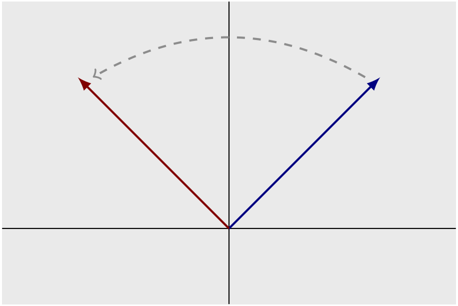
Álgebra Linear

Aula Teórica da Semana 05

Bruno Santiago

13 de outubro de 2020

Rotações no plano



Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x+y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Exemplos

1. Rotações no plano são funções lineares

Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Exemplos

1. Rotações no plano são funções lineares
2. A função $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $A(x) = 2x$ é linear.

Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Exemplos

1. Rotações no plano são funções lineares
2. A função $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $A(x) = 2x$ é linear.
3. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x + 1$ não é linear.

Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Exemplos

1. Rotações no plano são funções lineares
2. A função $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $A(x) = 2x$ é linear.
3. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x + 1$ não é linear.Com efeito, $h(3x) = 2(3x) + 1 \neq 3(2x + 1)$.

Funções lineares

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $A : E \to F$ entre E e F é dita *linear* se satisfaz as seguintes propriedades

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$, para todos $x, y \in E$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Exemplos

1. Rotações no plano são funções lineares
2. A função $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $A(x) = 2x$ é linear.
3. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x + 1$ não é linear.Com efeito, $h(3x) = 2(3x) + 1 \neq 3(2x + 1)$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x + y + z$ é linear.
5. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y, z) = (x^2, y + z^5)$ não é linear.

Duas funções lineares especiais

A função linear nula

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Duas funções lineares especiais

A função linear nula

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

A função identidade

$\mathsf{I} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida por $\mathsf{I}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Matrizes

Uma matriz $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ é uma tabela de números com m linhas e n colunas, onde o número que fica na interseção da linha i com a coluna j é o número a_{ij}.

Matrizes

Uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ é uma tabela de números com m linhas e n colunas, onde o número que fica na interseção da linha i com a coluna j é o número a_{ij}.
Exemplos de matrizes:

1. Uma matriz 2×2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
2. Uma matriz 3×2: $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ \pi & e^2 & 0 \end{bmatrix}$.

Vetores linha/vetores coluna de uma matriz

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, o vetor

$$c_j \overset{\text{def.}}{=} (a_{1j}, ..., a_{mj}) \in \mathbb{R}^m.$$

é chamado o *j-ésimo vetor coluna* de A. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ o vetor

$$\ell_i \overset{\text{def.}}{=} (a_{i1}, ..., a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

é chamado o *i–ésimo vetor linha* de A.

Matrizes produzem funções lineares

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz. Podemos interpretá-la como uma função $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida da seguinte maneira:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \langle \ell_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle \ell_m, x\rangle \end{bmatrix}.$$

Matrizes produzem funções lineares

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz. Podemos interpretá-la como uma função $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida da seguinte maneira:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \langle \ell_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle \ell_m, x \rangle \end{bmatrix}.$$

Exemplo

À matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ \pi & e^2 & 0 \end{bmatrix}$ podemos associar a função linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$A(x, y, z) = (3x + 7y + 4z, \pi x + e^2 y)$$

Um exemplo especial: Arnold's cat map

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada 2×2. Então, a função linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida por A é a função que leva um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no vetor $A(v) = (2x + y, x + y)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Um exemplo especial: Arnold's cat map

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada 2×2. Então, a função linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida por A é a função que leva um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no vetor $A(v) = (2x + y, x + y)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Observe que

1. $A(0, 0) = (0, 0)$;

Um exemplo especial: Arnold's cat map

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada 2×2. Então, a função linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida por A é a função que leva um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no vetor $A(v) = (2x + y, x + y)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Observe que

1. $A(0, 0) = (0, 0)$;
2. $A(1, 2) = (4, 3)$ e $A(2, 4) = (8, 6)$

Um exemplo especial: Arnold's cat map

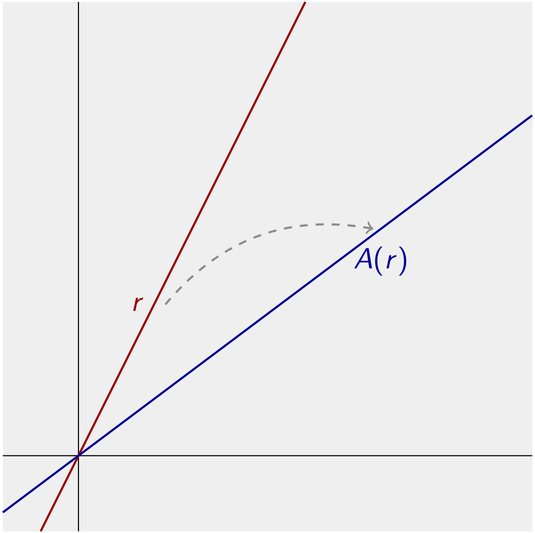
Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada 2×2. Então, a função linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida por A é a função que leva um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no vetor $A(v) = (2x + y, x + y)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Observe que

1. $A(0, 0) = (0, 0)$;
2. $A(1, 2) = (4, 3)$ e $A(2, 4) = (8, 6)$
3. Mais geralmente, a reta $r = \{(\lambda, 2\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ é transformada por A na reta $A(r) = \{(4\lambda, 3\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Um exemplo especial: Arnold's cat map



Mais exemplos de matrizes

Uma matriz pode colapsar uma reta na origem. Isso é fácil de ver na matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pois o vetor $e_1 = (1, 0)$ é transformado no vetor $A(1, 0) = (0, 0)$, mas também ocorre com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Com efeito, o vetor $(2, -1)$ é transformado no vetor

$$A(2, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (2 - 2, 4 - 4) = (0, 0).$$

Interpretando as colunas de uma matriz

Nos dois exemplos a seguir iremos analisar transformações lineares definidas no espaço $\mathbb{R}^3$. Lembre que a base canônica do $\mathbb{R}^3$ é formada pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. A transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leva os vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$ da base canônica de $\mathbb{R}^3$ nos vetores $A(e_1) = (1, 1)$, $A(e_2) = (4, 2)$ e $A(e_3) = (7, 1)$. Note que os vetores $(1, 1)$ e $(4, 2)$ não são colineares, logo são LI, e portanto formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Em particular, o vetor $A(e_3) = (7, 1)$ é combinação linear dos vetores $A(e_1) = (1, 1)$ e $A(e_2) = (4, 2)$.

2) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Temos então uma transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Observe que $A(e_1) = (1, 1, 1)$, $A(e_2) = (4, 2, 1)$ e $A(e_3) = (6, 4, 3)$. Portanto,

$$A(e_3) = 2A(e_1) + A(e_2).$$

Isso implica que

$$A(-6, -4, -2) = A(e_3 - 2e_1 - e_2) = A(e_3) - 2A(e_1) - A(e_2) = 0.$$

Em particular, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $A(-6\lambda, -4\lambda, -2\lambda) = 0$. Desse modo, a matriz A transforma o plano gerado pelos vetores e_1 e e_2 no plano gerado pelos vetores $(1, 1, 1)$ e $(4, 2, 1)$ (note que estes vetores não são colineares), e, ao mesmo tempo, colapsa a reta gerada pelo vetor $(-6, -4 - 2)$ no vetor nulo.

FUNÇÕES LINEARES POSSUEM MATRIZES!!!

A matriz de uma função linear

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Considere $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ uma base do $\mathbb{R}^m$.

A matriz de uma função linear

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Considere $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ uma base do $\mathbb{R}^m$.

A j-ésima coluna da matriz de f relativa às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é o vetor $c_j \in \mathbb{R}^m$ cuja i-ésima entrada é i-ésima coordenada (na base $\mathcal{B}'$) do vetor $f(b_j)$ (o j-ésimo vetor da base $\mathcal{B}$).

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função linear dada por uma rotação de 90º. Qual a base de f relativamente a bases canônica do $\mathbb{R}^2$:

A matriz de uma função linear

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Considere $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ uma base do $\mathbb{R}^m$.

A j-ésima coluna da matriz de f relativa às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é o vetor $c_j \in \mathbb{R}^m$ cuja i-ésima entrada é i-ésima coordenada (na base $\mathcal{B}'$) do vetor $f(b_j)$ (o j-ésimo vetor da base $\mathcal{B}$).

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função linear dada por uma rotação de 90º. Qual a base de f relativamente a bases canônica do $\mathbb{R}^2$:Vejamos, $f(e_1) = e_2 = 0.e_1 + 1.e_2$ e $f(e_2) = (0, -1) = 0.e_1 + (-1).e_2$. Portanto $[f] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Mais exemplos

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y + z$. Então $[f] = [111]$;

Mais exemplos

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y + z$. Então $[f] = [111]$;
2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$.
   Então $[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

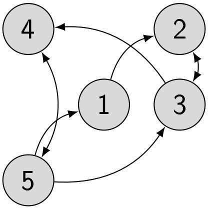
Mais exemplos

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y + z$. Então $[f] = [111]$;
2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$.
   Então $[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Aplicação: Teoria de Grafos

Grafos

Um grafo é composto por um conjunto finito $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$, chamado conjunto de vértices do grafo, e um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ do produto cartesiano, chamado conjunto de arestas do grafo.



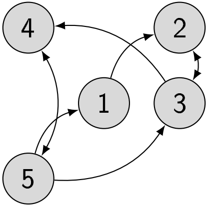
A matriz de adjacência de um grafo

Seja $\mathcal{G}$ um grafo com conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{1, ..., n\}$, contendo n elementos, e com conjunto de arestas $\mathcal{A}$. Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$ seja

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

A matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é chamada **matriz de adjacência** do grafo A.

A matriz de adjacência de um grafo



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

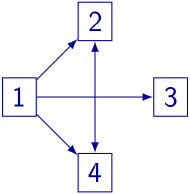
A matriz de incidência de um grafo

Seja $\mathcal{G}$ um grafo com conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{1, ..., n\}$ e conjunto de arestas $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_m\}$. Cada aresta sai de um vértice (digamos o vértice k) e chega em outro vértice (digamos, o vértice j) Para cada $i = 1, ..., n$ e cada $j = 1, ..., m$ considere

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta j chega no vértice i} \\ -1, & \text{se a aresta j sai do vertice i} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ é chamada ***matriz de incidência*** do grafo $\mathcal{G}$.

A matriz de incidência de um grafo



A matriz de incidência desse grafo é

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$