Álgebra Linear

Aula Teórica 4

Bruno Santiago

5 de outubro de 2020

Subespaços

Seja E um espaço vetorial. Seja $F \subset E$ um subconjunto de E. Dizemos que F é um *subespaço* de E se satisfaz as seguintes propriedades

1. $0 \in F$;
2. se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
3. se $u \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda u \in F$.

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto P dos vetores da forma $v = (0, x, y)$ é um subespaço vetorial. Com efeito, evidentemente $0 \in P$. Vejamos que P é estável com respeito a soma de vetores. Se $a = (0, x_1, y_1), b = (0, x_2, y_2) \in P$ então

$$a + b = (0, x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in P.$$

   Analogamente, se $a = (0, x, y) \in P$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda a = (0, \lambda x, \lambda y) \in P$.
2. Em $\mathbb{R}^4$, dado um elemento $x \in \mathbb{R}^4$ o conjunto $r = \{\lambda x; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço: se $\lambda_1 x, \lambda_2 x \in r$ então $\lambda_1 x + \lambda_2 x = (\lambda_1 + \lambda_2)x \in r$. Analogamente, se $\lambda x \in r$ e se α é um número real qualquer então $\alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x \in r$. Tomando $\lambda = 0$ vemos $0 \in r$.

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, ..., v_n$.

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, ..., v_n$.

Exemplos

1. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(3, 4) = 3e_1 + 4e_2$;

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, ..., v_n$.

Exemplos

1. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(3, 4) = 3e_1 + 4e_2$;
2. Se $v = (1, 2)$, $w = (0, 2)$, $u = (1, 1)$ e $x = (4, 7)$ em $\mathbb{R}^2$ então $x = v + w + 3u$;

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, ..., v_n$.

Exemplos

1. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(3, 4) = 3e_1 + 4e_2$;
2. Se $v = (1, 2)$, $w = (0, 2)$, $u = (1, 1)$ e $x = (4, 7)$ em $\mathbb{R}^2$ então $x = v + w + 3u$;
3. Se $v = (1, 2, 3, 4, 5)$, $u = (5, 4, 3, 2, 1)$, e $w = (4, 2, 0, -2, -4)$ em $\mathbb{R}^5$ então $w = v - u$;

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ e n números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, ..., v_n$.

Exemplos

1. Se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(3, 4) = 3e_1 + 4e_2$;
2. Se $v = (1, 2)$, $w = (0, 2)$, $u = (1, 1)$ e $x = (4, 7)$ em $\mathbb{R}^2$ então $x = v + w + 3u$;
3. Se $v = (1, 2, 3, 4, 5)$, $u = (5, 4, 3, 2, 1)$, e $w = (4, 2, 0, -2, -4)$ em $\mathbb{R}^5$ então $w = v - u$;
4. Se $v = (7.89, 0, 0)$, $u = (0, 1, 1.3)$ e $w = (0, 2.2, 3.4\sqrt{17})$ então v não é combinação linear de u e w:

Combinações lineares

Dados n vetores $v_1, \ldots, v_n$ e n números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

é chamado uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

Exemplos

1. Se $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ em $\mathbb{R}^2$, então $(3,4) = 3e_1 + 4e_2$;
2. Se $v = (1,2)$, $w = (0,2)$, $u = (1,1)$ e $x = (4,7)$ em $\mathbb{R}^2$ então $x = v + w + 3u$;
3. Se $v = (1,2,3,4,5)$, $u = (5,4,3,2,1)$, e $w = (4,2,0,-2,-4)$ em $\mathbb{R}^5$ então $w = v - u$;
4. Se $v = (7.89, 0, 0)$, $u = (0, 1, 1.3)$ e $w = (0, 2.2, 3.4\sqrt{17})$ então v não é combinação linear de u e w:qualquer combinação linear entre u e w resulta num vetor com a primeira entrada nula.

O subespaço gerado

Sejam E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\}$. O *subespaço gerado* por X é o conjunto de todas as combinações lineares possíveis entre os elementos de X. Em símbolos,

$$\mathcal{S}(X) = \{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j ; \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

O subespaço gerado

Sejam E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\}$. O *subespaço gerado* por X é **o conjunto de todas as combinações lineares possíveis entre os elementos de** X. Em símbolos,

$$\mathcal{S}(X) = \{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j; \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos

1. Se $v = (1, 2, 3, 4, 56, 7, 8) \in \mathbb{R}^7$ e $X = \{v\}$ então $\mathcal{S}(X)$ é a reta gerada por v: $\mathcal{S}(X) = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

O subespaço gerado

Sejam E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\}$. O *subespaço gerado* por X é **o conjunto de todas as combinações lineares possíveis entre os elementos de X**. Em símbolos,

$$\mathcal{S}(X) = \{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j; \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos

1. Se $v = (1, 2, 3, 4, 56, 7, 8) \in \mathbb{R}^7$ e $X = \{v\}$ então $\mathcal{S}(X)$ é a reta gerada por v: $\mathcal{S}(X) = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. Se $\mathbb{I} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e $v = (2, 2, 2)$ então $\mathcal{S}(\{\mathbb{I}, v\}) = \mathcal{S}(\{\mathbb{I}\}) = \{(\lambda, \lambda, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$.

O subespaço gerado

Sejam E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\}$. O *subespaço gerado* por X é **o conjunto de todas as combinações lineares possíveis entre os elementos de X**. Em símbolos,

$$\mathcal{S}(X) = \{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j; \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos

1. Se $v = (1, 2, 3, 4, 56, 7, 8) \in \mathbb{R}^7$ e $X = \{v\}$ então $\mathcal{S}(X)$ é a reta gerada por v: $\mathcal{S}(X) = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. Se $\mathbb{I} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e $v = (2, 2, 2)$ então $\mathcal{S}(\{\mathbb{I}, v\}) = \mathcal{S}(\{\mathbb{I}\}) = \{(\lambda, \lambda, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Dependência/independência linear

Seja E um espaço vetorial. Seja $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Dizemos que X é *linearmente dependente* (LD) se pelo menos um de seus elementos pode ser escrito como combinação linear dos demais. Caso X não seja linearmente dependente, dizemos que X é *linearmente independente* (LI).

Dependência/independência linear

Seja E um espaço vetorial. Seja $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Dizemos que X é *linearmente dependente* (LD) se pelo menos um de seus elementos pode ser escrito como combinação linear dos demais. Caso X não seja linearmente dependente, dizemos que X é *linearmente independente* (LI).

$$\|$$

$X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$ é *LD* se existe um subconjunto $Y \subset X$, com menos do que m elementos tal que $\mathcal{S}(Y) = \mathcal{S}(X)$.

Exemplos de conjuntos LI/LD

1. Um conjunto com um único vetor $X = \{v\}$ é LI;
2. O conjunto $X = \{(1, 2.1, 3.1), (0, 0.1, 0.1), (1, 2, 3)\}$ é LD,

Exemplos de conjuntos LI/LD

1. Um conjunto com um único vetor $X = \{v\}$ é LI;
2. O conjunto $X = \{(1, 2.1, 3.1), (0, 0.1, 0.1), (1, 2, 3)\}$ é LD,pois

$$(1, 2.1, 3.1) - (0, 0.1, 0.1) = (1, 2, 3).$$

3. O conjunto $\{(1, 1, 2), (1, 43, 7), (-42, 0, -79)\}$ é LD,

Exemplos de conjuntos LI/LD

1. Um conjunto com um único vetor $X = \{v\}$ é LI;
2. O conjunto $X = \{(1, 2.1, 3.1), (0, 0.1, 0.1), (1, 2, 3)\}$ é LD,pois
$$(1, 2.1, 3.1) - (0, 0.1, 0.1) = (1, 2, 3).$$
3. O conjunto $\{(1, 1, 2), (1, 43, 7), (-42, 0, -79)\}$ é LD,pois
$$43(1, 1, 2) + (-42, 0, -79) = (1, 43, 7).$$
4. O conjunto $\{(0, 0, 0, \pi), (0, 0, 1, \sqrt{2}), (0, -9, 76, 7.32)\}$ é um subconjunto LI de $\mathbb{R}^4$

Exemplos de conjuntos LI/LD

1. Um conjunto com um único vetor $X = \{v\}$ é LI;
2. O conjunto $X = \{(1, 2.1, 3.1), (0, 0.1, 0.1), (1, 2, 3)\}$ é LD,pois
$$(1, 2.1, 3.1) - (0, 0.1, 0.1) = (1, 2, 3).$$
3. O conjunto $\{(1, 1, 2), (1, 43, 7), (-42, 0, -79)\}$ é LD,pois
$$43(1, 1, 2) + (-42, 0, -79) = (1, 43, 7).$$
4. O conjunto $\{(0, 0, 0, \pi), (0, 0, 1, \sqrt{2}), (0, -9, 76, 7.32)\}$ é um subconjunto LI de $\mathbb{R}^4$pois qualquer combinação linear entre dois nunca vai dar o terceiro devido a configuração de zeros nos vetores da lista.

Critério para LI/LD

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LD se, e somente se, existe uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

tal que algum $\lambda_j \neq 0$.

Critério para LI/LD

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LD se, e somente se, existe uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

tal que algum $\lambda_j \neq 0$.

Em outras palavras

Critério para LI/LD

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LD se, e somente se, existe uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

tal que algum $\lambda_j \neq 0$.

Em outras palavras

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LI se, e somente se, para toda combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

então **nenhum coeficiente** λ_j é diferente de zero.

Critério para LI/LD

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LD se, e somente se, existe uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

tal que algum $\lambda_j \neq 0$.

Em outras palavras

Teorema

Seja E um espaço vetorial e $X = \{v_1, ..., v_m\} \subset E$. Então X é LI se, e somente se, para toda combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$$

então **nenhum coeficiente** λ_j é diferente de zero.

Exemplo de aplicação

Em $\mathbb{R}^d$, os vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,...,$e_d = (0, ..., 0, 1)$ formam um subconjunto LI. De fato, suponha que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = 0$. Então,

$$(0, ..., 0) = (\lambda_1, 0, ..., 0) + (0, \lambda_2, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, \lambda_d) = (\lambda_1, ..., \lambda_d),$$

e portanto $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Pelo critério anterior concluímos que $\{e_1, ..., e_d\}$ é LI.

Conjuntos geradores

Dizemos que um subconjunto $X = \{v_1, ..., v_m\}$ de um espaço vetorial E é **gerador** se $\mathcal{S}(X) = E$.

Conjuntos geradores

Dizemos que um subconjunto $X = \{v_1, ..., v_m\}$ de um espaço vetorial E é **gerador** se $\mathcal{S}(X) = E$.

Exemplo

$e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são geradores de $\mathbb{R}^2$

Conjuntos geradores

Dizemos que um subconjunto $X = \{v_1, ..., v_m\}$ de um espaço vetorial E é **gerador** se $\mathcal{S}(X) = E$.

Exemplo

$e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são geradores de $\mathbb{R}^2$ pois se $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ então

$$v = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2.$$

Em geral, os vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0), \ldots, e_d = (0, ..., 1)$ formam um conjunto gerador do espaço euclideano $\mathbb{R}^d$.

Bases

Definição

Seja E um espaço vetorial. Uma *base* de E é um subconjunto gerador e LI.

Bases

Definição

Seja E um espaço vetorial. Uma *base* de E é um subconjunto gerador e LI.

A base canônica do $\mathbb{R}^d$

$\{e_1, ..., e_d\}$ é uma base do espaço euclideano $\mathbb{R}^d$.

Bases

Definição

Seja E um espaço vetorial. Uma *base* de E é um subconjunto gerador e LI.

A base canônica do $\mathbb{R}^d$

$\{e_1, ..., e_d\}$ é uma base do espaço euclideano $\mathbb{R}^d$.

Dimensão

Dimensão

Seja E um espaço vetorial seja $F \subset E$ um subespaço. A dimensão de F é a quantidade de elementos que tem numa base de F.

Dimensão

Dimensão

Seja E um espaço vetorial seja $F \subset E$ um subespaço. A dimensão de F é a quantidade de elementos que tem numa base de F.

Exemplos

1. Sejam $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$. Vamos determinar a dimensão do subespaço gerado por u, v, w em $\mathbb{R}^3$.

Dimensão

Dimensão

Seja E um espaço vetorial seja $F \subset E$ um subespaço. A dimensão de F é a quantidade de elementos que tem numa base de F.

Exemplos

1. Sejam $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$. Vamos determinar a dimensão do subespaço gerado por u, v, w em $\mathbb{R}^3$.Observe que u e v são não-colineares, pois $\frac{4}{1} \neq \frac{5}{2}$. Além disso, w é combinação linear de u e v pois podemos escrever $w = 2v - u$. Isso mostra que $\{u, v, w\}$ é um conjunto LD e $\mathcal{S}(u, v) = \mathcal{S}(u, v, w)$. Como $\{u, v\}$ é LI, pois u e v são não colineares, temos que $\dim \mathcal{S}(u, v, w) = 2$.

Dimensão

Dimensão

Seja E um espaço vetorial seja $F \subset E$ um subespaço. A dimensão de F é a quantidade de elementos que tem numa base de F.

Exemplos

1. Sejam $u = (1,2,3), v = (4,5,6), w = (7,8,9) \in \mathbb{R}^3$. Vamos determinar a dimensão do subespaço gerado por u, v, w em $\mathbb{R}^3$.Observe que u e v são não-colineares, pois $\frac{4}{1} \neq \frac{5}{2}$. Além disso, w é combinação linear de u e v pois podemos escrever $w = 2v - u$. Isso mostra que $\{u, v, w\}$ é um conjunto LD e $\mathcal{S}(u, v) = \mathcal{S}(u, v, w)$. Como $\{u, v\}$ é LI, pois u e v são não colineares, temos que $\dim \mathcal{S}(u, v, w) = 2$.
2. Os vetores $(1,2,3)$ e $(4,5,6)$ são não-colineares, pois suas coordenadas não são proporcionais (por exemplo, $\frac{4}{1} \neq \frac{5}{2}$) e $2(1,2,3) = (2,4,6)$. Isso prova que $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ é LI e $\mathcal{S}(\{(1,2,3),(4,5,6),(2,4,6)\}) = \mathcal{S}(\{(1,2,3),(4,5,6)\})$. Portanto, $\dim \mathcal{S}(\{(1,2,3),(4,5,6),(2,4,6)\}) = 2$.

Dimensão dos espaços euclideanos

$$\dim(\mathbb{R}^d) = d$$

Bases ortonormais

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita d, munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$. Uma base $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_d\}$ de E é dita *ortonormal* se satisfaz

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Bases ortonormais

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita d, munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$. Uma base $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_d\}$ de E é dita *ortonormal* se satisfaz

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Por exemplo, a base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$ munido do produto interno euclideano é um exemplo de uma base ortonormal.

O algorítimo de Gram-Schmidt

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita d, munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$. O leitor menos interessado em generalidades matemáticas pode sem problemas ler tudo o que se segue assumindo que $E = \mathbb{R}^d$ e que o produto interno em tela é o produto interno euclideano usual.
Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão n e seja $\{v^1, ..., v^n\} \subset F$ uma base qualquer de F.

Teorema de Gram-Schmidt

Existe $\{w^1, ..., w^n\} \subset F$ tal que $\langle w^i, w^j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e, além disso, para cada $\ell = 1, ..., n$,

$$\mathcal{S}\left(\{v^1, ..., v^\ell\}\right) = \mathcal{S}\left(\{w^1, ..., w^\ell\}\right).$$

O complemento ortogonal

Seja F um subespaço vetorial de um espaço vetorial E, munido de um produto interno. O *complemento ortogonal* de F é o conjunto

$$F^{\perp} \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in E; \langle y, x\rangle = 0, \forall\, x \in F\}.$$

Ou seja, o complemento ortogonal de F é conjunto formado pelos elementos de E que são ortogonais a todos os vetores em F.

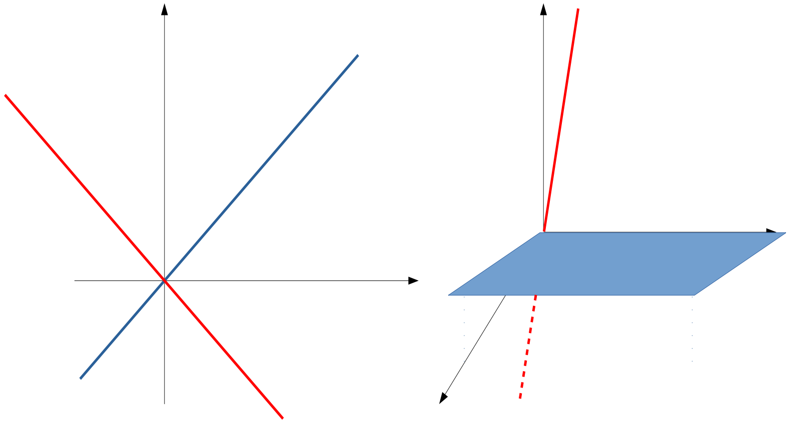

Figura: Nas duas figuras, o subespaço vermelho é o complemento ortogonal do subespaço azul.

Propriedades do complemento ortogonal

1. $F^\perp$ é um subespaço

Propriedades do complemento ortogonal

1. $F^{\perp}$ é um subespaço
2. $F^{\perp} \cap F = \{0\}$

Propriedades do complemento ortogonal

1. $F^\perp$ é um subespaço
2. $F^\perp \cap F = \{0\}$
3. $\dim F + \dim F^\perp = d$

A projeção ortogonal

Vamos aplicar o conceito de ortogonalidade para resolver o seguinte problema: seja $F \subset \mathbb{R}^d$ um subespaço com $\dim F = n < d$ e $y \in \mathbb{R}^d \setminus F$. Como encontrar o ponto de F mais próximo de y? De fato, usando Grham-Schimidt podemos escrever $y = \sum_{\ell=1}^{d} \alpha_\ell v_\ell$ onde $\{v_1, ..., v_d\} \subset \mathbb{R}^d$ é uma base ortonormal com $\{v_1, ..., v_n\} \subset F$. Assim, podemos escrever

$$y = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell v_\ell + \sum_{\ell>n} \alpha_\ell v_\ell = a + b,$$

com $a \in F$ e $b \in F^\perp$. Como $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^d$, esse modo de escrever y é único.

Proposição

a é o ponto de F mais próximo de y.