2 + 4$

2) $20x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

3) $10x^4 - 42x^{-8} + 18x^{-3} - 1$

4) $7(5x^4 - 6x^2)$

5) $18x^2 + 26x + 5$

6) $140x^4 - 30x^2 - 2$

7) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

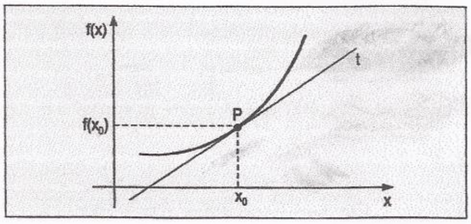
8) $\dfrac{-21}{x^4}$

9) $\dfrac{x^4 + 21x^2}{(x^2+7)^2}$

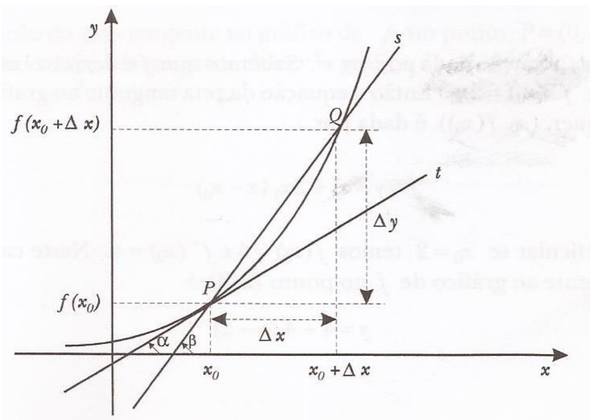
10) $\dfrac{-19}{(2x-1)^2}$

3.4 – Interpretação geométrica de derivada

Vamos supor que P = (x_0, $f(x_0)$) é um ponto no gráfico de uma função f derivável em x_0 e queremos determinar o coeficiente angular da reta tangente t que passa por P (figura abaixo).



Para isso, vamos escolher outro ponto Q no gráfico de f e traçar uma reta s passando por P e Q. Tomando Q bem próximo de P podemos fazer com que o coeficiente angular da reta s se aproxime do coeficiente angular da reta t com qualquer precisão desejada.



Vamos supor que a abscissa de Q esteja a Δx unidades de x_0. Desse modo, a abscissa de Q é $x_0 + \Delta x$.

Como Q pertence ao gráfico de f, a ordenada de Q é $f(x_0 + \Delta x)$. Assim, Q = ($x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x)$).

Então o coeficiente angular da reta s é:

$$m_s = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Se fizermos Δx tender a zero, o ponto Q se moverá sobre a curva y = f(x) e tenderá ao ponto P. Além disso, a reta s irá girar em torno de P e tenderá para a reta t. Logo, quando Δx tende a zero, o coeficiente angular de s tende para o coeficiente angular de t, ou seja,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Como f é derivável em x_0, esse limite existe (é finito). Portanto $m_t = f'(x_0)$.

Assim, a derivada $f'(x_0)$ expressa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, $f(x_0)$).

3.5 – Aplicações de derivada

Pelo que vimos acima, se f é uma função derivável em x_0 e se $y_0 = f(x_0)$ então a **equação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemplo 1: Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 4x$ no ponto (1, 5).

Solução: Vamos determinar o coeficiente angular da reta tangente, isto é, $f'(1)$.

Temos que $f'(x) = 2x + 4$

Daí $f'(1) = 6$

Logo, a equação da reta tangente é: $y – 5 = 6(x – 1)$ ou $y = 6x – 1$

Pelo que foi estudado nas seções 3.1 e 3.2, sabemos que a derivada f' expressa a taxa de variação (instantânea) de $y = f(x)$ em relação a x.

Exemplo 2: Estima-se que daqui a x anos a população de certa cidade será de

$P(x) = 100x^2 + 400x + 5.000$ pessoas.

Determine a taxa de variação da população daqui a 5 anos.

Solução: Precisamos calcular $P'(5)$

Já resolvemos esse problema em 3.1, mas agora vamos usar as regras de derivação para determinar $P'(x)$.

Então $P'(x) = 200x + 400$

Daí $P'(5) = 1.400$

Logo, a taxa de variação da população daqui a 5 anos será de 1.400 pessoas por ano.

Em Economia, o termo “marginal” é frequentemente usado como um sinônimo de “derivada de”. Por exemplo, se C é a função custo tal que C(x) é o custo da produção de x unidades de uma mercadoria, $C'(x)$ é chamado de **custo marginal** da produção de x unidades e C' de **função custo marginal**.

Exemplo 3: O custo (total) de fabricação, em reais, de x unidades de certo produto é dado pela função $C(x) = – 0,2x^2 + 200x + 8.000$. Determine o custo marginal quando são produzidas 250 unidades.

Solução: O custo marginal é dado por $C'(x) = – 0,4x + 200$

Então $C'(250) = 100$ (reais / unidade).

Em situações práticas, o número x de unidades produzidas é usualmente muito grande. Portanto, em comparação a x, o número 1 pode ser considerado muito pequeno, de modo que

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} \cong \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x + 1) – C(x)$$

Assim, o custo marginal quando são produzidas x unidades é aproximadamente igual à variação do custo decorrente da produção de uma unidade adicional a partir de x unidades.

No exemplo 3, a variação do custo quando o nível de produção aumenta de 250 para 251 é:

$$C(251) - C(250) = 45.599{,}80 - 45.500 = 99{,}80 \text{ (reais)}$$

Observe que o custo marginal de R\$ 100,00 por unidade (quando $x = 250$) constitui uma **boa aproximação** para a variação real do custo (quando x aumenta de 250 para 251). Isso significa que, para o nível de produção de 250 unidades, o custo para produzir uma unidade a mais é, aproximadamente, igual ao custo marginal $C'(250)$, ou ainda, que $C'(250)$ é o custo aproximado da produção da 251ª unidade.

Exemplo 4: O lucro obtido com a produção e venda de x unidades de certa calculadora é, em reais, dado por $L(x) = 0{,}0002x^3 + 10x$.
a) Determine o lucro real com a produção e venda da 51ª calculadora.
b) Determine o lucro marginal para um nível de produção e venda de 50 calculadoras.

Solução: a) O lucro real com a produção e venda da 51ª calculadora é dado por:
$$L(51) - L(50) = 536{,}53 - 525 = 11{,}53$$

b) O lucro marginal é dado por $L'(x) = 0{,}0006x^2 + 10$
Para $x = 50$ temos $L'(50) = 1{,}5 + 10 = 11{,}50$

A demanda (procura) de um produto depende de muitas variáveis: preço do produto, preço de produtos substitutos, renda do consumidor, impacto que a propaganda provoca no consumidor, etc.. Se todas as variáveis se mantêm constantes, exceto o preço unitário do produto, chamamos de **função demanda** à relação entre o preço unitário e a quantidade demandada.

Exemplo 5: A função demanda para um novo modelo de telefone celular é dada por $p = -0{,}02x + 400$ onde p é o preço unitário em reais e x a quantidade, com $0 \leq x \leq 20.000$.
a) Escreva a receita R como uma função de x
b) Determine a receita marginal para $x = 2.000$
c) Se o custo de produção de x telefones, em reais, é dado por $C(x) = 100x + 20.000$, determine o lucro marginal para $x = 2.000$.

Solução: a) Sabemos que a receita é obtida multiplicando o número de unidades pelo preço unitário. Então $R(x) = xp = x(-0{,}02x + 400) = -0{,}02x^2 + 400x$

b) A receita marginal é dada por $R'(x) = -0{,}04x + 400$. Logo $R'(2.000) = 320$ (reais por telefone)

c) Seja $L(x)$ o lucro obtido com a produção e venda de x unidades. Então $L(x) = R(x) - C(x)$.

Nesse caso, $L(x) = -0{,}02x^2 + 400x - (100x + 20.000) = -0{,}02x^2 + 400x - 100x - 20.000$

Daí $L(x) = -0{,}02x^2 + 300x - 20.000$

O lucro marginal para x telefones é dado por $L'(x) = -0{,}04x + 300$

Logo $L'(2.000) = 220$ reais / telefone.

Exercícios de fixação:

1) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ no ponto $(2, -6)$

2) Uma projeção revela que daqui a t anos a população de certa cidade será (em milhares de habitantes) dada por $P(t) = - \ t^3 + 18t^2 + 48t + 200$. A que taxa a população estará aumentando daqui a 3 anos?

3) A população de uma região rural está aumentando de acordo com a função

$$P(t) = 22t^2 + 52t + 10.000$$

onde t é o tempo em anos, com t = 0 representando o ano de 1.995.
a) Determine a população em 2.015
b) Determine a taxa de crescimento da população em 2.015

4) A função demanda para um produto é $p = 50 - \frac{3x}{2}$, onde p é o preço unitário em reais e x o número de unidades demandadas.
a) Expresse a receita R como uma função de x.
b) Determine a receita marginal para x = 10.
c) Determine o preço unitário quando a receita marginal é R$ 14,00 por unidade.

5) O custo de fabricação de um produto é $C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}5q^2 + 500q + 200$ onde q é o número de unidades produzidas. Compare o custo marginal de fabricação de 3 unidades com o custo de fabricação da quarta unidade.

Respostas:

1) $y = 4x - 14$

2) 129.000 habitantes por ano

3) a) 19.840 habitantes b) 932 habitantes por ano

4) a) $R(x) = 50x - \frac{3x^2}{2}$ b) $R'(10) = 20$ c) $p = 32$

5) $C'(3) = 499{,}70$ e $C(4) - C(3) = 500{,}20$

Exercícios - lista 6

Nos itens 1 a 18, ache as derivadas aplicando as regras básicas:

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 1$

2) $f(x) = 5x^6 - 9x^4$

3) $f(x) = x^8 - 2x^7 + 3x$

4) $f(x) = 5x^{-5} - 25x^{-1}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

6) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{4}{5x}$

7) $f(x) = x^2 (3x^3 - 1)$

8) $f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 + 5)$

9) $f(x) = (x^3 - 1)(3x^2 - x)$

10) $f(x) = \sqrt{2}\,(x^5 - 2x^3 + 4)$

11) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2}$

12) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

13) $f(x) = \dfrac{2x + 7}{3x - 1}$

14) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^2 - 1}$

15) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$

16) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$

17) $f(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

18) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 4}$

Nos itens de 19 e 20, calcule $f'(2)$.

19) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$

20) $f(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$

21) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{12}{x} - 4x$ no ponto (2, – 2).

22) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{5x^4}{2} - 3x^2 + 5$ no ponto (0, 5).

23) Estima-se que daqui a x meses a população de certa cidade será $P(x) = 2x + 4\sqrt{x^3} + 5.000$ habitantes. Determine a taxa de variação da população com o tempo daqui a 16 meses.

24) Um fabricante observa que quando produz e vende x caixas de chocolate por semana, o lucro (em reais) é dado por $L(x) = 0{,}02x^2 + 15x - 1.000$. Qual é o lucro marginal para um nível de produção de 100 caixas por semana?

25) A receita obtida com a venda de x unidades de um produto é dada por $R(x) = 220x - 4x^2$ e o custo de produção é dado por $C(x) = 900 + 44x$. Para que nível de produção x a receita marginal é igual ao custo marginal.

26) O custo de fabricação (em reais) de x de unidades de um produto é $C(x) = \dfrac{3x^2}{4} + 50x + 62$. Determine o custo marginal para um nível de produção de 6 unidades.

27) A demanda por um sistema de caixas de som é de $p = -0{,}04x + 800$ onde denota o preço unitário em reais e x a quantidade demandada com $0 \leq x \leq 300.000$. Determine a receita marginal para $x = 5.000$.

28) Na questão anterior, estima-se que o custo, em reais envolvido na fabricação de x unidades será de $C(x) = 200x + 300.000$. Determine o lucro marginal para $x = 5.000$.

29) O custo de produção, em reais, de x ventiladores é $C(x) = 100 + 50x + \dfrac{100}{x}$. Calcule o custo marginal quando são produzidos 5 ventiladores.

30) Sabe-se que $60 - x$ unidades de um produto são vendidas quando o preço é x reais por unidade. Determine a receita marginal quando $x = 10$.

31) O custo de fabricação de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 0{,}01x^2 + 5x + 10.000$. Compare o custo marginal da fabricação de 500 unidades com o custo de produção da 501ª unidade.

32) O custo de fabricação em reais de x brinquedos é dado por $C(x) = 0{,}02x^2 + 4x + 110$. Compare o custo marginal da produção de 50 brinquedos com o custo de produção do 51º brinquedo.

Respostas:

1) $5x^4 - 9x^2$

2) $30x^5 - 36x^3$

3) $8x^7 - 14x^6 + 3$

4) $-25x^{-6} + 25x^{-2}$

5) $\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{3}$

6) $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{4}{5}x^{-2}$

7) $15x^4 - 2x$

8) $10x^4 + 6x^2 + 10x$

9) $15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$

10) $\sqrt{2}\,(5x^4 - 6x^2)$

11) $2x^3$

12) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$

13) $\dfrac{-23}{(3x-1)^2}$

14) $\dfrac{-20x}{(x^2-1)^2}$

15) $\dfrac{x^2}{(x^2+x)^2}$

16) $\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

17) $\dfrac{2x^3-7}{x^2}$

18) $\dfrac{12x}{(x^2+4)^2}$

19) 4

20) -9

21) $y = -7x + 12$

22) $y = 5$

23) 26 habitantes por mês

24) R$ 19,00 por caixa

25) $x = 22$

26) R$ 59,00 por unidade

27) R$400,00 por unidade

28) R$200,00 por unidade

29) R$46,00 por ventilador

30) R$ 40,00 por unidade

31) $C'(500) = 15$ e $C(501) - C(500) = 15{,}01$

32) $C'(50) = 6$ e $C(51) - C(50) = 6{,}02$

3.6 – Diferenciais

Na seção 3.2, vimos que a derivada de y em relação a x pode ser representada por $\frac{dy}{dx}$ embora esse símbolo não fosse interpretado como a razão de duas grandezas. Veremos agora, que dy e dx podem ser definidos de maneira que seu quociente seja igual à derivada de y em relação a x.

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A **diferencial de x**, representada por dx, é qualquer número real diferente de zero. A **diferencial de y**, representada por dy, é dada por $dy = f'(x)dx$.

Exemplo 1: Seja $y = f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7x - 8$. Determine dy

Solução: Temos que $f'(x) = 20x^3 + 6x - 7$. Então $dy = (20x^3 + 6x - 7)dx$

Exemplo 2: Considere a função $y = x^3 - 5x + 4$.

a) Determine dy
b) Calcule o valor de dy para $x = 2$ e $dx = 0,01$

Solução: a) $dy = (3x^2 - 5)dx$

b) Pelo item (a), para $x = 2$ e $dx = 0,01$ temos $dy = 0,07$

Exemplo 3: Seja $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$. Considere $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$.
Determine Δy, dy e $\Delta y - dy$ para: a) $x = 2$ e $dx = 0,1$ b) $x = 2$ e $dx = 0,01$.

Solução: a) Temos que $f(2 + 0,1) = f(2,1) = (2,1)^3 + (2,1)^2 - 2(2,1) + 1 = 10,471$ e $f(2) = 9$

Então $\Delta y = f(2 + 0,1) - f(2) = 10,471 - 9 = 1,471$

Sabemos que $dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$. Para $x = 2$ e $dx = 0,1$ temos $dy = 1,4$

Então $\Delta y - dy = 1,471 - 1,4 = 0,071$

b) Temos que $f(2 + 0,01) = f(2,01) = 9,140701$ e $f(2) = 9$.

Daí $\Delta y = f(2,01) - f(2) = 0,140701$. Para $x = 2$ e $dx = 0,01$ temos $dy = 0,14$

Então $\Delta y - dy = 0,140701 - 0,14 = 0,000701$

Observe no exemplo anterior, que $\Delta y \cong dy$. Nesse exemplo, o erro $\Delta y - dy$ cometido na aproximação é de 0,071 no item (a) e de 0,000701 no item (b) e essa aproximação se torna melhor à medida que o valor de dx fica menor. Por isso as diferenciais são utilizadas para aproximar variações da variável dependente associadas a pequenas variações da variável independente.

Pela definição anterior podemos escrever que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e assim, a notação $\frac{dy}{dx}$ usada como símbolo para derivada pode ser considerada um quociente entre diferenciais. Também podemos escrever todas as regras de derivação na forma diferencial.

As diferenciais serão utilizadas mais adiante no Cálculo integral.

3.7 – Regra da Cadeia e Regra geral da potência

Vamos estudar agora uma regra de derivação chamada **regra da cadeia** que quando usada com as regras básicas amplia consideravelmente a classe de funções que podemos derivar.

Queremos determinar, por exemplo, a derivada de $y = (x^3 + 5)^2$

Podemos fazer isso desenvolvendo $(x^3 + 5)^2$ e derivando o polinômio resultante.

Assim, $y = (x^3 + 5)^2 = x^6 + 10x^3 + 25$

Daí $\dfrac{dy}{dx} = 6x^5 + 30x^2$ (1)

Também podemos fazer $u = x^3 + 5$ de modo que $y = u^2$

Calculamos, então, $\dfrac{dy}{du} = 2u$ e $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

Então $\dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u.\ 3x^2 = 6x^5 + 30x^2$ (2)

Por (1) e (2) vemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Esta relação entre as derivadas ocorre de modo geral e é conhecida como **regra da cadeia**.

Regra da cadeia (versão informal): Se y é uma função derivável em u e u é uma função derivável em x, então y é uma função derivável em x e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Exemplo: Determine a derivada de $y = (4x^5 - 7x^2)^{30}$

Solução: Seja $u = 4x^5 - 7x^2$ de modo que $y = u^{30}$

Então $\dfrac{dy}{du} = 30u^{29}$ e $\dfrac{du}{dx} = 20x^4 - 14x$

Pela regra da cadeia, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 30u^{29}(20x^4 - 14x) = 30(4x^5 - 7x^2)^{29}(20x^4 - 14x)$

Nos exemplos apresentados, as funções dadas são potências de funções. Vamos apresentar, a seguir, uma regra (que é um caso especial da regra da cadeia) para derivar esse tipo de função, chamada **regra geral da potência.**

Teorema: Se r é um número racional e u é uma função derivável de variável x então

$$(u^r)' = r.u^{r-1}.\ u'$$

Exemplos:

1) $y = (x^2 + 3x - 2)^9$

Solução: $y' = 9(x^2 + 3x - 2)^8(2x + 3)$

2) $y = \sqrt{6x - 7}$

Solução: Temos que $y = (6x - 7)^{1/2}$

Então $y' = \dfrac{1}{2}(6x - 7)^{-1/2} . 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x - 7}}$

3) $y = 4x^2(2x - 1)^4$

Solução: $y' = 8x(2x - 1)^4 + 4x^2.4(2x - 1)^3.2 = 8x(2x - 1)^4 + 32x^2(2x - 1)^3 =$

$= 8x(2x - 1)^3(2x - 1 + 4x) = 8x(2x - 1)^3(6x - 1)$

4) $y = \left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^{10}$

Solução: $y' = 10\left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^9 . \left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)' = 10\left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^9 . \dfrac{3}{(x + 1)^2} = \dfrac{30(x - 2)^9}{(x + 1)^{11}}$

Exercícios de fixação:

1) $y = (3x^3 + 4x^2 - 4)^{-5}$

2) $y = \sqrt[3]{5x^2 - x + 6}$

3) $y = 5x^6(2x + 7)^9$

4) $y = \left(\dfrac{-2}{x^3 + 5x}\right)^3$

Respostas:

1) $y' = (-5)(3x^3 + 4x^2 - 4)^{-6}(9x^2 + 8x)$

2) $y' = \dfrac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 6)^2}}$

3) $y' = 30x^5(2x + 7)^8(5x + 7)$

4) $y' = \dfrac{24(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x)^4}$

Exercícios - lista 7

Nas questões 1 a 16, calcule as derivadas:

1) $y = (5 - 2x)^{10}$

2) $y = (4x + 1)^{-5}$

3) $y = (2x^4 - x + 1)^{-4}$

4) $y = (x^2 - 3x + 2)^7$

5) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

6) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$

7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

8) $y = \dfrac{3}{(1 - x^2)^4}$

9) $y = 5x^2(2x + 3)^4$

10) $y = 6x\,(2x - 1)^3$

11) $y = 2x^5(x^4 + 7)^5$

12) $y = 10x^2(5x + 1)^4$

13) $y = (2x + 1)^3(x^3 - 5)$

14) $y = (5x + 2)(x^2 + 1)^5$

15) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^4$

16) $y = \left(\dfrac{4x + 1}{x + 2}\right)^3$

17) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (3x - x^2)^4 - 13$ no ponto (1, 3).

18) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (2x - 3)^5$ quando x = 2.

Respostas:

1) $-20\,(5 - 2x)^9$

2) $-20\,(4x + 1)^{-6}$

3) $(-32x^3 + 4)(2x^4 - x + 1)^{-5}$

4) $7(x^2 - 3x + 2)^6(2x - 3)$

5) $\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

6) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 5)^2}}$

7) $\dfrac{-4x}{(4x^2 + 1)^{3/2}}$

8) $\dfrac{24x}{(1 - x^2)^5}$

9) $10x(2x + 3)^3(6x + 3)$

10) $6(2x - 1)^2(8x - 1)$

11) $10x^4(x^4 + 7)^4(5x^4 + 7)$

12) $20x(5x + 1)^3(15x + 1)$

13) $3(2x + 1)^2(4x^3 + x^2 - 10)$

14) $5(x^2 + 1)^4(11x^2 + 4x + 1)$

15) $\dfrac{4(x - 1)^3}{x^5}$

16) $\dfrac{21(4x + 1)^2}{(x + 2)^4}$

17) $y = 32x - 29$

18) $y = 10x - 19$

3.8 – Derivadas de funções exponenciais e de funções logarítmicas

As funções exponenciais e logarítmicas estão entre as mais importantes do Cálculo, com muitas aplicações em campos tão diversos como a Física, a Biologia e a Economia. Nesta seção vamos apresentar as regras básicas de derivação para essas funções.

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = a^u$ então $f'(x) = u'.a^u.\ln a$

Caso particular: Se $f(x) = e^u$ então $f'(x) = u'.e^u$

Exemplos:

1) $f(x) = 5^{2x^2+7x}$

Solução: $f'(x) = (4x + 7).5^{2x^2+7x}.\ln 5$

2) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Solução: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \sqrt{e^{6x}+5}$

Solução: Temos que $f(x) = \sqrt{e^{6x}+5} = (e^{6x} + 5)^{1/2}$

Então $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^{6x} + 5)^{-1/2}.6e^{6x} = \dfrac{3e^{6x}}{\sqrt{e^{6x}+5}}$

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = \log_a u$ então $f'(x) = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Caso particular: Se $f(x) = \ln u$ então $f'(x) = \dfrac{u'}{u}$

Exemplos:

1) $f(x) = \log_2(7x^5 - 2x^4 + 3)$

Solução: $f'(x) = \dfrac{35x^4 - 8x^3}{(7x^5 - 2x^4 + 3)\ln 2}$

2) $f(x) = \ln(5x^2 - 4x)^3$

Solução: Sabemos que $\ln(5x^2 - 4x)^3 = 3\ln(5x^2 - 4x)$

Então $f'(x) = 3.\dfrac{10x-4}{5x^2-4x} = \dfrac{30x-12}{5x^2-4x}$

3) $f(x) = ((\ln(2x + 7))^3$

Solução: Pela regra geral da potência temos: $f'(x) = 3(\ln(2x+7))^2\dfrac{2}{2x+7} = \dfrac{6(\ln(2x+7))^2}{2x+7}$

4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Solução: Temos que $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)' = \dfrac{1.x-(x+1).1}{x^2} = \dfrac{x-x-1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$

Então $f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{-1}{x^2}.\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{-1}{x^2+x}$

Exercícios de fixação:

Calcule as derivadas:

1) $f(x) = 3^{x^4+7x^3}$

2) $f(x) = e^x + e^{1/x}$

3) $f(x) = \dfrac{4}{e^{x^2+5}}$

4) $f(x) = \log(4x^5 - 7)$

5) $f(x) = (\ln(3x^2 + x))^7$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Respostas:

1) $f'(x) = (4x^3 + 21x^2).3^{x^4+7x^3}.\ln 3$

2) $f'(x) = e^x - \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

3) $f'(x) = \dfrac{-8x}{e^{x^2+5}}$

4) $f'(x) = \dfrac{20x^4}{(4x^5-7)\ln 10}$

5) $f'(x) = \dfrac{7(6x+1)(\ln(3x^2+x))^6}{3x^2+x}$

6) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Exercícios - Lista 8

Nas questões de 1 a 18 calcule as derivadas, simplificando o resultado:

1) $f(x) = e^{5x^3 - x}$

2) $f(x) = 2^{5x^3 - x}$

3) $f(x) = 10^{-7x + 2}$

4) $f(x) = 3^{3x^2}$

5) $f(x) = \sqrt{e^{4x} + 5}$

6) $f(x) = x\, e^{-2x}$

7) $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{x^2}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x} + e^x + 1}$

9) $f(x) = e^x \ln x$

10) $f(x) = \ln(5x + 4)$

11) $f(x) = \ln(5x + 4)^3$

12) $f(x) = (\ln(5x + 4))^3$

13) $f(x) = \ln\left(\sqrt{4x^2 + 1}\right)$

14) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{x}\right)$

15) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

16) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3}{2x - 1}\right)$

17) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x} + 1\right)$

18) $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

Respostas:

1) $f'(x) = (15x^2 - 1)e^{5x^3 - x}$

2) $f'(x) = (15x^2 - 1)2^{5x^3 - x} \ln 2$

3) $f'(x) = (-7\ln 10)\, 10^{-7x + 2}$

4) $f'(x) = (6x)\, 3^{3x^2} \ln 3$

5) $f'(x) = \dfrac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 5}}$

6) $f'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$

7) $f'(x) = \dfrac{2e^{4x}(2x - 1)}{x^3}$

8) $f'(x) = -\dfrac{2e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + e^x + 1)^2}$

9) $f'(x) = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

10) $f'(x) = \dfrac{5}{5x + 4}$

11) $f'(x) = \dfrac{15}{5x + 4}$

12) $f'(x) = \dfrac{15(\ln(5x + 4))^2}{5x + 4}$

13) $f'(x) = \dfrac{4x}{4x^2 + 1}$

14) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

15) $f'(x) = \dfrac{2}{3x^2 - 3}$

16) $f'(x) = \dfrac{x - 3}{x(2x - 1)}$

17) $f'(x) = \dfrac{1}{2(x + \sqrt{x})}$

18) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

3.9 – Regra de L'Hôpital

De modo geral, se temos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, dizemos que o limite está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Calculamos alguns limites desse tipo no capítulo 2 utilizando recursos algébricos.

Por exemplo, $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+3}{x+1} = -1$

Mas esses recursos não funcionam para determinar, por exemplo, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^2-8)}{3-x}$$

Se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) quando $x \to a$, dizemos que o limite está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Os teoremas introduzidos no capítulo 2 também não permitem calcular o $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{4x}}{2x+5}$ que está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

O teorema a seguir estabelece um método simples que usa a derivada para calcular esses limites chamado **regra de L'Hôpital**.

Teorema: (regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I.

Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

a) Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

b) Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

Se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Observações: 1 – A regra de L'Hôpital pode ser aplicada à determinação de limites laterais e de limites no infinito.

2 – Informalmente, a regra de L'Hôpital diz que, se sua tentativa de calcular o limite de um quociente levar às formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então calcule as derivadas do numerador e do denominador e tente novamente.

3 – A regra de L'Hôpital envolve a derivada do numerador e do denominador separadamente. Um erro comum é derivar o quociente inteiro usando a regra de derivação de quocientes.

Exemplos:

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 12x^3 + 5}{20x^4 + 6x^2 - 10x} = -\frac{1}{8}$$

2) $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25} = \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \frac{1/4}{10} = \frac{1}{40}$$

3) $$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2x}{x^2 - 8}}{-1} = -6$$

4) $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{4x}}{2x + 5} = \lim_{x\to \infty} \frac{4e^{4x}}{2} = \infty$$

5) $$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Algumas vezes, a aplicação da regra de L'Hôpital a uma forma indeterminada conduz a uma nova forma indeterminada. Quando isso acontece, uma segunda aplicação da regra pode ser necessária. Em alguns casos, é preciso aplicar a regra várias vezes para eliminar a indeterminação.

Exemplos:

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2) $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{x\to \infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{4e^{2x}}{6x} = \lim_{x\to \infty} \frac{8e^{2x}}{6} = \infty$$

Há casos em que a indeterminação persiste não importando quantas vezes a regra seja aplicada e outros recursos, além da regra de L'Hôpital, precisam ser utilizados para determinar o limite.

Por exemplo, o cálculo do $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$ leva à forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$

Aplicando a regra de L'Hôpital (duas vezes) obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3} \text{ (que continua indeterminado)}$$

Para determinar o limite, devemos fazer uma mudança de variável:

Seja $\dfrac{1}{x} = y$. Daí $\dfrac{1}{y} = x$

$$\text{Então : } \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{1/y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

A regra de L'Hôpital se aplica **somente** a limites associados a formas indeterminadas. Assim, é importante verificar se um dado quociente tem a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ antes de aplicar a regra de L'Hôpital. Sabemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{0}{1} = 0$. Observe que o cálculo desse limite **não** conduz a uma forma indeterminada e, portanto, a regra de L'Hôpital **não** se aplica na determinação do limite. Se aplicarmos (erradamente) a regra vamos obter:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = 1 \quad \text{(o que está errado)}$$

Exercícios de fixação:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{20x^3 - 5x^2 - 15x}{x^4 + 3x^2 - 4}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5}{4 - 7x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{e^{3x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1}$

5) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\ln\left(x/7\right)}{7 - x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2}{e^{2x} - 2x - 1}$

Respostas:

1) 7 / 2 2) $-\infty$ 3) 0 4) 1 / 2 5) $-1/7$ 6) 3

Exercícios – lista 9

Use a regra de L'Hôpital para determinar os limites abaixo:

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2-x-14}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-e^x+1}{x^3}$

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(2x-3)}{\ln(3x-5)}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(7+x)}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{4x}}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+2x-1}{x^3}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x+2}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4e^{-x}+4}{x^2+x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^3-5x+1}{\ln x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$

Respostas:

1) 5 / 13	6) – ∞	11) 2	16) 4
2) 32	7) 2 / 3	12) ∞	17) 0
3) 3	8) ∞	13) ∞	18) 7
4) – 3	9) 0	14) 1	19) 1 / 6
5) – 1 / 6	10) 0	15) 0	20) 2 / 3

3.10 – Derivadas de ordem superior

Muitas vezes precisamos calcular a taxa de variação da taxa de variação de uma grandeza. A aceleração, por exemplo, é a taxa de variação da velocidade com o tempo, mas a velocidade é a taxa de variação da distância com o tempo. Se a distância é medida em quilômetros e o tempo em horas, a velocidade é medida em quilômetro por hora e a aceleração é medida em quilômetro por hora ao quadrado.

A taxa de variação da função f(x) em relação a x é a derivada $f^{'}(x)$; da mesma forma, a taxa de variação da função $f^{'}(x)$ em relação a x é a derivada $(f^{'}(x))^{'}$. Para simplificar a notação, denotamos a derivada da derivada de f por $f^{''}$ e a chamamos de **derivada de segunda ordem** (ou derivada segunda) de f.

De modo geral, o resultado de duas ou mais derivações sucessivas de uma função é uma **derivada de ordem superior**.

A **derivada de enésima ordem** de uma função y = f(x) é obtida derivando-se a função n vezes e é denotada por:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}$$

Exemplo: Se a posição de um carro que está se movendo em linha reta é dada, no instante t por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$, calcule a velocidade e a aceleração do carro.

Solução: A velocidade é $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 4$

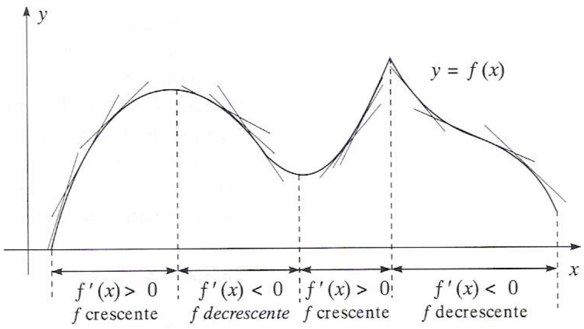
A aceleração é $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = 6t - 6$

Capítulo 4 – Construção de gráficos

Neste capítulo vamos usar a derivada para analisar as propriedades geométricas de uma função e traçar um gráfico que reflita suas características principais.

4.1 – Funções crescentes e decrescentes – Extremos relativos

Observamos na figura abaixo, que nos intervalos onde os coeficientes angulares das retas tangentes são positivos, a função é crescente, e que nos intervalos onde os coeficientes angulares das retas tangentes são negativos, a função é decrescente.



Podemos então descobrir onde uma função derivável f é crescente ou decrescente, verificando o sinal de sua derivada, já que f ′ fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de f. Onde f ′ > 0, a inclinação da reta tangente é positiva e f é crescente; onde f ′ < 0, a inclinação da reta tangente é negativa e f é decrescente.

Essas observações são estabelecidas no seguinte teorema, chamado de:

Teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes: Seja f uma função contínua em um intervalo aberto I.

a) Se f ′(x) > 0 para todo x em I então f é crescente em I

b) Se f ′(x) < 0 para todo x em I então f é decrescente em I

Para aplicar o teorema anterior, devemos determinar intervalos onde f ′ é sempre positiva ou sempre negativa. Sabemos que uma função contínua não muda de sinal a menos que ela seja igual a zero para algum valor de x (consequência do teorema do valor intermediário visto anteriormente). Isso sugere o seguinte procedimento para determinar os intervalos onde uma dada função é crescente ou decrescente:

1 – Calcule todos os valores de x onde f ′(x) = 0 ou f ′ é descontínua, e divida a reta real em intervalos abertos cujas extremidades são esses valores.

2 – Escolha um valor de teste k em cada intervalo I encontrado no passo 1 e determine f ′(k) (o sinal da derivada nesse ponto será o mesmo em todos os outros pontos do intervalo). Se verificarmos que f ′(k) > 0, ficamos sabendo que f ′(x) > 0 para todo x em I e que, portanto, f é crescente em I; se, por outro lado, f ′(k) < 0, ficamos sabendo que f ′(x) < 0 para todo x em I e que f é decrescente em I.

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^3 - 3x + 1$

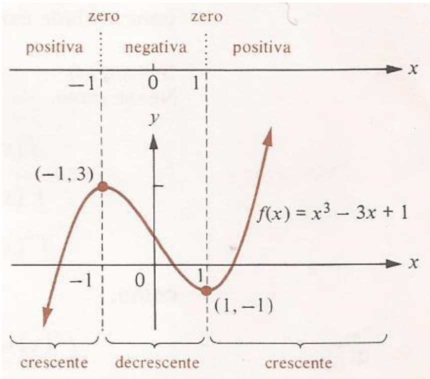
Temos que $f'(x) = 3x^2 - 3$

Então $f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Esses valores determinam três intervalos $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ e $]1, \infty[$.

Escolhendo, por exemplo, $x = -2$ no intervalo $]-\infty, -1[$ e substituindo na derivada, obtemos $f'(-2) = 9$. Tomando $x = 0$ em $]-1, 1[$ obtemos $f'(0) = -3$; tomando $x = 2$ em $]1, \infty[$ achamos $f'(2) = 9$. Consequentemente,

$f'(x) > 0$ em $]-\infty, -1[$
$f'(x) < 0$ em $]-1, 1[$
$f'(x) > 0$ em $]1, \infty[$



Portanto,

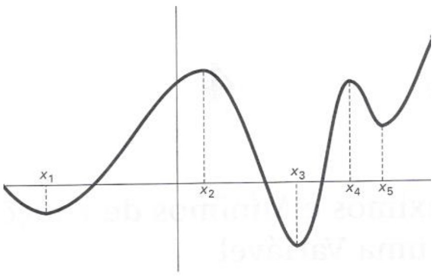
f é crescente em $]-\infty, -1[$
f é decrescente em $]-1, 1[$
f é crescente em $]1, \infty[$

Essas propriedades podem ser vistas no gráfico de f esboçado acima. Vemos também, que o ponto $(-1, 3)$ está "mais alto" do que qualquer outro ponto vizinho do gráfico de f. Um ponto como esse é chamado de **ponto de máximo relativo** (ou de **máximo local**) do gráfico de f.

Analogamente, o ponto $(1, -1)$ que está "mais baixo" do que qualquer outro ponto vizinho do gráfico de f é denominado **ponto de mínimo relativo** (ou de **mínimo local**) do gráfico de f.

Se uma função possui um máximo ou um mínimo relativo em um ponto P, dizemos que possui um **extremo relativo** (ou extremo local) em P.

Os pontos $(-1, 3)$ e $(1, -1)$ são exemplos de extremos relativos no sentido de que cada um deles representa um extremo apenas na vizinhança do ponto. Devemos considerar, portanto, que uma função pode admitir vários extremos relativos, isto é, vários mínimos e máximos relativos.



Quando conhecemos os intervalos nos quais uma função é crescente ou decrescente podemos identificar os seus máximos e mínimos relativos. Um **máximo relativo** ocorre quando a função para de crescer e começa a decrescer. Um **mínimo relativo** ocorre quando a função para de decrescer e começa a crescer.

Sabemos que uma função f é crescente em um intervalo aberto I quando $f'(x) > 0$ para todo x em I, e é decrescente em I quando $f'(x) < 0$ para todo x em I. Então os únicos pontos onde f pode ter extremos relativos são aqueles onde a derivada é nula ou não existe. Esses pontos são chamados de **pontos críticos**.

Definição: Um **ponto crítico** de uma função f é qualquer ponto c do domínio tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Assim, para encontrar todos os extremos relativos de uma função f, começamos achando todos os pontos críticos (que são os "candidatos" a extremos relativos). Cada ponto crítico precisa ser testado para verificar se é realmente um extremo relativo. Esse teste pode ser feito usando a derivada primeira de f.

Teste da derivada primeira para extremos relativos: Seja c um ponto crítico de f.

a) Se o sinal de f' muda de positivo para negativo em c então f possui um máximo relativo em c.

b) Se o sinal de f' muda de negativo para positivo em c então f possui um mínimo relativo em c.

Para a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dada no exemplo 1 vimos que:

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

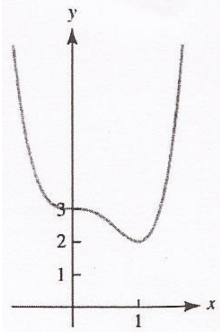
Então $x = -1$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f.

Vimos também que $f'(x) > 0$ em $]-\infty, -1[$
$f'(x) < 0$ em $]-1, 1[$
$f'(x) > 0$ em $]1, \infty[$

Daí, o sinal de f' muda de positivo para negativo em $x = -1$ e muda de negativo para positivo em $x = 1$. Logo, pelo teste da derivada primeira para extremos relativos, f possui um máximo relativo em -1 e um mínimo relativo em 1.

Nos exemplos a seguir, vamos determinar se existirem, os intervalos de crescimento e de decrescimento e os extremos relativos das funções dadas.

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$



Temos que $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$

Daí $f'(x) = 0 \leftrightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ (1)

Esses valores determinam três intervalos: $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, \infty[$.

Escolhendo $x = -1$ no intervalo $]-\infty, 0[$ e substituindo na derivada obtemos $f'(-1) = -24$. Fazendo $x = 1/2$ em $]0, 1[$, obtemos $f'(1/2) = -3/2$; fazendo $x = 2$ em $]1, \infty[$, achamos $f'(2) = 48$. Então,

$f'(x) < 0$ em $]-\infty, 0[$
$f'(x) < 0$ em $]0, 1[$ (2)
$f'(x) > 0$ em $]1, \infty[$

Portanto, f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e crescente em $]1, \infty[$.

Por (1) $x = 0$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f e por (2) vemos que o sinal da derivada muda de negativo para positivo em $x = 1$

Então f possui um mínimo relativo em $x = 1$.

Observação: Sabemos que se uma função f tem um extremo relativo, este deve ocorrer em um ponto crítico; entretanto, nem todo ponto crítico conduz a um extremo relativo. Vimos no exemplo anterior que $x = 0$ é um ponto crítico, mas não existe extremo relativo em $x = 0$.

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

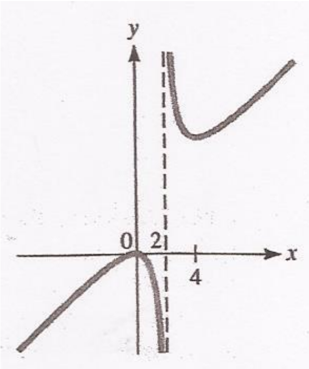
Usando a regra do quociente obtemos $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ que é uma função contínua em todos os números reais exceto em $x = 2$.

$f'(x) = 0 \leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$ (1)

Então f' é nula em $x = 0$ e em $x = 4$ e é descontínua em $x = 2$.

Esses números determinam quatro intervalos: $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$, $]2, 4[$ e $]4, \infty[$. Escolhendo números de teste nesses intervalos (por exemplo -1, 1, 3 e 5) obtemos $f'(-1) = 5/9$, $f'(1) = -3$, $f'(3) = -3$ e $f'(5) = 5/9$. Então,

$f'(x) > 0$ em $]-\infty, 0[$
$f'(x) < 0$ em $]0, 2[$
$f'(x) < 0$ em $]2, 4[$
$f'(x) > 0$ em $]4, \infty[$



Logo f é crescente em $]-\infty, 0[$ e $]4, \infty[$ e é decrescente $]0, 2[$ e $]2, 4[$.

Por (1) $x = 0$ e $x = 4$ são pontos críticos de f. Note que $f'(2)$ não existe, mas como 2 não pertence ao domínio de f, $x = 2$ não é ponto crítico de f.

Vemos acima que o sinal da derivada muda de positivo para negativo em $x = 0$ e de negativo para positivo em $x = 4$.

Então f possui um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = 4$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Temos que $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Então $f'(x) \neq 0$ para todo número real x e f' é descontínua em $x = 0$. (1)

Precisamos analisar, então, o sinal da derivada nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$.

Tomando $x = -1$ em $]-\infty, 0[$ obtemos $f'(-1) = -2/3$; tomando $x = 1$ em $]0, \infty[$ obtemos $f'(1) = 2/3$. Portanto,

$$f'(x) < 0 \text{ em }]-\infty, 0[\text{ e } f'(x) > 0 \text{ em }]0, \infty[\qquad (2)$$

Então f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e é crescente em $]0, \infty[$.

Por (1) $x = 0$ é o único ponto crítico de f (observe que $f'(0)$ não existe e 0 pertence ao domínio de f) e por (2) vemos que o sinal da derivada muda de negativo para positivo em $x = 0$. Logo f possui um mínimo relativo em $x = 0$.

A derivada segunda também pode ser usada para classificar os pontos críticos de uma função como máximos ou mínimos relativos.

Teste da derivada segunda para extremos relativos: Suponhamos que $f'(c) = 0$

a) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo relativo em $x = c$

b) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo relativo em $x = c$

Exemplo: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

A derivada primeira $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$ se anula em $x = -2$ e em $x = 1$ então esses são os pontos críticos de f. Para testar esses pontos, basta determinar a derivada segunda $f''(x) = 12x + 6$ e calcular seu valor em $x = -2$ e em $x = 1$. Como $f''(-2) = -18$ e $f''(1) = 18$ concluímos que f possui um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = 1$.

Embora tenha sido fácil usar o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos no exemplo anterior, ele apresenta algumas limitações. O teste se aplica aos pontos críticos nos quais a derivada primeira é nula, mas não aos pontos em que a derivada primeira não existe. Além disso, se $f'(c)$ e $f''(c)$ são nulas, o teste da derivada segunda é inconclusivo.

4.2 – Problemas de otimização

Nas aplicações, os valores extremos de uma função são chamados, às vezes, de **valores ótimos**, porque são, em certo sentido, os melhores ou os mais favoráveis valores da função em um determinado contexto. A tarefa de determinar esses valores constitui um **problema de otimização**.

Exemplos: 1) A receita, em reais, obtida com a produção e venda de x unidades de um produto é dada por $R(x) = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$. Determine o número de unidades que maximiza a receita.

Solução: Vamos determinar a derivada de R e calcular os pontos críticos.

$R'(x) = -3x^2 + 900x + 52.500$

$-3x^2 + 900x + 52.500 = 0 \therefore x^2 - 300x - 17.500 = 0 \therefore x = 350$ ou $x = -50$

A função R é definida para qualquer número real, mas faz sentido como função receita apenas para $x \geq 0$ e $R(x) \geq 0$. Então o único ponto crítico, nesse contexto, é $x = 350$.

Aplicando o teste da derivada primeira ou da derivada segunda para extremos relativos concluímos que o número de unidades que maximiza a receita é 350.

2) O lucro obtido com a produção e venda de certo produto é dado pela função

$$L(x) = -x^3 + 75x^2 - 1.800x - 1.000$$

Determine o valor de x que maximiza o lucro.

Solução: $L'(x) = -3x^2 + 150x - 1.800$

$-3x^2 + 150x - 1.800 = 0 \therefore x^2 - 50x + 600 = 0 \therefore x = 20$ ou $x = 30$

Calculando a derivada segunda de L encontramos $L''(x) = -6x + 150$.

Daí $L''(20) = 30$ e $L''(30) = -30$

Então, pelo teste da derivada segunda para extremos relativos, concluímos que o valor de x que maximiza o lucro é 30.

3) O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 0,1x^2 + 3x + 4000$. Para que valor de x o custo médio é mínimo?

Solução: O custo médio de fabricação de x unidades é dado por $C_m(x) = 0,1x + 3 + \dfrac{4.000}{x}$

Então $C_m^{'}(x) = 0,1 - \dfrac{4.000}{x^2}$

Daí, $0,1 - \dfrac{4.000}{x^2} = 0 \therefore 0,1x^2 - 4.000 = 0 \therefore 0,1x^2 = 4.000 \therefore x^2 = 40.000 \therefore x = \pm 200$

Aplicando o teste da derivada primeira ou da derivada segunda para extremos relativos concluímos que o número de unidades que minimiza o custo médio é 200.

4) A função demanda para um produto é dada por $p = 100 - 0,01x$ onde x é a quantidade demandada e p é o preço unitário em reais. Sabendo que $C(x) = 60x + 10.000$ é a função custo do mesmo produto, encontre o número de unidades que devem ser produzidas e vendidas para maximizar o lucro, o preço correspondente e o lucro para esse nível de produção.

Solução: A função receita é $R(x) = xp = x(100 - 0,01x) \therefore R(x) = 100x - 0,01x^2$

A função lucro é $L(x) = R(x) - C(x) = 100x - 0,01x^2 - (60x + 10.000) =$

$= 100x - 0,01x^2 - 60x - 10.000 \therefore L(x) = -0,01x^2 + 40x - 10.000$

Daí $L'(x) = -0,02x + 40$

Então $-0,02x + 40 = 0 \therefore 0,02 = 40 \therefore x = 2.000$

Assim, para maximizar o lucro devem ser produzidas e vendidas 2.000 unidades e o lucro para esse nível de produção é $L(2.000) = 30.000$

Da equação de demanda $p = 100 - 0{,}01x$ encontramos o preço correspondente a $x = 2.000$, isto é, $p = 100 - 0{,}01(2.000) = 80$

Portanto, devem ser produzidas 2.000 unidades que serão vendidas pelo preço unitário de R$ 80,00. O lucro para esse nível de produção será de R$ 30.000,00.

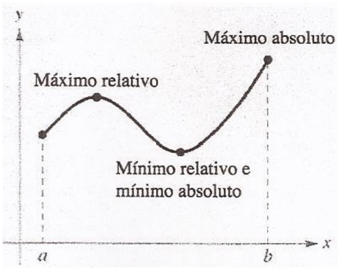
Em muitos problemas de otimização, o objetivo é encontrar o "mínimo absoluto" ou o "máximo absoluto" de uma função dentro de certo intervalo fechado de interesse.

Definição: Se f é uma função definida em um intervalo $[a, b]$ e $c \in [a, b]$ dizemos que:

a) f possui um **máximo absoluto** em c se, para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(c)$. Nesse caso, $f(c)$ é o **valor máximo absoluto** de f em $[a, b]$.

b) f possui um **mínimo absoluto** em c se, para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq f(c)$. Nesse caso, $f(c)$ é o **valor mínimo absoluto** de f em $[a, b]$.

c) f possui um **extremo absoluto** em c, se f tem um máximo absoluto ou um mínimo absoluto em c.



Podemos provar que se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$ então f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em algum ponto do intervalo. Além disso, se f é uma função contínua em $[a, b]$, um extremo absoluto de f ocorrerá num extremo relativo em $]a, b[$ (como o mínimo absoluto da figura) ou nas extremidades do intervalo (como o máximo absoluto da figura).

Então, para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua f em $[a, b]$ devemos:

1 – Achar todos os pontos críticos c de f em $]a, b[$

2 – Calcular todos os valores $f(c)$ para os pontos críticos do passo 1 e determinar $f(a)$ e $f(b)$.

3 – Selecionar o maior e o menor dos valores do passo 2. Esses são, respectivamente, os valores de máximo e mínimo absolutos de f em $[a, b]$.

Exemplo: Durante várias semanas, o departamento de trânsito vem registrando a velocidade dos veículos que passam em certo quarteirão. Os resultados mostram que entre 13h e 19h de um dia de semana, a velocidade nesse quarteirão é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após o meio dia. Em que instante entre 13h e 19h o trânsito é mais rápido? Em que instante é mais lento?

Solução: O objetivo é achar o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função v no intervalo $[1, 7]$.

Calculando a derivada $v'(t) = 3t^2 - 21t + 30$, achamos os pontos críticos: $t = 2$ e $t = 5$.

Determinando $v(t)$ para esses valores e para $t = 1$ e $t = 7$ (que são os extremos do intervalo) obtemos:

$v(1) = 40{,}5$ $\qquad$ $v(2) = 46$ $\qquad$ $v(5) = 32{,}5$ $\qquad$ $v(7) = 58{,}5$

Como o maior desses valores é 58,5 e o menor é 32,5 concluímos que o trânsito é mais rápido às 19h, quando os veículos passam no quarteirão com uma velocidade de 58,5 km/h e mais lento às 17h quando a velocidade é 32,5 km/h.

Exercícios de fixação:

1) O lucro obtido com a produção e venda de x milhares de unidades de certo produto é dado pela função $L(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 12x + 3$. Determine o número de unidades que maximiza o lucro.

2) O custo para produzir x unidades de um produto é $C(x) = x^3 - 10x^2 + 40x$. Determine o valor de x que resulta no custo médio mínimo.

3) O custo de produção em reais de x unidades de um produto é $C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 15$ e a receita obtida com a venda de x unidades é $R(x) = 28x$. Determine o lucro máximo.

4) O custo, em reais, para fabricar x unidades de um produto é $C(x) = -x^2 + 80x + 75$ e cada unidade é vendida por $200 - 3x$ reais. Determine a) o número de unidades que maximiza o lucro; b) o preço correspondente; c) o lucro para esse nível de produção.

Respostas:

1) 3.000	2) x = 5	3) R$ 85,00
4) a) 30 unidades	b) R$ 110,00	c) R$ 1.725,00

4.3 – Concavidade do gráfico de uma função

Vamos ver agora, que a derivada segunda de uma função f também pode ser usada para determinar a "concavidade" do gráfico de f. Para termos uma ideia do que isso significa, vamos analisar os gráficos esboçados nas figuras abaixo.

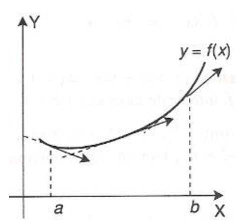


figura 1

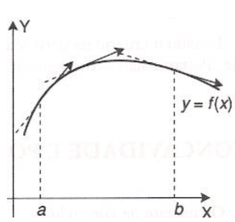


figura 2

Na figura 1, observamos que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no intervalo]a, b[aumenta quando x aumenta e que o gráfico de f é **côncavo** para cima em]a, b[.

Na figura 2, vemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f em]a, b[diminui quando x aumenta e que o gráfico de f é **côncavo** para baixo em]a, b[.

Essas considerações geométricas conduzem à seguinte definição:

Definição: Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I.
a) O gráfico de f **é côncavo** (ou tem **concavidade) para cima** em I, se f ′ é crescente em I.
b) O gráfico de f **é côncavo** (ou tem **concavidade**) **para baixo** em I, se f ′ é decrescente em I.

Para saber se o gráfico de uma função f é côncavo para cima ou para baixo em um intervalo aberto I, precisamos então descobrir se f ′ é crescente ou decrescente em I. Aplicando em f ′ o teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes concluímos que:

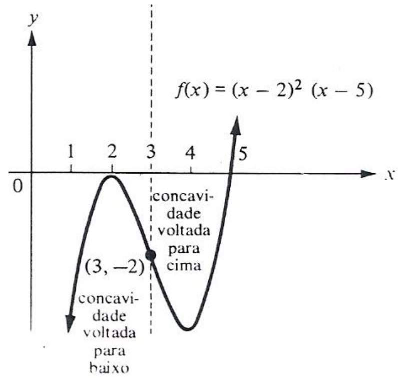
f ″ > 0 em I → f ′ é crescente em I → o gráfico de f é côncavo para cima em I
f ″ < 0 em I → f ′ é decrescente em I → o gráfico de f é côncavo para baixo em I

Temos o seguinte teorema:

Teste da derivada segunda para concavidade de um gráfico: Seja f uma função duas vezes derivável em um intervalo aberto I.

a) Se f ″(x) > 0 para todo x em I então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
b) Se f ″(x) < 0 para todo x em I então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Cada ponto do gráfico de uma função onde a concavidade muda é chamado de **ponto de inflexão**. Por exemplo, o ponto (3,–2) na figura ao lado é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x) = (x – 2)^2(x – 5)$.



Definição: Uma função f possui um **ponto de inflexão** em x = a se f é contínua em a e se a concavidade do gráfico de f muda em x = a.

Um procedimento análogo ao usado para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função pode ser usado para encontrar os intervalos de concavidade de uma função.

Exemplos:

1) $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x + 1$

Temos que $f'(x) = 3x^2 – 12x + 9$ e $f''(x) = 6x – 12$

$f''(x) = 0 \leftrightarrow 6x – 12 = 0 \leftrightarrow x = 2$. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 2[$ e $]2, \infty[$. Calculando o valor de f ″(x) para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2[$ e concavidade para cima em $]2, \infty[$.

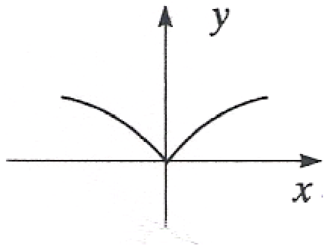
Como a concavidade do gráfico muda em x = 2 e f é contínua em 2 então f possui um ponto de inflexão em x = 2.

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

Calculamos $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$, que é uma função contínua em todos os números reais exceto em x = 1. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, \infty[$. Determinando o valor de f ″ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo]– ∞, 1[e concavidade para cima em]1, ∞[.

Como o gráfico de f só muda de concavidade em x = 1 e f não é contínua em x = 1, não existem pontos de inflexão.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

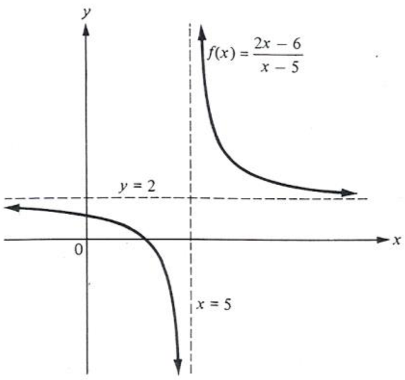


Calculamos $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, que é negativa e contínua em todos os números reais diferentes de zero. Então concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em]– ∞, 0[e em]0, ∞[.

Como a concavidade do gráfico de f não muda, não existem pontos de inflexão.

4.4 – Assíntotas horizontais e assíntotas verticais

Os limites que envolvem infinito podem ser usados para descrever retas conhecidas como **assíntotas**, que estão frequentemente associadas a gráficos de funções racionais.



Vamos considerar, por exemplo, o gráfico da função f esboçado ao lado.

O gráfico se aproxima da reta horizontal y = 2 quando x aumenta ou diminui ilimitadamente. Essa reta é chamada de **assíntota horizontal**. As assíntotas horizontais do gráfico de uma função f podem ser determinadas calculando:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Se algum desses limites existe (é um número real), então o valor do limite determina a assíntota horizontal.

O gráfico de uma função também pode se aproximar de uma reta vertical quando x se aproxima de um determinado número, como no gráfico acima. A reta x = 5 é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de f.

Definição: Seja f uma função real.

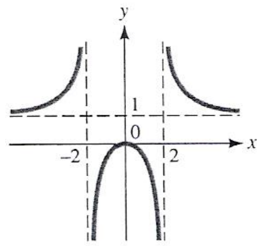
Se f tende para infinito (ou menos infinito) quando x tende para um número a pela direita ou pela esquerda, a reta x = a é uma **assíntota vertical** do gráfico de f.

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = b_1$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b_2$ onde b_1 e b_2 são números reais, as retas $y = b_1$ e $y = b_2$ são **assíntotas horizontais** do gráfico de f.

Observações: 1 – Para localizar as possíveis assíntotas verticais do gráfico de uma função racional f tal que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ devemos procurar valores de x tais que $q(x) = 0$ e $p(x) \neq 0$. Para achar as assíntotas horizontais devemos calcular os limites de f quando x tende para ∞ e quando x tende para $-\infty$. Se algum desses limites existe (é finito), então o valor do limite determina a equação da assíntota horizontal.

2 – As funções polinomiais não possuem assíntotas horizontais nem assíntotas verticais.

Exemplos: 1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

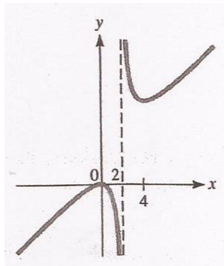


Solução: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$

Então x = 2 e x = – 2 são assíntotas verticais e y = 1 é assíntota horizontal

2) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

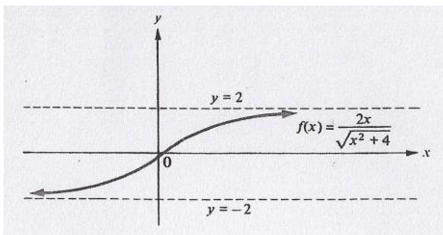


Solução: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x - 2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x - 2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x - 2} = \infty$

Então x = 2 é assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$



Solução: $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ para todo número real

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$

Não existem assíntotas verticais e y = 1 e y = – 1 são assíntotas horizontais

4.5 – Construção de gráficos

Para construir o gráfico de uma função f devemos determinar seu domínio, os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, a concavidade e verificar a existência de extremos relativos, pontos de inflexão e de assíntotas. Como o estudo dessas características foi realizado em várias etapas anteriores, vamos estabelecer um roteiro para o traçado do gráfico de uma função.

1 – Determine o domínio de f.

2 – Calcule f' e determine os pontos críticos (isto é, os valores de x onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe). Utilize o teste da derivada primeira para achar os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

3 – Calcule f'' e use o teste da derivada segunda para determinar os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

4 – Encontre, se existirem, os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão.

5 – Calcule os limites envolvendo infinito para determinar, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais.

6 – Represente, se necessário, alguns pontos adicionais para ajudar a identificar a forma do gráfico.

Exemplo 1: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1) O domínio de f é IR

2) Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Daí $f'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Esses valores determinam três intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ e $]3, \infty[$

Escolhendo, por exemplo, $x = 0$ no intervalo $]-\infty, 1[$ obtemos $f'(0) = 9$; tomando $x = 2$ em $]1, 3[$, obtemos $f'(2) = -3$; tomando $x = 4$ em $]3, \infty[$ achamos $f'(4) = 9$.

Então $f'(x) > 0$ em $]-\infty, 1[$
$f'(x) < 0$ em $]1, 3[$
$f'(x) > 0$ em $]3, \infty[$

Daí f é decrescente em $]1, 3[$ e crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]3, \infty[$.

3) Temos que $f''(x) = 6x - 12$

Daí $f''(x) = 0 \leftrightarrow x = 2$. Esse valor determina os intervalos $]-\infty, 2[$ e $]2, \infty[$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2[$ e concavidade para cima em $]2, \infty[$.

4) Vimos em (2) que o sinal de f' muda de positivo para negativo em $x = 1$ e muda de negativo para positivo em $x = 3$ então f possui um máximo relativo em $x = 1$ e um mínimo relativo em $x = 3$.

Como a concavidade do gráfico muda em $x = 2$ e f é contínua em 2 então possui um ponto de inflexão em $x = 2$.

Temos que f(1) = 5, f(3) = 1 e f(2) = 3

Marcamos os pontos (1, 5) (máximo relativo), (3, 1) (mínimo relativo) e (2, 3) (de inflexão).

5) O gráfico de f não possui assíntotas.

O gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ está esboçado na figura 1 abaixo.

Exemplo 2: $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

1) O domínio de f é IR – {2}

2) Calculando a derivada de f, obtemos $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$, que é contínua e negativa em todos os números reais diferentes de 2. Então f é decrescente em] – ∞, 2[e em]2, ∞[.

3) Temos que $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$, que é uma função contínua em todos os números reais, exceto em x = 2. Esse valor determina os intervalos] – ∞, 2[e]2, ∞[. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um desses intervalos concluímos que o gráfico de f tem concavidade para baixo] – ∞, 2[e concavidade para cima em]2, ∞[.

4) Sabemos que $f'(x) \neq 0$ para todos os números reais diferentes de 1 e que $f'(2)$ não existe mas, como 2 não pertence ao domínio de f, não existem pontos críticos. Logo, não existem extremos relativos.

Como o gráfico de f só muda de concavidade em x = 2 e f não é contínua em x = 2, não existem pontos de inflexão.

5) Temos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$. Então y = 0 é a equação da assíntota horizontal.

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{x-2} = \infty$, x = 2 é a equação da assíntota vertical do gráfico de f.

6) Para ajudar a identificar a forma do gráfico vamos marcar os pontos (–2, – 1), (0, – 2), (1, – 4), (3, 4), (4, 2) e (6, 1).

O gráfico $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ está esboçado na figura 2.

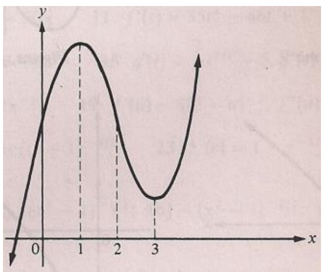


Figura 1

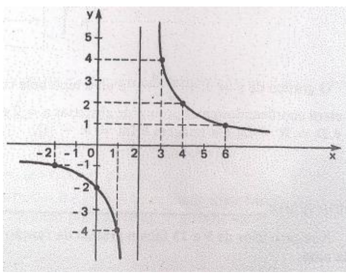


Figura 2

Exercícios – lista 10

1) O custo total da fabricação de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 4x^2 - 240x + 9.000$. Determine o valor de x que resulta no custo mínimo.

2) $C(x) = 0,001x^2 + 0,02x + 500$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto e cada unidade é vendida por R$ 8,00. Determine o número de unidades que maximiza o lucro.

3) Ache a quantidade x que maximiza o lucro, sabendo que a receita e o custo são, respectivamente, $R(x) = 5x - 0,003x^2$ e $C(x) = 1,1x + 300$

4) Sabendo que $C(x)\ 2x^2 - 15x + 3.200$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto, determine o valor de x que resulta no custo médio mínimo.

5) As funções custo e receita de x unidades de um produto são $C(x) = 10 + 2x$ e $R(x) = 50x - 0,1x^2$. Determine o lucro máximo.

6) Uma fábrica produz estantes a um custo de R$ 80,00 a unidade. Estima-se que se as estantes forem vendidas por x reais a unidade, aproximadamente $100 - x$ unidades serão vendidas por mês. Ache o preço ótimo de venda.

7) A função demanda de certo produto é dada por $q = -6p + 780$ onde q é a quantidade demandada e p o preço unitário. Escreva a receita como função de p e determine o preço que resulta na receita máxima.

8) A função demanda para um produto é dada por $p = 4 - 0,0002x$ onde p é o preço unitário em reais e x é a quantidade demandada. O custo da produção de x unidades é dado pela função $C(x) = 600 + 3x$. Determine o número de unidades que maximiza o lucro e o preço unitário correspondente.

9) O número de sócios de uma clube, x anos após sua fundação no ano de 2.000 é dada pela função $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$.
a) Em que ano, entre 2001 e 2015, o clube teve o maior número de sócios? Qual foi esse número?
b) Em que ano, entre 2001 e 2015, o clube teve o menor número de sócios? Qual foi esse número?

10) Estima-se que entre 12h e 19h, a velocidade média dos carros em certa rua é dada pela função $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 45$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após as 12h.
a) Em que instante entre 12h e 19h o tráfego é mais rápido? Qual é a velocidade nesse instante?
b) Em que instante entre 12h e 19h o tráfego é mais lento? Qual é a velocidade nesse instante?

Respostas:

1) $x = 30$	2) 3.990 unidades	3) $x = 650$	4) $x = 40$
5) R$ 5.750,00	6) R$ 90,00	7) R$ 65,00	8) 2500 unidades; R$ 3,50
9) a) 2011; 12.100 sócios		b) 2015; 58.500 sócios	
10) a) 13h e 19h; 52 km/h		b) 17h; 20 km/h	

Exercícios – lista 11

Nas questões de 1 a 6, faça um esboço do gráfico de f, determinando:
a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.
b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima.
c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f.

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

3) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$

4) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

5) $f(x) = x^3 - 3x^2$

6) $f(x) = x^3$

Nas questões 7 a 12, determine, se existirem: a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente; b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima; c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f; d) as equações das assíntotas verticais e das assíntotas horizontais. Faça um esboço do gráfico de f.

7) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-8}{(x-2)^3}$

8) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$

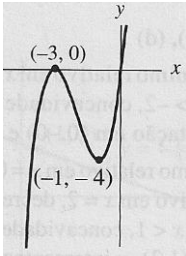
9) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

10) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

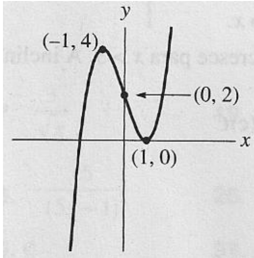
11) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

12) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}$

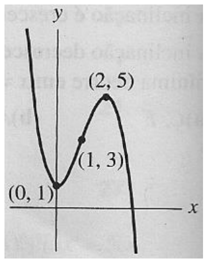
Respostas:



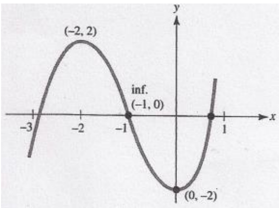
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$



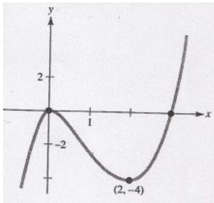
$f(x) = x^3 – 3x + 2$



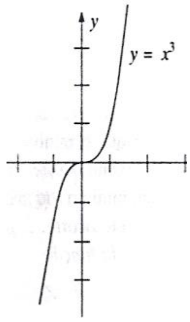
$f(x) = 1 + 3x^2 – x^3$

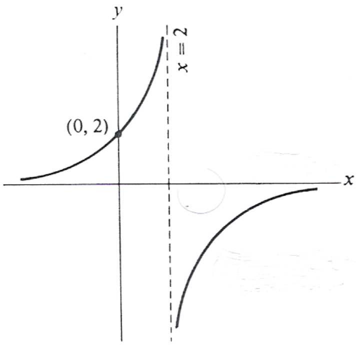


$f(x) = x^3 + 3x^2 – 2$

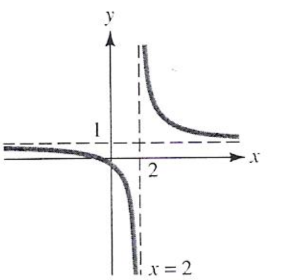


$f(x) = x^3 – 3x^2$

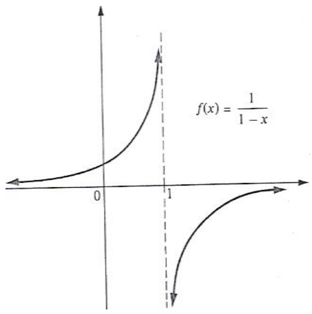


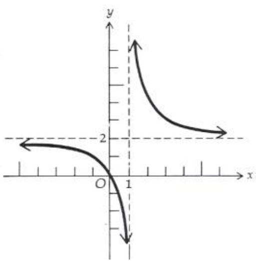


$f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$

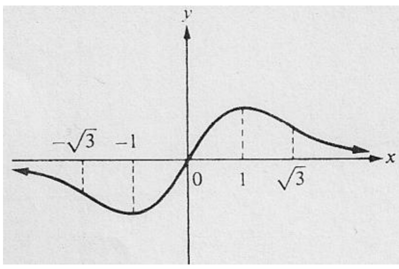


$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

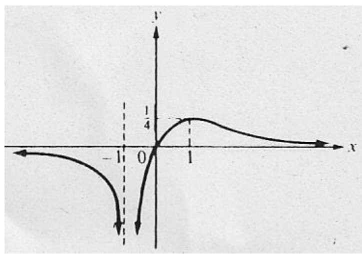




$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$



$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$



$f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Capítulo 5 – Integral

Neste capítulo vamos estudar a "antiderivação", que inverte o processo de derivação e permite encontrar todas as funções que têm uma dada função como derivada. Também vamos mostrar que com a antiderivação podemos solucionar "equações diferenciais" e que a integral definida surge de modo natural quando consideramos o problema de calcular a área de regiões do plano xy.

O resultado principal estabelecido nesse capítulo é o "teorema fundamental do cálculo" que possibilita achar valores exatos de integrais definidas utilizando uma antiderivada. Assim, além de constituir um importante processo de cálculo, o teorema fundamental mostra que existe uma relação entre derivadas e integrais.

5.1 – Antiderivada – Integral indefinida

Nos exemplos e problemas estudados anteriormente, começamos com uma função dada e calculamos a derivada para obter informações a respeito da função. Em muitas situações, no entanto, o problema é o inverso: conhecemos a derivada de uma função e estamos interessados em determinar a função. Isso acontece, por exemplo, quando sabemos a taxa com a qual uma população está aumentando e queremos calcular qual será a população em um determinado instante futuro. A função encontrada nesse problema é uma **antiderivada**.

Definição 1: Uma função g é uma **antiderivada** (ou primitiva) de uma função f em um intervalo I, se $g'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Se considerarmos, por exemplo, a função $f(x) = 3x^2$, é fácil verificar que $g(x) = x^3$ é uma antiderivada de f, pois $g'(x) = 3x^2$

Dizer que g é uma antiderivada de f equivale a dizer que f é a derivada de g, mas agora pensamos em f como a função dada e em g como a função a ser encontrada. O processo de encontrar uma antiderivada é conhecido como **antiderivação**.

A antiderivada de uma função não é única. De fato, as funções

$$g_1(x) = x^3 + 5 \qquad g_2(x) = x^3 - \sqrt{2} \qquad g_3(x) = x^3 + \frac{4}{7}$$

também são antiderivadas de $f(x) = 3x^2$, pois suas derivadas são iguais a f.

Note que qualquer função do tipo $h(x) = x^3 + C$ onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f. Podemos então estabelecer o seguinte resultado:

Teorema: Seja g uma antiderivada de f em um intervalo I.

Se h é outra antiderivada de f em I então existe uma constante C tal que $h(x) = g(x) + C$ para todo x em I.

Assim, quando achamos uma antiderivada g de uma função f, encontramos uma infinidade de antiderivadas de f e todas da forma g + C onde C é uma constante.

Ao considerarmos todas as antiderivadas de uma dada função f é conveniente introduzirmos uma nova terminologia e uma nova notação, como se segue:

Definição 2: A **integral indefinida** de f, indicada por $\int f(x)\,dx$, é a família de todas as antiderivadas de f. Assim, se g é uma antiderivada de f e C é uma constante arbitrária, então

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C$$

Nessa definição f(x)dx é chamado de **integrando** e C de **constante de integração**.

Daremos razões, mais adiante, para o uso da diferencial dx que aparece no integrando. No momento vamos considerar que o símbolo dx indica que a antiderivada deve ser calculada em relação à variável x.

Para o exemplo dado escrevemos $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$

Usando os resultados do capítulo 3, podemos obter as integrais indefinidas das principais funções que decorrem imediatamente das respectivas regras de derivação.

Regras básicas de antiderivação

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) Se a é um número real então $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

3) $\int dx = x + C$

4) Se $n \in Q$ e $n \neq -1$ então $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Observação: A regra 1 pode ser estendida a qualquer número finito de parcelas.

Exemplos:

1) $\int (x^2+5)\,dx = \int x^2\,dx + 5\int dx = \dfrac{x^3}{3} + C_1 + 5(x + C_2) = \dfrac{x^3}{3} + 5x + C$ onde $C = C_1 + 5C_2$

Na prática, quando as regras básicas são usadas para calcular integrais indefinidas, as constantes individuais de integração podem ser combinadas em uma única constante. Assim, a solução acima pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\int (x^2+5)\,dx = \int x^2\,dx + 5\int dx = \frac{x^3}{3} + 5x + C$$

2) $\int \left(6x^3 - 7\sqrt{x} + \frac{5}{x^6}\right) dx = \int \left(6x^3 - 7x^{1/2} + 5x^{-6}\right) dx = 6\int x^3\, dx - 7\int x^{1/2}\, dx + 5\int x^{-6}\, dx =$

$= 6\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^{3/2}}{3/2} + 5\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{3x^4}{2} - \frac{14x^{3/2}}{3} - \frac{1}{x^5} + C$

3) $\int \frac{2x^7 + 5x^3 + 4x^2 - 6x}{2x^3}\, dx = \int \left(x^4 + \frac{5}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx =$

$= \int x^4\, dx + \frac{5}{2}\int dx + 2\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-2}\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5}{2}x + 2\ln|x| - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{5x}{2} + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$

4) $\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-1/2} dx - 5\int x^{2/3}\, dx =$

$= \frac{1}{2}\ln|x| + 3\frac{x^{1/2}}{1/2} - 5\frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{1}{2}\ln|x| + 6\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^5} + C$

Exercícios de fixação:

1) $\int (5x^4 + 2x^3 - 4x + 1)\, dx$

2) $\int (x^2 + 5)(8x - 3)\, dx$

3) $\int (3x + 2)^2\, dx$

4) $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2}\, dx$

5) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + 2}{x^2}\, dx$

6) $\int \left(\frac{7}{x} + 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right) dx$

Respostas:

1) $x^5 + \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C$

2) $2x^4 - x^3 + 20x^2 - 15x + C$

3) $3x^3 + 6x^2 + 4x + C$

4) $\frac{x^2}{2} - 2x + C$

5) $x^3 + 5x - \frac{2}{x} + C$

6) $7\ln|x| + 4\sqrt{x^3} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

Exercícios - lista 12

Use as regras básicas para calcular as integrais abaixo:

1) $\int (3x^2 - 4x - 5)\ dx$

2) $\int (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)\ dx$

3) $\int (2x^3 - 4x^2 - 5x + 6)\ dx$

4) $\int (2x^3 - 1)(x^2 + 5)\ dx$

5) $\int (3x^2 - 5\sqrt{x} + 2)\ dx$

6) $\int (4x^2 + 3)^2\ dx$

7) $\int (x^2 + 3x + x^{-2})\ dx$

8) $\int (3x^{-2} + 5x^{-4})\ dx$

9) $\int (25x^3 - 1)x^{-1/2}\,dx$

10) $\int \left(\sqrt{x^7} + 5\sqrt[4]{x}\right)\ dx$

11) $\int \dfrac{x^3 + 2x - 7}{x}\ dx$

12) $\int \left(3x^2 - 6x + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{5}\right)\ dx$

13) $\int \dfrac{3x^5 - x^4 + 7x^3 + 4x}{x^3}\ dx$

14) $\int \dfrac{9x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{x^2}\ dx$

Respostas:

1) $x^3 - 2x^2 - 5x + C$

2) $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 4x + C$

3) $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + C$

4) $\dfrac{x^6}{3} + \dfrac{5x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} - 5x + C$

5) $x^3 - \dfrac{10}{3}x^{3/2} + 2x + C$

6) $\dfrac{16x^5}{5} + 8x^3 + 9x + C$

7) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x^{-1} + C$

8) $-3x^{-1} - \dfrac{5}{3}x^{-3} + C$

9) $\dfrac{50}{7}x^{7/2} - 2x^{1/2} + C$

10) $\dfrac{2}{9}x^{9/2} + 4x^{5/4} + C$

11) $\dfrac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + C$

12) $x^3 - 3x^2 + 4\ln|x| + \dfrac{2}{5}x + C$

13) $x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 7x - 4x^{-1} + C$

14) $3x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln|x| + x^{-1} + C$

5.2 – Aplicações da integral indefinida

Os problemas de integrais indefinidas também podem ser expressos na forma de **equações diferenciais**. Equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas (ou diferenciais). A solução de uma equação diferencial é uma função ou família de funções que satisfazem a equação.

O tipo mais simples de equação diferencial tem a forma $y' = f(x)$ na qual a derivada de uma função é dada explicitamente como uma função da variável independente.

O exemplo a seguir é equivalente ao exemplo 1 da seção anterior, mas escrito na forma de uma equação diferencial.

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial $y' = x^2 + 5$

A solução desta equação é a integral do exemplo 1 anterior, isto é, $y = \int (x^2 + 5)\, dx$

Então $y = \dfrac{x^3}{3} + 5x + C$

Uma solução desta forma, que envolve uma constante arbitrária e inclui todas as soluções possíveis, é chamada de **solução geral** da equação diferencial.

Embora haja infinitas soluções para a equação diferencial $y' = x^2 + 5$, podemos obter uma **solução particular** especificando o valor que a função deve assumir em certo ponto.

Sabendo, por exemplo, que $y = 4$ quando $x = 3$ obtemos da solução geral do exemplo 1,

$y = \dfrac{x^3}{3} + 5x - 20$ que é uma solução particular da equação diferencial dada.

Exemplo 2: Ache a solução geral da equação diferencial $y' = 3x^2 + 5x - 7$ e determine a solução particular sabendo que $y = -2$ quando $x = 1$.

Solução: Temos que $y = \int (3x^2 + 5x - 7)\, dx = 3\dfrac{x^3}{3} + 5\dfrac{x^2}{2} - 7x + C$

Então a solução geral da equação dada é: $y = x^3 + \dfrac{5x^2}{2} - 7x + C$ (1)

Substituindo $y = -2$ e $x = 1$ em (1) obtemos: $1 + \dfrac{5}{2} - 7 + C = -2 \therefore C = \dfrac{3}{2}$

Logo, a solução particular é $y = x^3 + \dfrac{5x^2}{2} - 7x + \dfrac{3}{2}$

Exemplo 3: O custo marginal da produção de x unidades de um produto é dado por $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$. O custo total de produzir duas unidades é R$ 900,00. Qual o custo total de produção 5 unidades?

Solução: $C(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\ dx \ \therefore\ C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + K$

Sabemos que $C(2) = 900$ então $8 - 120 + 800 + K = 900$. Daí $K = 212$

Logo $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$ e daí $C(5) = 1.587$, isto é, o custo total de produção de 5 unidades é R$ 1.587,00.

Exemplo 4: O lucro marginal de uma empresa é $100 - 2x$ (reais por unidade) para x unidades fabricadas. Se o lucro é R$ 700,00 para 10 unidades fabricadas, qual o maior lucro possível?

Solução: Seja $L'(x)$ o lucro marginal para x unidades fabricadas. Assim $L'(x) = 100 - 2x$.

Daí $L(x) = \int (100 - 2x)\ dx \ \therefore\ L(x) = 100x - x^2 + C$

Sabemos que $L(10) = 700$. Então $1.000 - 100 + C = 700 \ \therefore\ C = -200$

Assim, a função lucro é $L(x) = 100x - x^2 - 200$

Calculamos, então, $L'(x) = 0 \ \therefore\ 100 - 2x = 0 \ \therefore\ x = 50$ (quantidade que maximiza o lucro) e determinamos $L(50) = 2.300$.

Logo, o lucro máximo é R$ 2.300,00.

Exercícios de fixação:

1) O lucro marginal de uma empresa para certo produto é $L'(x) = -3x^2 + 16x + 1$ (reais por unidade) onde x é o número de unidades fabricadas e vendidas. Se o lucro com a produção e venda de 3 unidades deste produto é R$ 40,00, determine a função lucro para x unidades.

2) O custo marginal da fabricação de x unidades de um produto é dado por $C'(x) = 0,08x + 3$ e o custo fixo é R$ 1.000,00. Determine o custo total de fabricação de 100 unidades.

3) O lucro marginal de uma empresa que produz e vende certo produto é $L'(x) = -0,2x + 50$ onde x é o número de unidades vendidas por dia. Quando 100 unidades são produzidas e vendidas, o lucro da empresa é R$ 1.500,00. Determine o lucro da empresa para o nível de produção e vendas de 200 unidades.

Respostas:

1) $L(x) = -x^3 + 8x^2 + x - 8$ 2) R$ 1.700,00 3) R$ 3.500,00

Exercícios – lista 13

1) Determine a solução da equação diferencial $y' = x^4 + 2x^2 - x^{-2}$

2) Ache a solução particular da equação diferencial $y' = x^3 + \dfrac{4}{x^2}$ sabendo que y = 7 quando x = 2.

3) A receita marginal (em reais por unidade) associada à fabricação de x unidades de determinado produto é $R'(x) = 240 - 4x$. Supondo que R(0) = 0 determine o preço unitário quando estão sendo produzidas 5 unidades.

4) A função custo marginal para fabricar certo produto é $C'(x) = 3x^2 - 60x + 900$ para $0 \le x \le 30$ e o custo fixo é R$ 1.000,00. Calcule o custo para fabricar 30 unidades do produto.

5) O lucro marginal de uma empresa que produz e vende x unidades de um produto por semana é $L'(x) = 15 - 0{,}01x$. Nas semanas em que não é vendida nenhuma unidade, a empresa tem um prejuízo de R$ 1.000,00. Qual será o lucro da empresa se vender 1.000 unidades em uma semana?

6) O custo marginal da produção de x unidades de um produto é dado por 6x + 1. O custo total de produzir uma unidade é R$ 130,00. Qual o custo total de produzir 10 unidades?

7) O valor de revenda de certa máquina industrial decresce a uma taxa que varia com o tempo, durante um período de 10 anos. Quando a máquina tem t anos de uso, a taxa na qual seu valor está variando é de 220(t – 10) reais por ano. Se a máquina valia R$ 12.000,00 quando nova qual será seu valor com 10 anos de uso?

8) Um fabricante sabe que, se x unidades de certo artigo são fabricadas por semana, o custo marginal é dado por $C'(x) = 0{,}3x - 11$. O preço de venda está fixado em R$19,00 por unidade e o custo fixo semanal é de R$ 200,00. Ache o lucro total máximo que pode ser obtido por semana.

9) O custo marginal de uma empresa é dado por $C'(x) = 80 - 4x$ reais por unidade, quando são fabricadas x unidades. Sabe-se que o custo da empresa é R$ 500,00 quando são fabricadas 5 unidades. Determine o custo de fabricação de 20 unidades.

10) O lucro marginal de uma fábrica que produz e vende certo produto é $L'(x) = 3x^2 - 2x - 17$ onde x é o número de unidades. Sabe-se que a fábrica perderá R$ 100,00 se vender apenas duas unidades. Determine o lucro da fábrica com a produção e venda de 10 unidades.

Respostas:

1) $y = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$

2) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{x} + 5$

3) R$ 230,00

4) R$ 28.000,00

5) R$ 9.000,00

6) R$ 436,00

7) R$ 1.000,00

8) R$ 1300,00

9) R$ 950,00

10) R$ 660,00

5.3 – Integração por Substituição

Existem várias técnicas para escrever uma integral em uma forma à qual se aplique uma ou mais das regras básicas.

Queremos calcular, por exemplo, $\int 3(3x+4)^9\,dx$ (1)

Podemos expandir a expressão $(3x + 4)^9$ e, em seguida integrar termo a termo (mas isso seria muito trabalhoso). Então vamos tentar simplificar a integral fazendo uma mudança de variável.

Seja u = 3x + 4. Daí du = 3dx

Substituindo estas expressões em (1) obtemos:

$$\int 3(3x+4)^9\,dx = \int (3x+4)^9 3\,dx = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C \qquad (2)$$

Substituindo u por 3x + 4 em (2) temos nosso resultado:

$$\int 3(3x+4)^9\,dx = \frac{(3x+4)^{10}}{10} + C$$

Como a variável x foi substituída por uma nova variável, esta maneira de calcular integrais indefinidas é conhecida como **integração por substituição ou mudança de variável.**

A justificativa do procedimento usado no exemplo anterior é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para derivação.

Teorema: Seja h uma função derivável de variável x e seja g uma antiderivada de f. Então, se u = h(x),

$$\int f(h(x))h'(x)dx = \int f(u)du = g(u) + C = g(h(x)) + C$$

Exemplos:

1) $\int \sqrt{5x+8}\,dx$

Solução: Seja u = 5x + 8

Daí du = 5dx. Então $dx = \frac{1}{5}du$

Logo $\int \sqrt{5x+8}\,dx = \int \sqrt{u}.\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^{1/2}du = \frac{1}{5}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{15}\sqrt{u^3} = \frac{2}{15}\sqrt{(5x+8)^3} + C$

2) $\int x(3x^2+1)^8\,dx$

Solução: Seja $u = 3x^2 + 1$

Daí du = 6xdx. Então xdx = $\frac{1}{6}$ du

Logo $\int x(3x^2+1)^8\,dx = \int (3x^2+1)^8 xdx = \int u^8 \frac{1}{6} du = \frac{1}{6}\int u^8\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^9}{9} = \frac{(3x^2+1)^9}{54} + C$

3) $\int \frac{18x^2dx}{(2x^3+7)^4}$

Solução: Seja u = $2x^3$ + 7

Daí du = $6x^2$dx. Então 3du = $18x^2$dx

Logo $\int \frac{18x^2dx}{(2x^3+7)^4} = \int (2x^3+7)^{-4}\,18x^2dx = \int u^{-4}\,3du = 3\int u^{-4}\,du = 3\frac{u^{-3}}{-3} = -\,u^{-3} =$

$= -\frac{1}{u^3} = -\frac{1}{(2x^3+7)^3} + C$

4) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

Solução: Seja u = x – 1. Daí du = dx (1)

Da primeira igualdade em (1) temos: x = u + 1 $\therefore$ $x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

Então $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2+2u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u^{5/2}+2u^{3/2}+u^{1/2})\,du =$

$\frac{u^{7/2}}{7/2} + 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + 2u^{3/2} = \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$

Exercícios de fixação:

1) $\int x^2(2x^3+1)^7\,dx$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+5}}$

3) $\int \frac{15x^2dx}{(x^3+2)^5}$

4) $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Respostas:

1) $\frac{1}{48}(2x^3+1)^8 + C$

2) $\frac{\sqrt{4x^2+5}}{4} + C$

3) $\frac{-5}{4(x^3+2)^4} + C$

4) $\frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$

Exercícios - lista 14

Calcule as integrais:

1) $\int (4x+3)^4\,dx$

2) $\int x(4x^2+7)^9\,dx$

3) $\int 4x\sqrt{x^2+5}\,dx$

4) $\int 3x(4-3x^2)^{-8}\,dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2+16}}\,dx$

6) $\int \frac{8x+2}{(4x^2+2x+6)^{17}}\,dx$

7) $\int \frac{6x^2}{(x^3+1)^3}\,dx$

8) $\int \frac{x-3}{(x^2-6x+1)^2}\,dx$

9) $\int (2x^2-1)(6x^3-9x+1)^{-3/2}\,dx$

10) $\int (x^2+3x+5)^8(18x+27)\,dx$

11) $\int x(x+1)^{-1/2}dx$

12) $\int x(5-x)^{1/2}dx$

Respostas:

1) $\frac{(4x+3)^5}{20}+C$

2) $\frac{\left(4x^2+7\right)^{10}}{80}+C$

3) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$

4) $\frac{1}{14(4-3x^2)^7}+C$

5) $\frac{3}{20}\,(5x^2+16)^{2/3}+C$

6) $\frac{-1}{16}\,(4x^2+2x+6)^{-16}+C$

7) $-(x^3+1)^{-2}+C$

8) $\frac{-1}{2}(x^2-6x+1)^{-1}+C$

9) $-\frac{2}{9}(6x^3-9x+1)^{-1/2}+C$

10) $(x^2+3x+5)^9+C$

11) $\frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}+C$

12) $-\frac{10}{3}(5-x)^{3/2}+\frac{2}{5}(5-x)^{5/2}+C$

5.4 – Integração por Partes

Nesta seção vamos estudar uma técnica que pode ser usada para integrar produtos nos quais um dos fatores pode ser facilmente integrado e o outro se tornar mais simples ao ser derivado. Essa técnica, conhecida como **integração por partes**, é uma consequência direta da regra do produto para diferenciais. A fórmula de integração por partes é apresentada a seguir.

Sejam u e v funções de variável x

Sabemos que $d(uv) = udv + vdu$

Ou, equivalentemente, $udv = d(uv) - vdu$

Integrando os membros dessa equação temos: $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

Ou ainda, $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ (1)

A equação (1) é chamada de **fórmula para integração por partes**.

Esta fórmula transforma o problema do cálculo de $\int udv$ no cálculo de $\int vdu$. Através de uma escolha conveniente de u e dv pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira.

Na fórmula acima, deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas as constantes podem ser representadas por uma única constante que será introduzida no final do processo.

Exemplos:

1) $\int x \ln x \, dx$

Solução: Como ln x não pode ser integrado usando as regras dadas até agora vamos fazer:

$$u = \ln x \quad \text{e} \quad dv = x\,dx$$

de modo que $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

Então $\int x \ln x \, dx = \int (\ln x)\, x dx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x \ln x \, dx = uv - \int vdu = (\ln x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

2) $\int x\, e^{4x} dx$

Solução: Nesse caso, os dois fatores x e e^{4x} são fáceis de integrar. Ambos também são fáceis de derivar, mas a derivação simplifica x e não simplifica e^{4x}. Assim, vamos fazer:

$$u = x \text{ e } dv = e^{4x}dx$$

Daí $du = dx$ e $v = \int e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} e^{4x}$

Então $\int x\, e^{4x} dx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x\, e^{4x} dx = uv - \int vdu = x.\ \frac{1}{4} e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x}\, dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}\, dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$$

Às vezes, a integração por partes leva a uma nova integral que também pode ser integrada por partes.

Exemplo: $\int x^2 e^x\, dx$

Solução: Vamos fazer $u = x^2$ e $dv = e^x dx$

Daí $du = 2x\, dx$ e $v = \int e^x\, dx = e^x$

Então $\int x^2 e^x\, dx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x^2 e^x\, dx = uv - \int vdu = x^2\, e^x - \int 2xe^x\, dx \qquad (1)$$

Para achar a $\int 2xe^x\, dx$ também precisamos utilizar a integração por partes. Nesse caso, seja $u = 2x$ e $dv = e^x dx$. Então $du = 2\, dx$ e $v = e^x$

Logo $\int 2xe^x\, dx = 2x\, e^x - \int e^x\, 2dx = 2x\, e^x - 2\int e^x dx = 2x\, e^x - 2\, e^x$

Daí e de (1) $\int x^2 e^x\, dx = x^2\, e^x - (2x\, e^x - 2\, e^x) = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + C$

Algumas integrais podem ser calculadas por integração por partes ou por substituição. As soluções podem parecer diferentes, mas se estiverem corretas, poderão diferir, no máximo, por uma constante.

Exemplo: $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Fazendo u = x e dv = $\sqrt{x+5}$, temos que du = dx e v = $\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$

Então, usando o método de integração por partes, achamos:

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$$

Fazendo u = x + 5, dx = du e x = u – 5 e utilizando o método de integração por substituição, encontramos:

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

Observe que $\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4}{15}(x+5)\right) =$

$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4x}{15} - \frac{20}{15}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{10x}{15} - \frac{4x}{15} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) =$

$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{5} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2}{5}(x+5) - \frac{10}{3}\right)$

$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}$

Exercícios de fixação:

1) $\int \ln 2x^2 dx$

2) $\int 6x\, e^{-2x} dx$

Respostas:

1) $x \ln 2x^2 - 2x + C$

2) $-3x e^{-2x} - \frac{3}{2} e^{-2x} + C$

Exercícios – lista 15

Use o método de integração por partes para calcular as integrais abaixo:

1) $\int \ln x \, dx$

2) $\int x\, e^{x} dx$

3) $\int x \ln 3x \, dx$

4) $\int x\, e^{-2x} dx$

5) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

6) $\int x^{-2} \ln x \, dx$

7) $\int x\, e^{x/2} dx$

8) $\int x^{2} \ln x^{2} \, dx$

9) $\int 5x\, e^{3x} dx$

10) $\int 3x^{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Respostas:

1) $x \ln x - x + C$

2) $x\, e^{x} - e^{x} + C$

3) $\frac{x^2}{2} \ln 3x - \frac{x^2}{4} + C$

4) $\frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$

5) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$

6) $\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

7) $2x\, e^{x/2} - 4\, e^{x/2} + C$

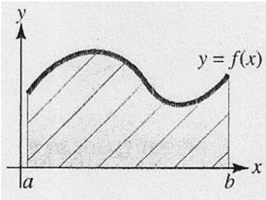
8) $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$

9) $\frac{5}{3} x\, e^{3x} - \frac{5}{9} e^{3x} + C$

10) $x^3 \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + C$

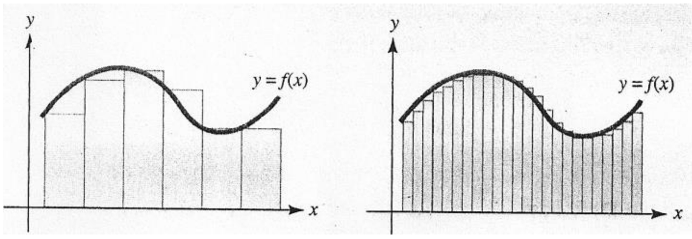
5.5 – Noção intuitiva de integral definida – Áreas de regiões planas

No capítulo 3 usamos um problema de velocidade para introduzir a derivada, que é a ideia central do Cálculo Diferencial. Nesta seção, começaremos com um problema de área para formular a ideia de integral definida, que é o conceito básico do Cálculo Integral.



Vamos considerar uma função f contínua em um intervalo [a, b] e supor que $f(x) \geq 0$ nesse intervalo. Queremos calcular a área A sob o gráfico de f entre x = a e x = b, isto é, a região delimitada pela curva y = f(x), as retas x = a e x = b e pelo eixo x.

Para determinar essa área, vamos dividir a região dada em uma série de regiões retangulares e calcular o valor aproximado da área A somando as áreas dessas regiões retangulares. Quanto maior o número de retângulos, mais a soma de suas áreas se aproxima do que consideramos, intuitivamente, a área sob a curva dada.



A área A pode ser interpretada, portanto, como a soma de uma infinidade de retângulos que podemos descrever assim: em cada ponto x há um retângulo de altura f(x) e base infinitamente pequena, indicada por dx, de modo que a área de cada retângulo é dada pelo produto f(x)dx.

Para indicar que estamos obtendo a área A como a soma infinita das áreas f(x)dx de todos esses retângulos no intervalo [a, b] escrevemos: $A = \int_a^b f(x)dx$

O símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é chamado de **integral definida** de a até b de f(x).

Os números a e b são chamados de **limites de integração**; a é o **limite de integração inferior** e b é o **limite de integração superior**.

Quando a integral definida de a até b de f existe, dizemos que f é **integrável** em [a, b].

Propriedades das integrais definidas:

Sejam f e g funções integráveis em [a, b] e c um número real qualquer.

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$ b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ c) $\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

d) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

O teorema a seguir mostra como calcular o valor exato da integral definida de uma função contínua, desde que possamos encontrar uma antiderivada dessa função. Devido a sua importância em estabelecer a relação entre a derivação e a integração, esse teorema, descoberto independentemente por Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha é conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo**:

Seja f uma função contínua em [a, b]. Se g é uma antiderivada de f em [a, b] então

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Exemplo 1: $\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\, dx$

Solução: Sabemos que $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$ onde C é uma constante arbitrária é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo temos:

$$\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\, dx = g(4) - g(1) = 52 - 4 = 48$$

Observações: 1 – No cálculo da integral definida do exemplo 1, a constante de integração "desapareceu". Isto acontece sempre, pois se g(x) + C denota uma antiderivada de f, então:

$$\int_a^b f(x)dx = (g(b) + C) - (g(a) + C) = g(b) + C - g(a) - C = g(b) - g(a)$$

Assim, em todos os cálculos envolvendo uma integral definida, a constante de integração será omitida.

2 – A diferença g(b) – g(a) também costuma ser indicada por $g(x)\Big|_a^b$

Usando essa notação no exemplo 1 escrevemos:

$$\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\, dx = (x^3 - 2x^2 + 5x)\Big|_1^4 = 52 - 4 = 48$$

Exemplo 2: $\int_{-1}^1 (x^4 + 2x + 1)\, dx$

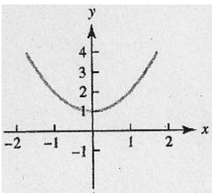
Solução: Sabemos que $g(x) = \dfrac{x^5}{5} + x^2 + x$ é uma antiderivada de $f(x) = x^4 + 2x + 1$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo temos:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 2x + 1)\,dx = g(1) - g(-1) = \left(\frac{1}{5}+1+1\right)-\left(-\frac{1}{5}+1-1\right) = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$$

Usando a notação de integral definida, a definição da área da região sob o gráfico de uma função pode ser expressa da seguinte maneira:

Definição 1: Seja f uma função contínua em [a, b] e tal que $f(x) \geq 0$ em [a, b]. A área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$

Exemplo: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$ e $x = 2$



Solução: Observamos que f é contínua em [–1, 2] e $f(x) \geq 0$ em [–1, 2]. Então a área é dada por:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx$$

Como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ é uma antiderivada de f, usando o teorema fundamental do cálculo temos:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx = g(2) - g(-1) = \left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 = 6$$

A região sob o gráfico de uma função f entre x = a e x = b pode estar inteiramente abaixo do eixo como mostra a figura (1) abaixo.

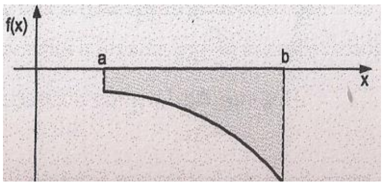


figura 1

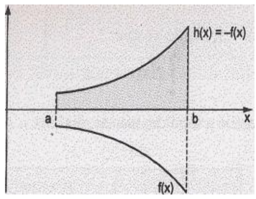


figura 2

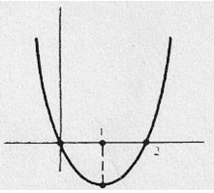
Nesse caso, para calcular a área da região destacada, vamos considerar a função $h(x) = -f(x)$ definida no intervalo [a, b]. Os gráficos de f e h são simétricos em relação ao eixo x (figura 2), e a área A_1 da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é igual à área A_2 da região sob o gráfico de h entre x = a e x = b.

Logo, utilizando a definição 1, temos $A_1 = A_2 = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Definição 2: Seja f uma função contínua em [a, b] e tal que $f(x) \leq 0$ em [a, b]. A área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = -\int_a^b f(x)dx$

Exemplo: Determine a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ entre $x = 1$ e $x = 2$

Solução: Observamos que f é contínua em [1, 2] e tal que f(x) ≤ 0 em [1, 2].

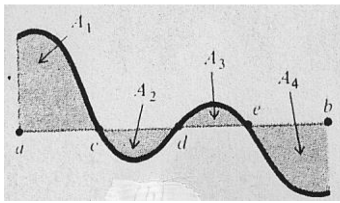


Então a área á dada por $A = -\int_1^2 (x^2 - 2x)\, dx$

Como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$ é uma antiderivada de f temos:

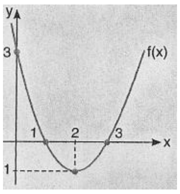
$$A = -\int_1^2 (x^2 - 2x)\, dx = -(g(2) - g(1)) = -\left[\left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = -\left[-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

Se a curva está parcialmente acima do eixo x e parcialmente abaixo como é mostrado na figura ao lado, então a área pode ser calculada pela soma das áreas correspondentes a partes da região que estão acima e abaixo do eixo x.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx - \int_e^b f(x)dx$$

Exemplo: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ entre x = 0 e x = 3



Solução: Vemos no gráfico ao lado que no intervalo [0, 3] a curva está parcialmente acima do eixo x e parcialmente abaixo. Mais precisamente, f(x) ≥ 0 em [0, 1] e f(x) ≤ 0 em [1, 3]. Então a área A da região sob o gráfico de f entre x = 0 e x = 3 é dada por:

$$A = A_1 + A_2 \text{ onde } A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx \text{ e } A_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx$$

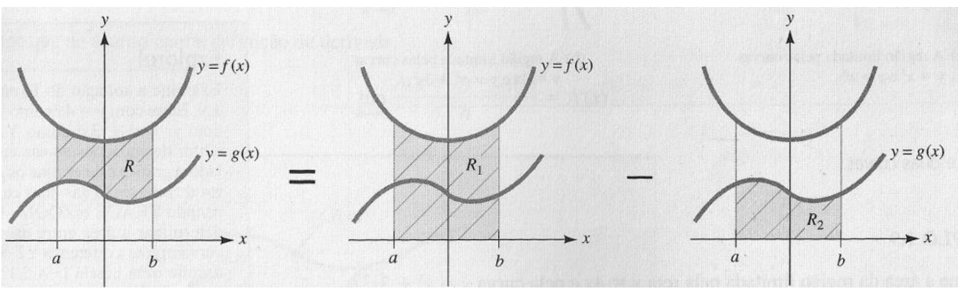
Como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ é uma antiderivada de f, temos que:

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = g(1) - g(0) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = -(g(3) - g(1)) = -\left(0 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Logo $A = A_1 + A_2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$

Para determinar a área da região R entre os gráficos de f e g de x = a até x = b (figura abaixo), basta subtrair a área da região sob o gráfico de g da área da região sob o gráfico de f.



Assim, área de R = área de R_1 – área de R_2

Ou seja, área de R = $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

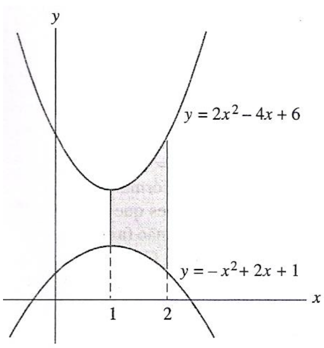
Podemos provar que essa expressão é válida mesmo que as funções não sejam não negativas.

Definição 3: Se f e g são funções contínuas em [a, b] tais que f(x) ≥ g(x) em [a, b] e se R é a região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas x = a e x = b, então

$$\text{Área de R} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Exemplo: Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ entre x = 1 e x = 2

Solução: f e g são funções contínuas em [1, 2] e tais que f(x) ≥ g(x) em [1, 2].



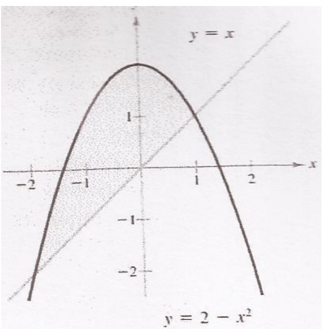
Então a área A da região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas x = 1 e x = 2 é dada por:

$$A = \int_1^2 ((2x^2 - 4x + 6) - (-x^2 + 2x + 1))\, dx = \int_1^2 (3x^2 - 6x + 5)\, dx =$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 5x)\Big|_1^2 = (8 - 12 + 10) - (1 - 3 + 5) = 6 - 3 = 3$$

Algumas vezes temos de considerar o problema de encontrar a área entre duas curvas sem que os valores de a e b sejam determinados. Nestes casos, existe uma região que está completamente envolta pelas duas curvas. Como o próximo exemplo ilustra, temos que encontrar os pontos de interseção entre as duas curvas para obter os valores de a e b.

Exemplo: Determine a área da região limitada pelos gráficos de f(x) = x e $g(x) = 2 - x^2$



Solução: Supondo $x = 2 - x^2$ temos $x^2 + x - 2 = 0$

Resolvendo a equação, encontramos x = – 2 ou x = 1

Então a área A da região limitada pelos gráficos de f e g é dada por:

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Exercícios – lista 16

Nas questões de 1 a 8 **c**alcule as integrais definidas:

1) $\int_{1}^{4} (x^2 - 4x - 3)\, dx$

2) $\int_{-1}^{2} x(1 + x^3)\, dx$

3) $\int_{1}^{4} \sqrt{5 - x}\, dx$

4) $\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\, dx$

5) $\int_{1}^{3} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{x^2}\, dx$

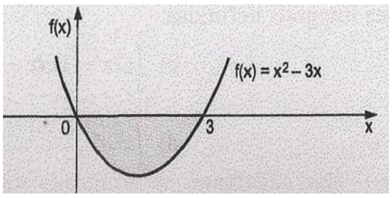
6) $\int_{0}^{1} (3x + 1)^{-1/2}\, dx$

7) $\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)^3\, dx$

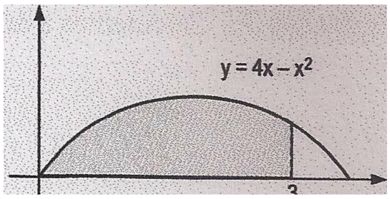
8) $\int_{0}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

Nas questões de 9 a 13 calcule a área das regiões destacadas:

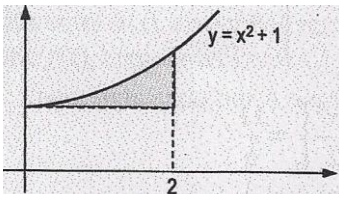
9) $f(x) = x^2 - 3x$



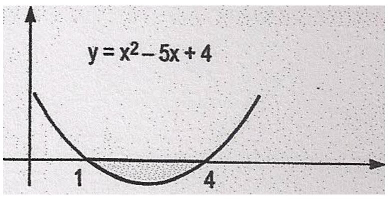
10) $f(x) = 4x - x^2$



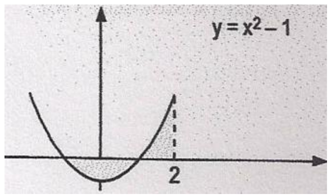
11) $f(x) = x^2 + 1$



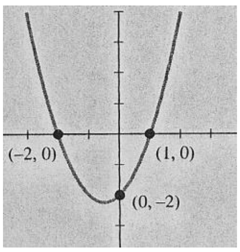
12) $f(x) = x^2 - 5x + 4$



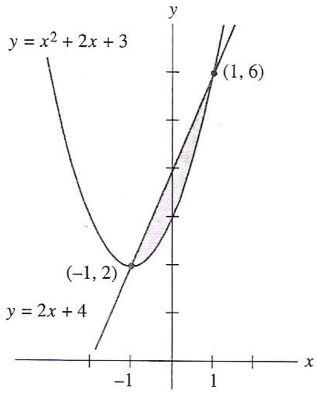
13) $f(x) = x^2 - 1$



14) Ache a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 + x - 2$ entre $x = -2$ e $x = 2$



15) Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = x^2 + 2x + 3$



Respostas:

1) -18	2) $\frac{81}{10}$	3) $\frac{14}{3}$	4) $\frac{7}{2}$	5) 2
6) $\frac{2}{3}$	7) 0	8) $\frac{52}{9}$	9) $\frac{9}{2}$	10) 9
11) $\frac{8}{3}$	12) $\frac{9}{2}$	13) $\frac{8}{3}$	14) $\frac{19}{3}$	15) $\frac{4}{3}$

Bibliografia

1 – Cálculo – Um Curso Moderno e suas Aplicações
Laurence D. Hoffmann e Gerald L. Bradley
Editora LTC

2 – Cálculo – Conceitos e Aplicações
Alex Himonas e Alan Howard
Editora LTC

3 – Cálculo – volume 1
James Stewart
Editora Thomson Pioneira

4 – Cálculo com aplicações
Ron Larson e Bruce H. Edwards
Editora LTC

5 – Cálculo – volume 1
Mustafa A. Munem e David J. Foulis
Editora LTC