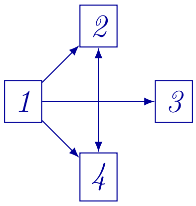
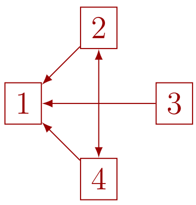
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 5

Exercício 1. *A matriz de adjacência de um grafo com n vértices é a matriz $n \times n$ cuja entrada ij dá 1 se o vértice i aponta para o vértice j no grafo. Por exemplo, a matriz de adjacência do grafo azul abaixo é* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Dado um grafo G, suponhamos que a gente reverta os*



sentidos de todas as setas. Assim, por exemplo, se (1)→(2) passamos a ter (2)→(1). Setas bi orientadas não mudam, obviamente. Qual a relação entre a matriz de adjacência do grafo G e a matriz de adjacência do grafo revertido?

Solução. A matriz de adjacência condensa em formato "0-1" a informação de para onde cada vértice aponta. Assim a entrada a_{ij} dá 1 se o vértice i aponta para o vértice j e dá zero caso contrário. Se a gente reverte o sentido das arestas então a gente troca de lugar as entradas a_{ij} e a_{ji}. Por exemplo, se a gente troca o sentido das setas no grafo azul ele fica A matriz de



adjacência desse grafo é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, se a gente troca os sentidos das arestas de um grafo a gente troca as linhas pelas colunas da matriz de adjacência. □

Exercício 2. *Seja G um grafo com n vértices. O grau de um vértice é a quantidade de arestas que chegam nele. Assim, por exemplo, para o grafo do exercício anterior o grau do vértice (4) é 2. Explique como se pode calcular o grau de qualquer vértice de um grafo usando-se apenas a matriz de adjacência e vetores de $\mathbb{R}^n$.*

Solução. A gente considera a matriz de adjacência com as linhas e colunas trocadas de lugar. Isso é o que a gente chama a transposta da matriz A, e escreve $A^T = [b_{ij}]$. Nesse caso, $b_{ij} = 1$

toda vez que j aponta para i. Ou seja, na linha i da matriz A^T temos uns nas entradas correspondentes aos vértices que "chegam" no vértice i. Por isso, se a gente faz

$$\xi = A^T(\mathbb{I}), \text{ onde } \mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n,$$

então a j ésima entrada do vetor ξ fornece a quantidade de arestas chegam nele, portanto o grau desse vértice. Por exemplo, no caso gráfico azul temos

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, se a gente quiser saber o grau do vértice 4 basta olhar a 4ª entrada do vetor ξ, que é igual a 2 nesse caso. □

Exercício 3. *Considere um 4 tipos diferentes de moedas, real, euro, pesos uruguaios e coras Checas. Para facilitar a referência a elas, vamos numerar as moedas de 1 até 4 (real,...,coroa checa). Seja c_{ij} a quantidade da moeda i que você pode comprar com uma unidade da moeda j. Assim, por exemplo, c_{32} é a quantidade de pesos uruguaios que se pode comprar com 1 euro.*

(a) *Para levar em conta as taxas cobradas pelas casas de câmbio, devemos supor que $c_{ij}c_{ji} < 1$. Explique por que.*
(b) *Se a gente monta uma matriz 4×4 $C = [c_{ij}]$, quais as entradas da diagonal de C (para que o modelo matemático faça sentido)?*
(c) *Suponha que Joana possua x_i unidades da moeda i, para cada $i = 1, ..., 4$. Temos assim um vetor $x \in \mathbb{R}^4$. Considere o vetor $y = C(x) \in \mathbb{R}^4$. Qual o significado da entrada y_4?*

Solução. A diferença entre o valor de compra e venda de uma mesma moeda com outra moeda é o que dá o lucro da casa de câmbio. Como você não vai comprar reais com reais, a entrada na diagonal tem que ser igual 1 para representar a ausência de taxa de conversão entre uma moeda e ela própria. A entrada 4 do vetor y fornece o total de coroas checas que Joana vai obter se trocar todo o dinheiro que tem (em todas as moedas diferentes) por coroas checas. □

Exercício 4. *Seja $p(t) = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell t^\ell$ um polinômio de grau menor ou igual a d. A* ***derivada*** *de p é o polinômio $p'(t) = \sum_{\ell=1}^{d} \ell c_\ell t^{\ell-1}$, de grau menor ou igual a $d-1$. Note que cada polinômio de grau n qualquer é inteiramente determinado por um vetor $(c_0, c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ cujas entradas são os* ***coeficientes*** *de p. Assim, a derivada de polinômios pode ser expressa como uma função $D : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$. Verifique que essa função é linear é encontre sua matriz na base canônica.*

Solução. A fórmula da derivada de um polinômio, descrita no enunciado, nos diz que $D(c_0, c_1, c_2, ..., c_d) = (c_1, 2c_2, 3c_3, ..., dc_d)$. Como a matriz de uma função linear tem como colunas os vetores imagem dos vetores da base canônica, vemos que a matriz de D é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}.$$

□