UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 4

Exercício 1. *Considere* $a = (37, 0, 0, 0, 0)$, $b = (0, 47, 0, 0, 0)$, $c = (0, 0, \pi^2, 0, 0)$, $d = (0, 0, 0, \sin\frac{37}{45}, 0)$ *e* $e = (0, 0, 0, 0, \frac{7}{8})$ *vetores em* $\mathbb{R}^5$*. Explique por que* $\{a, b, c, d, e\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^5$*.*

Solução. Lembra da base canônica do $\mathbb{R}^5$, formada pelos vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1, 0) \text{ e } e_5 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Agora observe que

$$a = \frac{e_1}{37},\ b = \frac{e_2}{47},\ c = \frac{e_3}{\pi^2},\ d = \frac{e_4}{\sin(37/47)},\ e = \frac{8e_5}{7}. \tag{1}$$

Portanto, dado $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5$ podemos escrever

$$\begin{aligned} v &= v_1e_2 + v_2e_2 + v_3e_3 + v_4e_4 + v_5e_5 \\ &= \frac{v_1}{37}a + \frac{v_2}{47}b + \frac{v_3}{\pi^2}c + \frac{v_4}{\sin(37/47)}d + \frac{8}{7}e \end{aligned}$$

Isso explica porque o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ é um conjunto gerador do $\mathbb{R}^5$. Para ser uma base, ele precisa ser LI também. Mas, como cada elemento do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ é um múltiplo não-nulo do correspondente elemento da base canônica, a qual é LI, o conjunto vai ter que ser LI também. Com efeito, se houvesse alguma combinação linear nula dos vetores $\{a, b, c, d, e\}$, digamos

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0,$$

então usando as igualdades (1) teríamos que

$$\frac{\alpha}{37}e_1 + \frac{\beta}{47}e_2 + \frac{\gamma}{\pi^2}e_3 + \frac{\delta}{\sin(37/47)}e_4 + \frac{8\varepsilon}{7}e_5 = 0.$$

Aplicando o critério para LI que vimos na aula, já que a base canônica é um conjunto LI, temos que $\alpha/37 = 0 \implies \alpha = 0$. Similarmente vemos que β, γ, δ e $\varepsilon = 0$. Pelo critério de LI (aplicado agora ao conjunto $\{a, b, c, d, e\}$) concluímos que ele tem que ser LI. $\square$

Exercício 2. *Um estagiário num fundo quantitativo*[1] *já examinou os retornos diários de cerca de 400 fundos de investimento, durante um ano inteiro (que tem 250 dias úteis para o mercado financeiro). O estagiário reportou ao supervisor que descobriu que o vetor de retorno* $g \in \mathbb{R}^{250}$ *de um dos fundos, nesse caso o Google, pode ser expresso como combinação* ***linear*** *dos demais fundos administrados pela companhia. A resposta do supervisor foi: "É esmagadoramente improvável que os retornos de companhias não-relacionadas possa reproduzir os retornos diários do Google. Então, você deve ter cometido algum erro nos seus cálculos". Quem está certo nessa história? Dê uma explicação curta.*

[1]veja `https://www.infomoney.com.br/onde-investir/fundos-quantitativos-conheca-os-gestores-que-ganham-c`

Solução. Nesse caso não é improvável. Se os 400 vetores que dão os retornos são muito distintos entre si, temos 400 vetores muito distintos entre num espaço vetorial de dimensão 250. Para gerar o $\mathbb{R}^{250}$ são necessários apenas 250 vetores. Logo, se os retornos são muito distintos entre si é provável que dentro desses 400 hajam pelo menos 250 que formem um conjunto LI o qual deverá ser gerador do $\mathbb{R}^{250}$. $\square$

Exercício 3. *Considere a lista de d vetores em $\mathbb{R}^d$ dada por*

$$x^1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ x^2 = (1, 1, 0, \dots, 0), \dots,\ x^d = (1, 1, \dots, 1).$$

O conjunto $\{x^1, \dots, x^d\}$ é uma base? O que acontece quando você roda o algoritmo de Gram-Schmidt nele, i.e. calcule o resultado do algoritmo independentemente da dimensão d.[2]

Solução. O complemento ortogonal do vetor $(1, 0, 0, ..., 0)$, no plano gerado junto com o vetor $(1, 1, 0, \dots, 0)$ é o vetor $(0, 1, 0, \dots, 0)$. O complemento ortogonal desse plano é a reta gerada pelo vetor $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Ou seja, ao aplicar Gram-Schmidt no conjunto $\{x^1, \dots, x^d\}$ vamos obter a base canônica do $\mathbb{R}^d$. $\square$

Exercício 4. *Considere $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$, vetores em $\mathbb{R}^3$ e decida se o vetor $x = (1, 1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores u, v e w. Em caso afirmativo, determine os números reais α, β e γ tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Solução. A igualdade vetorial $\alpha u + \beta v + \gamma w = x$ em $\mathbb{R}^3$ equivale ao seguinte sistema de igualdades entre números reais:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 1 \\ 2\alpha + 2\beta &= 1 \\ 3\alpha &= 1. \end{aligned}$$

A terceira igualdade nos diz que $\alpha = 1/3$. Substituindo esse valor na segunda igualdade obtemos a equação

$$\frac{2}{3} + 2\beta = 1,$$

cuja solução é $\beta = 1/6$. Substituindo os dois valores já obtidos na primeira equação ficamos com

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + 2\gamma = 1,$$

obtendo como solução $\gamma = 1/12$. Concluímos assim que x pode ser escrito como combinação linear de u, v e w e os coeficientes dessa combinação linear vão ser, respectivamente, $1/3, 1/6, 1/12$. $\square$

[2]Dica: comece brincando com os casos $d = 2$ e $d = 3$ para ir desenvolvendo uma intuição a respeito do problema.