UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada (ACE)
Professor: Bruno Santiago
Lista de atividades - Terceira Semana

1. Cálculo de Limites

Conforme vimos na aula 05, o cálculo de limites de combinações de funções elementares envolve analisar o comportamento isolado das partes contínuas da função e ver como se dá assintoticamente a combinação dessas partes. Assim, por exemplo, a função $x + 1/x - 1$ para valores de x próximos de 1 fica como o quociente de um número próximo de 2 (porque o numerador é uma função contínua) por um número muito pequeno. Os limites laterais vão ser diferentes, porque o sinal desse número pequeno vai influenciar se o resultado é $+\infty$ ou $-\infty$, como ocorreu no exemplo que vimos na aula. A lista de exercícios dessa semana contém um único exercício com vários limites para vocês treinarem esse tipo de cálculo

(1) $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^3+1}$

Solução. Observe que o numerador e o denominador são funções contínuas, pois são polinômios. Logo, $\lim_{x\to-1} x - 1 = -2$ e $\lim_{x\to-1} x^3 + 1 = 0$. Como temos uma função racional, cujo denominador tende para zero e o numerador tende para um número diferente de zero, o limite vai dar $\pm\infty$. Para saber exatamente, temos que analisar os limites laterais. Note que se $x < -1$ mas muito próximo de -1, como por exemplo $x = -1.001$, temos que $x^3 + 1 < 0$. Como o numerador converge para -2, o quociente $\frac{x-1}{x^3+1}$, para $x < -1$ fica positivo e muito grande quando x se aproxima de -1. Logo, $\lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x^3+1} = +\infty$. Agora, se $x > -1$ então $x^3 + 1 > 0$ e aí o quociente fica negativo e muito grande quando x se aproxima de -1. Logo, $\lim_{x\to-1^+} \frac{x-1}{x^3+1} = +\infty$. $\square$

(2) $\lim_{x\to 0} e^x$

Solução. Como $x \mapsto e^x$ é uma função contínua temos que $\lim_{x\to0} e^x = e^0 = 1$. $\square$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+1}$

Demonstração. Mais uma vez temos uma função racional com numerador e denominador sendo funções contínuas. Além disso, o denominador dessa função aqui converge para 1 quando $x \to 0$. Logo, a função é contínua e por isso $\lim_{x\to0} \frac{x+1}{0^2+1} = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$. $\square$

(4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+2}{x+2}$

Demonstração. Para calcular limites no infinito é sempre uma boa estratégia usar o fato conhecido que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$, dividindo os polinômios do numerador e do denominador pelo monômio de maior grau que aparece. Aqui, todos os temos polinômios de grau 1 em cima e em baixo, por isso podemos escrever

$$\frac{2x+2}{x+2} = \frac{2 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

Como $\lim_{x\to\infty} 2/x = 0$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2.$$

□

(5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x^7}{x+1}$

Solução. Adotamos a mesma estratégia do exemplo precedente:

$$\frac{3x^3+x^7}{x+1} = \frac{3x^2+x^6}{1+1/x}$$

Temos uma fração cujo numerador é um polinômio de grau par, logo quando $x \to -\infty$ o numerador tende a $+\infty$. Já o denominador tende para 1. Assim, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x^7}{x+1} = +\infty$. □

(6) $\lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{x^2+1}$

Solução. Nesse caso como acima o denominador da fração não se anula no ponto em que estamos buscando o limite. Por isso, a função é contínua no ponto dado e temos que $\lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{x^2+1} = \frac{\pi-\pi}{\pi^2+1} = 0$. □

(7) $\lim_{x\to3} 3x^3 + \frac{4}{(x-3)^2}$

Solução. Note que $\lim_{x\to3} 3x^3 = 27$ pois a função $x \mapsto 3x^3$ é um polinômio, logo é contínua em todos os pontos do seu domínio. Por outro lado, a parcela é uma função com numerador constante positivo e denominador que se anula quando $x = 3$. Além disso, como o denominador é $(x-3)^2$ ele é sempre positivo. Por isso, $\lim_{x\to3} \frac{4}{(x-3)^2} = +\infty$. □

(8) $\lim_{x\to0} \frac{x}{3x^2-x}$

Solução. Aqui ambos, numerador e denominador se anulam no ponto em questão. Mas o comportamento da função está mascarado pela sua expressão: se você olhar bem para ela a gente pode fatorar o termo de grau 1 em cima e em baixo e assim o fato de a função ter uma indeterminação quando $x = 0$ resulta apenas da fórmula da função estar escrita desse modo. Com efeito,

$$\frac{x}{3x^2-x} = \frac{x}{x(3x-1)} = \frac{1}{3x-1}.$$

E a função $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ é contínua em 0 e vale -1. Logo, $\lim_{x\to0} \frac{x}{3x^2-x} = -1$. □