

# Complementos de Matemática Aplicada - Administração e Contabilidade

## Aula 05

Bruno Santiago

7 de setembro de 2020

## Comportamento assintótico de funções

- ▶ Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em “pontos diferentes do seu gráfico” e tentar extrair uma tendência;

# Comportamento assintótico de funções

- ▶ Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em “pontos diferentes do seu gráfico” e tentar extrair uma tendência;

## Problema

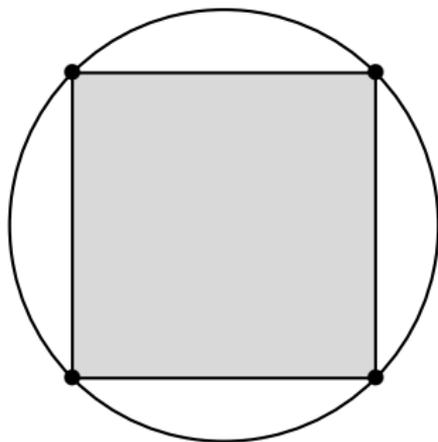
Como calcular a área do círculo?

## Comportamento assintótico de funções

- ▶ Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em “pontos diferentes do seu gráfico” e tentar extrair uma tendência;

### Problema

Como calcular a área do círculo?



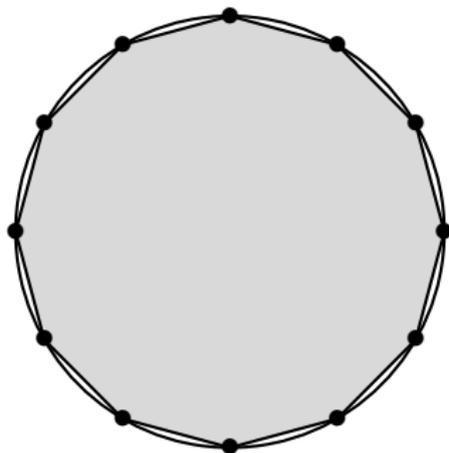


## Comportamento assintótico de funções

- ▶ Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em “pontos diferentes do seu gráfico” e tentar extrair uma tendência;

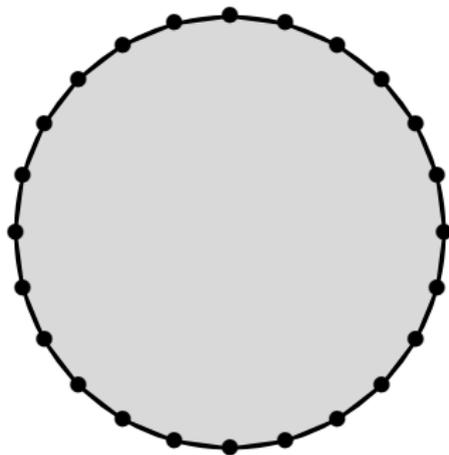
### Problema

Como calcular a área do círculo?



## Comportamento assintótico de funções

- ▶ Efetuar sistematicamente o cálculo do valor de uma função em “pontos diferentes do seu gráfico” e tentar extrair uma tendência;
- ▶ Aqui temos uma função que depende do número  $n$  de lados do polígono inscrito e  $A(n) \rightarrow \text{Area do círculo quando } n \rightarrow \infty$ .



# Limite de funções

## Definição Informal

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  devemos calcular sucessivos valores de  $f(x)$  com  $x$  cada vez mais próximo de  $a$  e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores  $f(x)$ .

# Limite de funções

## Definição Informal

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  devemos calcular sucessivos valores de  $f(x)$  com  $x$  cada vez mais próximo de  $a$  e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores  $f(x)$ .

$$g(x) = x^3 + 4x$$

Para  $n$  variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de  $g(1 - \frac{1}{n})$ :

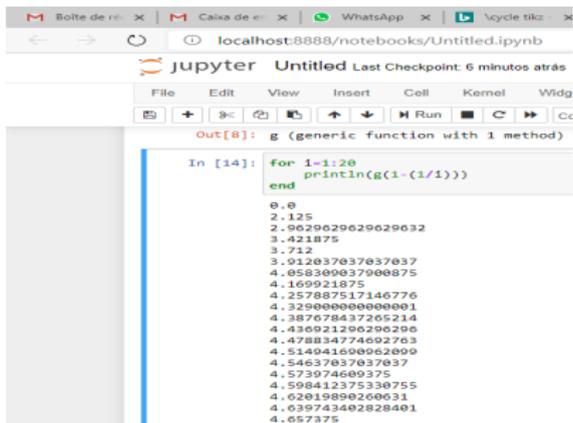
# Limite de funções

## Definição Informal

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  devemos calcular sucessivos valores de  $f(x)$  com  $x$  cada vez mais próximo de  $a$  e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores  $f(x)$ .

$$g(x) = x^3 + 4x$$

Para  $n$  variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de  $g(1 - \frac{1}{n})$ :



The screenshot shows a Jupyter Notebook window titled 'Untitled' with the URL 'localhost:8888/notebooks/Untitled.ipynb'. The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Window) and a toolbar with icons for file operations and execution. The code cell contains the following Python code:

```
In [14]: for i=1:20
          print(g(1-(1/i)))
          end
```

The output of the code cell is a list of 20 numerical values, representing the function  $g(1 - \frac{1}{i})$  for  $i$  from 1 to 20. The values are:

```
Out[8]: g (generic function with 1 method)
0.0
2.125
2.9029629629629632
3.421875
3.712
3.912837037037037
4.0583000379000875
4.169921875
4.257887517146776
4.325000000000001
4.387678437205214
4.430921296296296
4.478834774602763
4.51404160062009
4.54637037037037
4.573974600375
4.598412375330755
4.62019890260031
4.639743402828401
4.657375
```

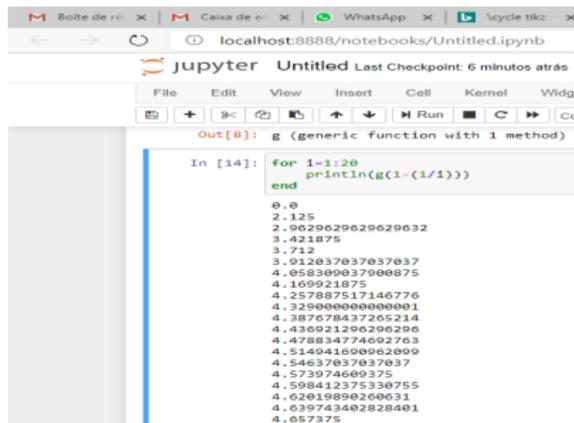
# Limite de funções

## Definição Informal

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  devemos calcular sucessivos valores de  $f(x)$  com  $x$  cada vez mais próximo de  $a$  e tentar decifrar qual a tendência da sequência de valores  $f(x)$ .

$$g(x) = x^3 + 4x$$

Para  $n$  variando de 1 a 20 calculamos com o computador os valores de  $g(1 - \frac{1}{n})$ :



The screenshot shows a Jupyter Notebook window with the following content:

```
Out[8]: g (generic function with 1 method)
```

```
In [14]: for i=1:20
           println(g(1-(1/i)))
           end
```

```
0.0
2.125
2.9029629629629632
3.421875
3.712
3.912837037037037
4.058300037900875
4.169921875
4.257887517146776
4.325000000000001
4.387678437265214
4.436921296296296
4.478834774692763
4.51494169062099
4.54637037037037
4.573974689375
4.598412375330755
4.62019890260631
4.639743402828401
4.657375
```

E também calculamos  $g(1 - \frac{1}{200}) = 4.965074875$ .

- ▶ Somos induzidos a concluir por esses cálculos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ ;

- ▶ Somos induzidos a concluir por esses cálculos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ ;
- ▶ Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?

- ▶ Somos induzidos a concluir por esses cálculos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ ;
- ▶ Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- ▶ Vamos ver mais um exemplo

- ▶ Somos induzidos a concluir por esses cálculos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ ;
- ▶ Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- ▶ Vamos ver mais um exemplo

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$

Como antes, para  $n$  variando de 1 a 20, calculamos os valores de  $f(1 - \frac{1}{n})$ :

- ▶ Somos induzidos a concluir por esses cálculos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ ;
- ▶ Mas como ter certeza que não fomos induzidos ao erro por não ter feito um número suficientemente grande de cálculos?
- ▶ Vamos ver mais um exemplo

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$

Como antes, para  $n$  variando de 1 a 20, calculamos os valores de  $f(1 - \frac{1}{n})$ :

```

savefig("exemplom.pdf")

In [2]: f(x)=(2*x+2)/(x+2)
Out[2]: f (generic function with 1 method)

In [18]: for i=1:20
           println(f(1-(1/i)))
         end

1.0
1.2
1.25
1.2727272727272727
1.2857142857142858
1.2941176470588236
1.3
1.3043478260869565
1.3076923076923077
1.3103448275862069
1.3125
1.3142857142857143
1.3157894736842104
1.3170731707317072
1.3181818181818181
1.3191489361702127
1.3199999999999998
1.320754716981132
1.3214285714285714
1.3220338983050846
  
```

- ▶ Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:

- ▶ Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:
- ▶ Calculamos os valores  $f\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{10}}\right)$

- ▶ Podemos tentar aumentar a velocidade de aproximação:
- ▶ Calculamos os valores  $f\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{10}}\right)$

```
In [2]: f(x)=(2*x+2)/(x+2)
```

```
Out[2]: f (generic function with 1 method)
```

```
In [19]: for n=1:20  
          println(f(1-((-1)^n/(n^10))))  
        end
```

```
1.5  
1.3331162487788994  
1.3333370966649356  
1.33333312140564  
1.333333356088888  
1.333333329658184  
1.333333341200295  
1.333333331263728  
1.33333333397066  
1.33333333311111  
1.333333333419009  
1.333333333297444  
1.333333333349453  
1.33333333332565  
1.333333333337187  
1.333333333331312  
1.333333333334436  
1.33333333333271  
1.333333333333697  
1.333333333333117
```

$$\xi(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right):$$

Agora uma função com comportamento mais oscilatório:

$$\xi(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right):$$

Agora uma função com comportamento mais oscilatório:

```
In [20]:  $\xi(x) = x * \sin(1/x)$ 
```

```
Out[20]:  $\xi$  (generic function with 1
```

```
In [25]: for n=1:20  
          println( $\xi(0 - (-1)^n / (n^$   
          end
```

```
0.8414709848078965  
-0.18920062382698205  
0.04579094280463962  
-0.01799395729156658  
-0.005294070003910922  
-0.027549412595642104  
-0.019464339852234072  
0.014375406846824855  
-0.00777639499104264  
-0.005063656411097588  
0.008254671278707269  
-0.0034098721798504813  
-0.003562129394542039  
0.004793520691683373  
-0.004133755013353446  
-0.0039031563832307137  
-9.176823628289258e-5  
-0.0012471148748653107  
0.0007739239732952075  
-0.0021272983990979414
```

# Limite de Funções

## Definição Formal

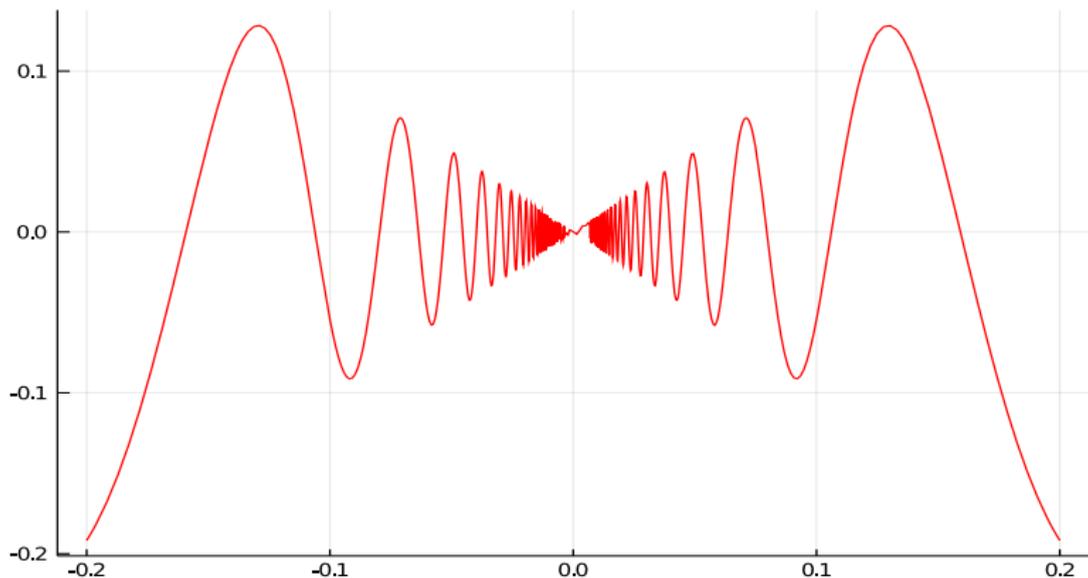
Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

# Limite de Funções

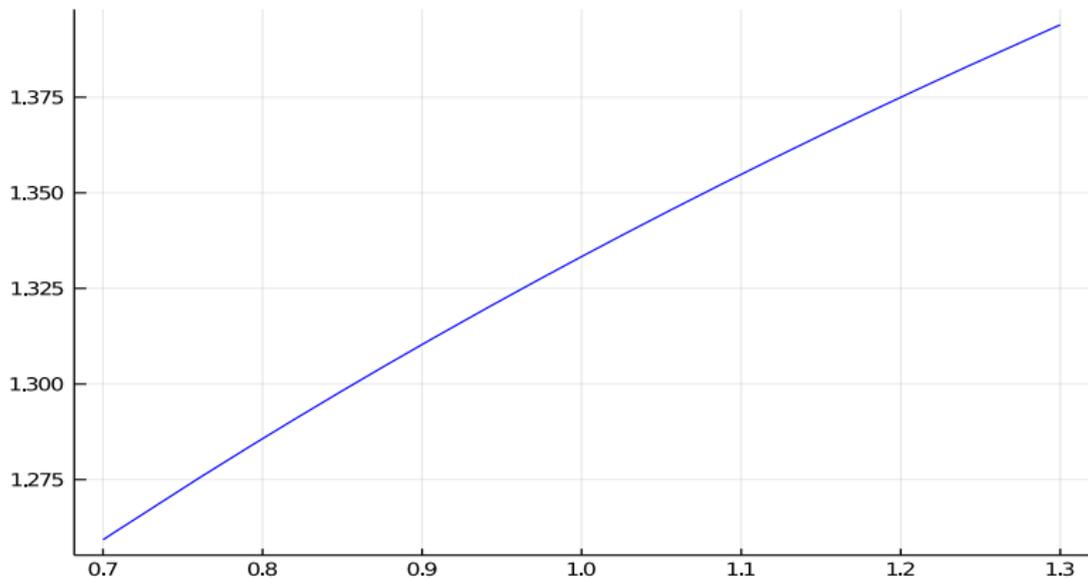
## Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

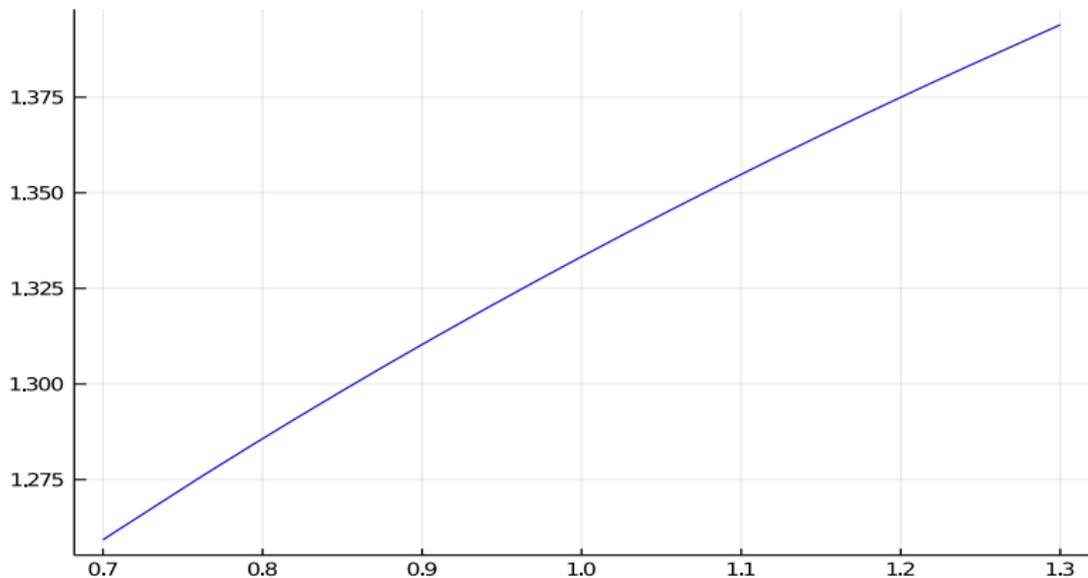
Exemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) = 0$



$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$



$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$



## Exercício

Verifique que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ .

# Limites laterais

## Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < a - x < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

## Limites laterais

### Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < a - x < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

### Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < x - a < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

# Limites laterais

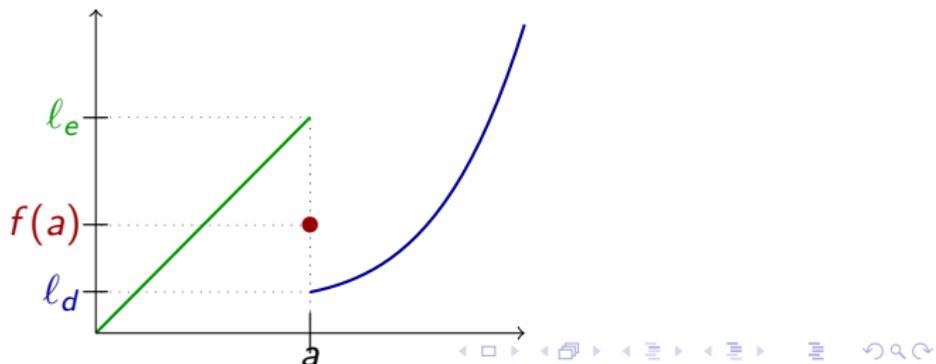
## Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < a - x < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

## Definição Formal

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$  se, para todo número real  $\varepsilon > 0$  (não importando o quão pequeno ele seja) existe um outro número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < x - a < \delta$  então  $d(f(x), \ell) < \varepsilon$ .

## Exemplo



# Continuidade

## Definição

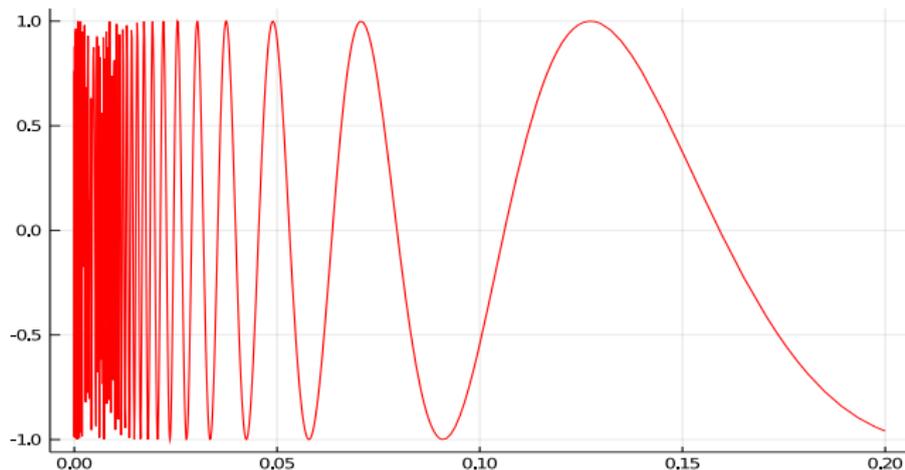
Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $a \in I$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

# Continuidade

## Definição

Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $a \in I$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Um exemplo de descontinuidade:

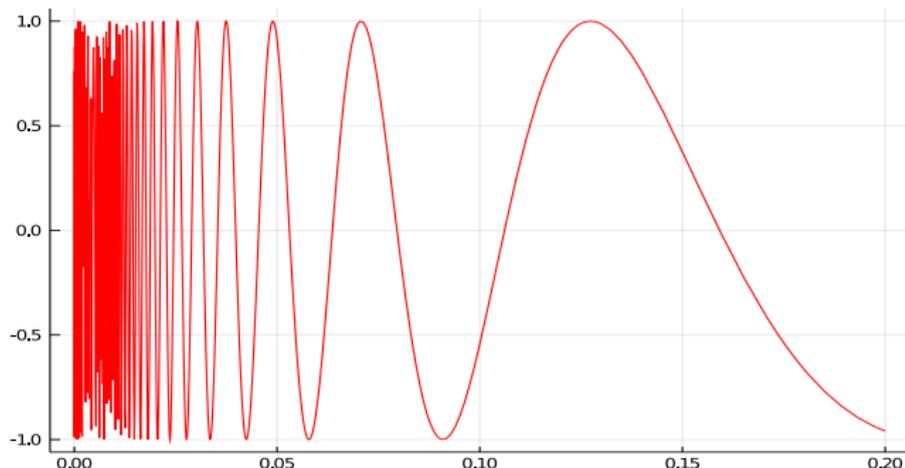


# Continuidade

## Definição

Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $a \in I$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Um exemplo de descontinuidade:



Não existem  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , nem  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , apesar de podermos atribuir um valor a  $f(0)$  se quisermos.

- ▶ As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;

- ▶ As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- ▶ As discontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;

- ▶ As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- ▶ As descontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;
- ▶ A função do slide anterior é  $s(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , se  $x \neq 0$  e  $s(0) = 0$ .
- ▶ A função  $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$  é contínua em todos os pontos do seu domínio **exceto** quando  $x = -2$ , porque nesse caso o denominador se anula.

- ▶ As funções elementares são todas contínuas: polinômios, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas;
- ▶ As descontinuidades surgem quando combinamos, ou compomos uma função com outra;
- ▶ A função do slide anterior é  $s(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , se  $x \neq 0$  e  $s(0) = 0$ .
- ▶ A função  $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$  é contínua em todos os pontos do seu domínio **exceto** quando  $x = -2$ , porque nesse caso o denominador se anula.

# Limites no infinito e limites infinitos

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

# Limites no infinito e limites infinitos

## Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

# Limites no infinito e limites infinitos

## Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$ , note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 2 = 2(-2) + 2 = -2.$$

# Limites no infinito e limites infinitos

## Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$ , note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto

$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 2 = 2(-2) + 2 = -2$ . Quando  $x \rightarrow 2^+$ , a função  $x + 2$  tende a 0 por valores **positivos**.

# Limites no infinito e limites infinitos

## Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$ , note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto

$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 2 = 2(-2) + 2 = -2$ . Quando  $x \rightarrow 2^+$ , a função  $x + 2$  tende a 0 por valores **positivos**. Logo  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ .

# Limites no infinito e limites infinitos

## Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

## $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para avaliar  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+2}{x+2}$ , note que o numerador é uma função contínua (é um polinômio) e portanto

$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 2 = 2(-2) + 2 = -2$ . Quando  $x \rightarrow 2^+$ , a função  $x + 2$  tende a 0 por valores **positivos**. Logo  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ .

## Exercício

Verifique que  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ .