UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 6

Exercício 1. *Considere a função linear* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *dada por*

$$f(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_d).$$

Calcule a dimensão do núcleo de f*.*

Solução. Suponha que $x \in \mathbb{R}^d$ satisfaça $f(x) = 0$, ou seja, suponha que $x \in N(f)$. Então, todas as entradas de $f(x)$ são iguais a zero. Em particular, como a primeira entrada de $f(x)$ é zero, deduzimos que $x_1 = 0$. Como a segunda entrada de $f(x)$ é zero, devemos ter $x_1 + x_2 = 0$. Mas como $x_1 = 0$ isso implica que $x_2 = 0$ também. Como a terceira entrada de $f(x)$ é zero, devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Mas, já vimos que $x_1 = x_2 = 0$. Deduzimos então que $x_3 = 0$. Olhando as próximas coordenadas de $f(x)$ e prosseguindo com esse raciocínio concluímos que todas as entradas de x são nulas. Portanto $x = 0$. Isso demonstra que $N(f) = \{0\}$. Portanto, $\dim N(f) = 0$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que $\dim Im(f) = d$. □

Exercício 2. *Considere* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y + z, x - y).$$

Calcule a dimensão da imagem de f*.*

Solução. Vamos proceder de forma parecida com o exercício anterior. Tomamos um vetor $(x, y, z) \in N(f)$. Então, temos que $f(x, y, z) = 0$, o que nos leva ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, vemos que

$$0 = 2x + 2y + z = 2(x + y) + z = 2.0 + z = z.$$

Por outro lado, pela terceira equação deduzimos que $x = y$. Substituindo isso na primeira, vemos que

$$x + x = 0 \implies x = 0.$$

Concluímos assim que $x = y = z = 0$. Portanto $N(f) = \{0\}$. Pelo teorema do núcleo e da imagem deduzimos que $\dim Im(f) = 3$. □

Exercício 3. *Considere a função linear* $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(x_1, ..., x_7) = (x_4 + x_5, \sqrt{3^{77}}(x_4 + x_5)).$$

Calcule a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem de f*.*

Solução. Seja $x \in \mathbb{R}^7$. Note que

$$f(x) = (x_4 + x_5, \sqrt{3^{77}}(x_4 + x_5) = (x_4 + x_5)(1, \sqrt{3^{77}}).$$

Portanto, qualquer vetor $f(x)$ é múltiplo do vetor $(1, \sqrt{3^{77}})$. Ou seja, qualquer vetor na imagem de f está contido na reta gerada pelo vetor $(1, \sqrt{3^{77}})$. Portanto, a imagem de f possui dimensão 1 (pois é igual a uma reta). Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim N(f) = 6$. $\square$

Exercício 4. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação de 37,65º no sentido anti-horário. Calcule a dimensão do núcleo de f.*

Solução. Uma rotação não colapsa nenhum vetor, logo $N(f) = \{0\}$ e portanto $\dim Im(f) = 2$. $\square$

Exercício 5. *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ a função linear que calcula a variação de uma coordenada a outra de um vetor $v \in \mathbb{R}^d$, i.e.*

$$f(x_1, \ldots, x_d) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_d - x_{d-1}).$$

Calcule a dimensão da imagem de f.

Demonstração. Seja $x \in N(f)$. Então $f(x) = 0$ e portanto $x_2 - x_1 = 0$, donde concluímos que $x_2 = x_1$. Como $x_3 - x_2 = 0$ concluímos que $x_3 = x_2$. Como $x_4 - x_3 = 0$ concluímos que $x_3 = x_4$. Prosseguindo analisando as coordenadas de $f(x)$ concluímos que $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{d-1} = x_d$. Ou seja, se $x \in N(f)$ então x possui todas as coordenadas iguais e portanto é um múltiplo do vetor $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$. Logo, $\dim N(f) = 1$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem concluímos que $\dim Im(f) = d - 1$.

$\square$

Exercício 6. *Joesley é um empresário emergente que possui uma caminhonete para transporte de containers. Atualmente, Joesley tem dois clientes, uma pequena loja de departamentos, chamada Tem.Er e Cuna, uma pequena fábrica de cosméticos veganos. O container da Tem.Er pesa 50 Kg e tem 3m^3 de volume. O container da Cuna pesa 40 Kg e tem 2m^3 de volume. Joesley cobra R$ 2,20 para cada conteiner da Cuna e R$ 3,00 para cada container da Tem.Er. Se a caminhonete do Jesley não pode carregar mais do que 37000 Kg a capacidade máxima é de 2000 m^3, quantos conteiners da Tem.Er e da Cuna tem que ser levados na caminhonete do Joesley de modo a maxizar a receita dele?*

Solução. Seja x a quantidade de containers da Tem.Er e y a quantidade de containers da Cuna. Então, a receita a ser obtida é dada pela função

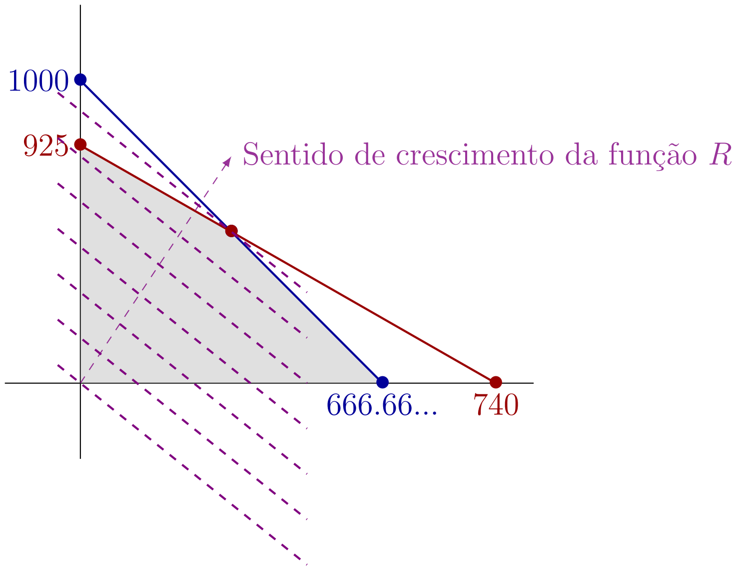
$$R(x, y) = 3x + 2.2y.$$

Nosso objetivo é achar o ponto de máximo dessa função sujeita às restrições

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 2000 \\ 50x + 40y &\leq 3000 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

O conjunto de restrições determina a seguinte restrição no plano desenhada em cinza na figura a seguir. A reta azul é a reta de equação $3x + 2y = 2000$, que é a curva de nível da função $f(x, y) = 3x + 2y$ que dá a primeira restrição. A reta vermelha é a reta de equação $50x + 40y =$

300, a curva de nível da função $g(x,y) = 50x + 40y$ que dá a segunda restrição do problema. As retas tracejadas desenhadas em lilás são as curvas de nível da função $R(x,y)$, que queremos maximizar. O sentido de crescimento das curvas de nível também está indicado na figura. O



objetivo é encontrar o ponto na região coniza e em sua fronteira que esteja no nível mais alto possível da função R. Analisando a figura, vemos que o ponto de interseção entre as retas vermelha e azul, que está na fronteira da região cinza possui esta propriedade. Estando ali, não é possível passar a um nível mais alto sem sair da região. Em qualquer outro ponto da região sempre é possível pular a um nível um pouco mais alto. Por isso, o ponto de máximo é o ponto $x = 300$ e $y = 550$. $\square$