Complementos de Matemática Aplicada - Administração e Contabilidade

Aula 05

Bruno Santiago

7 de setembro de 2020

Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;

Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;

Problema

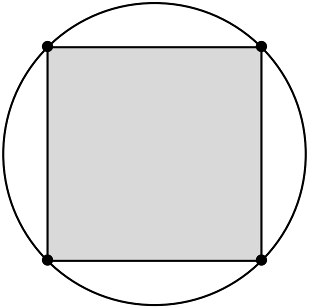
Como calcular a área do círculo?

Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;

Problema

Como calcular a área do círculo?

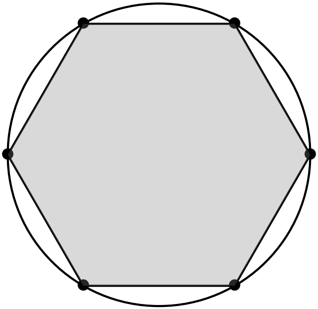


Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;

Problema

Como calcular a área do círculo?

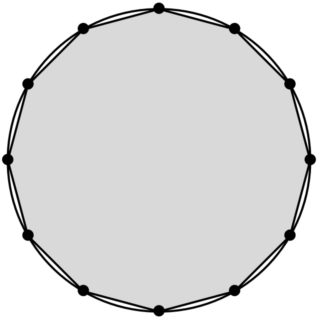


Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;

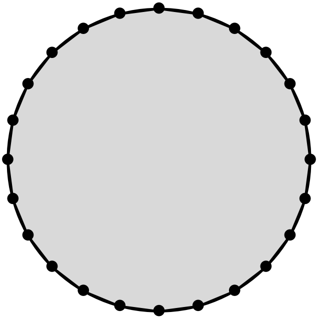
Problema

Como calcular a área do círculo?



Comportamento assintótico de funções

- Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em "pontos diferentes do seu gráfico" e tentar extrair uma tendência;
- Aqui temos uma função que depende do número n de lados do polígono inscrito e $A(n) \to \text{Area do cículo}$ quando $n \to \infty$.



Limite de funções

Definição Informal

Para avaliar $\lim_{x \to a} f(x)$ devemos calcular sucessivos valores de $f(x)$ com x cada vez mais próximo de a e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores $f(x)$.

Limite de funções

Definição Informal

Para avaliar $\lim_{x \to a} f(x)$ devemos calcular sucessivos valores de $f(x)$ com x cada vez mais próximo de a e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores $f(x)$.

$g(x) = x^3 + 4x$

Para n variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de $g\left(1 - \frac{1}{n}\right)$:

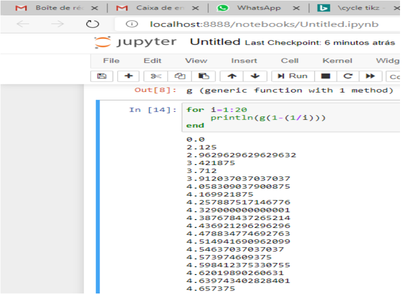
Limite de funções

Definição Informal

Para avaliar $\lim_{x \to a} f(x)$ devemos calcular sucessivos valores de $f(x)$ com x cada vez mais próximo de a e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores $f(x)$.

$$g(x) = x^3 + 4x$$

Para n variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de $g(1 - \frac{1}{n})$:



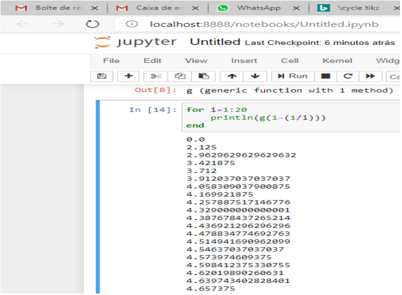
Limite de funções

Definição Informal

Para avaliar $\lim_{x \to a} f(x)$ devemos calcular sucessivos valores de $f(x)$ com x cada vez mais próximo de a e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores $f(x)$.

$g(x) = x^3 + 4x$

Para n variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de $g(1 - \frac{1}{n})$:



E também calculamos $g(1 - \frac{1}{200}) = 4.965074875$.

- Somos induzidos a concluir por esses cálculos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$;

- Somos induzidos a concluir por esses cálculos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$;
- Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?

- Somos induzidos a concluir por esses cálculos que $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$;
- Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- Vamos ver mais um exemplo

- Somos induzidos a concluir por esses cálculos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$;
- Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- Vamos ver mais um exemplo

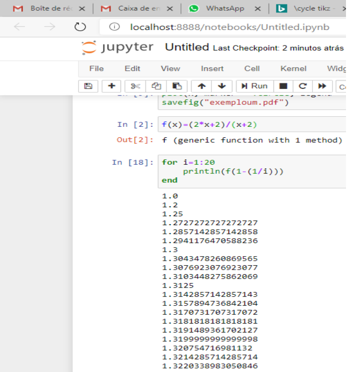
$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$

Como antes, para n variando de 1 a 20, calculamos os valores de $f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$:

- Somos induzidos a concluir por esses cálculos que $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$;
- Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- Vamos ver mais um exemplo

$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$

Como antes, para n variando de 1 a 20, calculamos os valores de $f(1-\frac{1}{n})$:



- Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:

- Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:
- Calculamos os valores $f\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{10}}\right)$

- Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:
- Calculamos os valores $f\left(1-\frac{(-1)^n}{n^{10}}\right)$

```
In [2]: f(x)=(2*x+2)/(x+2)

Out[2]: f (generic function with 1 method)

In [19]: for n=1:20
             println(f(1-((-1)^n/(n^10))))
         end

1.5
1.3331162487788994
1.3333370966649356
1.33333312140564
1.333333356088888
1.333333329658184
1.3333333341200295
1.3333333331263728
1.333333333397066
1.333333333311111
1.3333333333419009
1.3333333333297444
1.3333333333349453
1.333333333332565
1.3333333333337187
1.3333333333331312
1.3333333333334436
1.333333333333271
1.3333333333333697
1.3333333333333117
```

$\xi(x) = x \sin(\frac{1}{x})$:

Agora uma função com comportamento mais oscilatório:

$\xi(x) = x\sin(\frac{1}{x})$:

Agora uma função com comportamento mais oscilatório:

```
In [20]: ξ(x)=x*sin(1/x)
Out[20]: ξ (generic function with 1

In [25]: for n=1:20
             println(ξ(0-(-1)^n/(n^
         end

0.8414709848078965
-0.18920062382698205
0.045790942804639 62
-0.01799395729156658
-0.005294070003910922
-0.027549412595642104
-0.019464339852234072
0.014375406846824855
-0.00777639499104264
-0.005063656411097588
0.008254671278707269
-0.0034098721798504813
-0.003562129394542039
0.004793520691683373
-0.004133755013353446
-0.0039031563832307137
-9.176823628289258e-5
-0.0012471148748653107
0.0007739239732952075
-0.0021272983990979414
```

Limite de Funções

Definição Formal

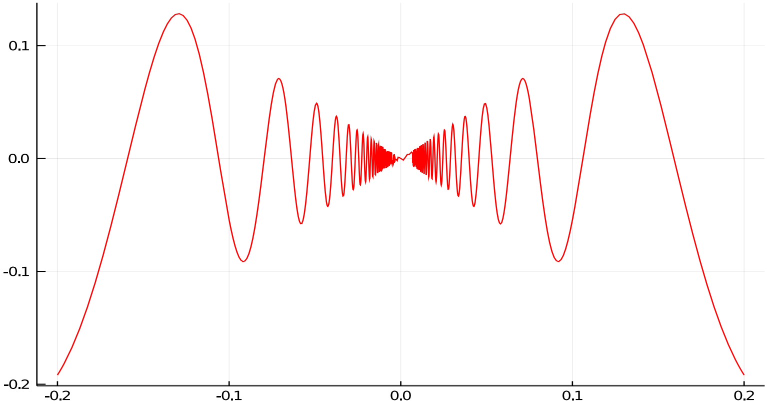
Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < d(x, a) < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Limite de Funções

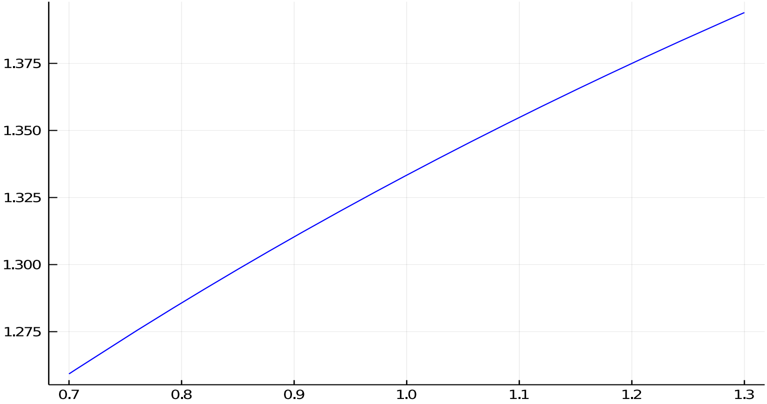
Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < d(x,a) < \delta$ então $d(f(x),\ell) < \varepsilon$.

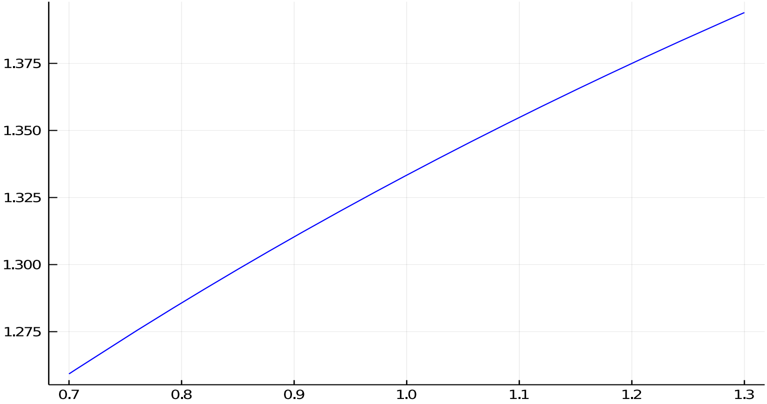
Exemplo: $\lim_{x\to 0} \xi(x) = 0$



$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$



$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$



Exercício

Verifique que $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$.

Limites laterais

Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Limites laterais

Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Limites laterais

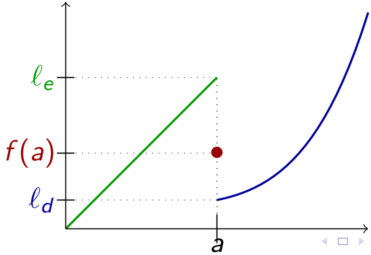
Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Definição Formal

Dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ se, para todo número real $\varepsilon > 0$ (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Exemplo



Continuidade

Definição

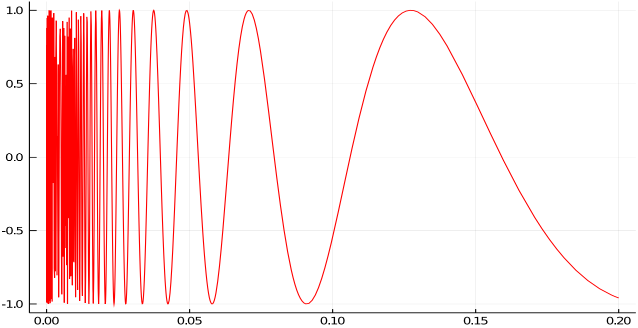
Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in I$ se $\lim_{x \to a} = f(a)$

Continuidade

Definição

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in I$ se $\lim_{x \to a} = f(a)$

Um exemplo de descontinuidade:

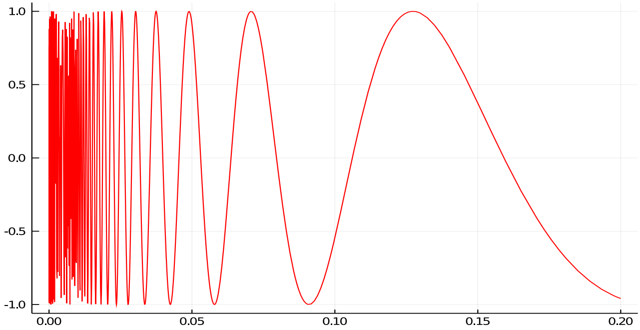


Continuidade

Definição

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in I$ se $\lim_{x\to a} = f(a)$

Um exemplo de descontinuidade:



Não existem $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, nem $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, apesar de podermos atribuir um valor a $f(0)$ se quisermos.

- As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;

- As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- As descontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;

- As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- As descontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;
- A função do slide anterior é $s(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, se $x \neq 0$ e $s(0) = 0$.
- A função $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio **exceto** quando $x = -2$, porque nesse caso o denominador se anula.

- As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- As descontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;
- A função do slide anterior é $s(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, se $x \neq 0$ e $s(0) = 0$.
- A função $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio **exceto** quando $x = -2$, porque nesse caso o denominador se anula.

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = 0$

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim_{x \to -2} f(x)$

Para avaliar $\lim_{x \to -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$, note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto $\lim_{x \to -2} 2x + 2 = 2(-2) + 2 = -2$.

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x)$

Para avaliar $\lim_{x\to -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$, note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto $\lim_{x\to -2} 2x+2 = 2(-2)+2 = -2$.Quando $x \to 2^+$, a função $x+2$ tende a 0 por valores **positivos**.

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x)$

Para avaliar $\lim_{x\to -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$, note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto $\lim_{x\to -2} 2x+2 = 2(-2)+2 = -2$.Quando $x \to 2^+$, a função $x+2$ tende a 0 por valores **positivos**.Logo $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x)$

Para avaliar $\lim_{x\to -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$, note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto $\lim_{x\to -2} 2x+2 = 2(-2)+2 = -2$.Quando $x \to 2^+$, a função $x+2$ tende a 0 por valores **positivos**.Logo $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

Exercício

Verifique que $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$.