Álgebra Linear

Aula Teórica da Semana 06

Bruno Santiago

21 de outubro de 2020

Núcleo

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais E e F. O ***núcleo*** de A, denotado por $N(A)$, é o conjunto dos vetores em E que são transformados por A no zero de F. Em símbolos:

$$N(A) = \{v \in E; A(v) = 0\}.$$

Exemplos

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$. Então, $N(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -y\}$
2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (y + z, z + x, x - y)$. Então $f(x, y, z) = 0 \iff y = -z$, $z = -x$ e $x = y$. Logo, $N(f) = \{(x, x, -x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$.
3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, x - y, x - y)$. Então $N(f) = \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3; x, z \in \mathbb{R}\}$.

Propriedades do núcleo

1. O núcleo é subespaço do domínio da função linear;
2. A dimensão do núcleo é chamada de ***nulidade*** da função linear.

A imagem de uma função linear

A *imagem* de A, denotada por $Im(A)$, é conjunto dos vetores de F que são “atingidos"pela transformação:

$$Im(A) = \{u \in F; \exists\, v \in E; u = A(v)\}.$$

Exemplo

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, 0)$. Então $Im(f) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$;
2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x - y, x - y, x - y)$. Então $Im(f) = \{(t, t, t); t \in \mathbb{R}\}$.
3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x, y)$. Então $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Note que $N(f) = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$.

Propriedades da imagem

1. $Im(f)$ é sempre um subespaço vetorial;
2. Seja $f : X \to Y$ uma transformação linear entre espaços vetoriais X e Y. Suponha que $\dim X = d$ e seja $\{x_1, ..., x_d\}$ uma base de X. Se $N(f) = \{0\}$ então $\{f(x_1), ..., f(x_d)\}$ é uma base de $Im(f)$;
3. Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ dada pela matriz $A = [a_{ij}]_{d \times k}$. Sejam $c_1, ..., c_k$ as colunas de A. Então $f(e_j) = c_j$. Ou seja, **As colunas da matriz de f na base canônica são as imagens por f dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^d$.**
4. **$Im(f)$ é o subespaço gerado pelas colunas de sua matriz.**
5. A dimensão da imagem é o que chamamos de posto da função linear.

O Teorema do Núcleo e da Imagem

Seja $f : X \to Y$ uma função linear entre espaços vetoriais X e Y. Então,

$$\dim N(f) + \dim Im(f) = \dim X.$$

Aplicação: estudando a variação de funções lineares

Problema

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$. Em que regiões do plano a função f é crescente? E decrescente? Constante?

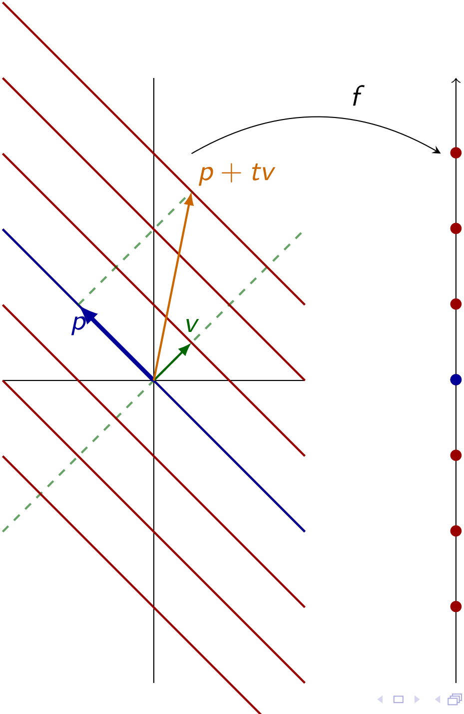
Aplicação: estudando a variação de funções lineares

Problema

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$. Em que regiões do plano a função f é crescente? E decrescente? Constante?

Solução.

$N(f) = \{(t, -t); t \in \mathbb{R}\}$. Seja $v = (0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^2$. Observe que v é transversal ao núcleo de $N(f)$ e que $f(v) = 1$. Qualquer que seja $p \in N(f)$, temos $f(p + tv) = f(p) + tf(v) = 0 + t.1 = t$. Ou seja, f é constante ao longo de qualquer reta paralela ao seu núcleo e cresce na direção do vetor v. $\square$


f
p + tv
p
v