UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 3

Exercício 1. *Suponha que $x, y \in \mathbb{R}^d$ sejam os vetores de retorno de dois investimentos com correlação $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x, y)$. Considere um* blending *$z \in \mathbb{R}^d$ dos investimentos x, y, ou seja $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, com $\lambda \in (0,1)$. Deduza uma fórmula para o risco (o desvio padrão de z) e o retorno do investimento z em função de x, y e λ. Em qual situação (de acordo com a correlação dos vetores x e y) é vantajoso fazer o blending? Suponha que tenhamos um valor β que seja o risco desejado para o nosso investimento. É sempre possível escolher λ de forma que o blending z possua risco exatamente β? Se não, em quais situações é possível?*

Solução. Como $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ e a função $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é linear, i.e.

$$\mu(\alpha x + \beta y) = \alpha\mu(x) + \beta\mu(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

temos que o retorno do investimento z será dado por

$$\mu(z) = \mu(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\mu(x) + (1-\lambda)\mu(y),$$

onde usamos a linearidade de μ com $\alpha = \lambda$ e $\beta = 1-\lambda$.

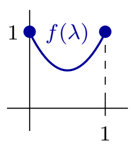
Para o desvio padrão, note que, como $\sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x)$, sempre que λ for positivo[1] podemos escrever

$$\sigma(\lambda x)^2 = \lambda^2\sigma(x)^2 \ \text{ e } \ \sigma((1-\lambda)y) = (1-\lambda)^2\sigma(y)^2.$$

Usando a fórmula do desvio padrão da soma (Lema 5.4.6 do livro-texto) temos que

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \sigma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sqrt{\sigma(\lambda x)^2 + 2\rho\sigma(x)\sigma(y) + \sigma((1-\lambda)^2 y)} \\ &= \sqrt{\lambda^2\sigma(x)^2 + (1-\lambda)^2\sigma(y)^2 + 2\rho\sigma(x)\sigma(y)}.\end{aligned}$$

que é a fórmula procurada. Agora, para responder as últimas perguntas feitas no enunciado, vamos precisar estudar um pouco a função $f(\lambda) = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$, que "aparece" na fórmula que deduzimos acima. Em cima do intervalo $(0,1)$ o gráfico de f é uma parábola,



côncava para cima, cujo vértice é ponto $(0.5, 0.5)$. Além disso $f(\lambda) < 1$ para todo $\lambda \in (0,1)$.

Suponha que a correlação seja $\rho \leq 0$. Então, o termo que $2\rho\sigma(x)\sigma(y)$ aparece na fórmula é não-positivo (quer dizer, é zero ou negativo), logo, nesse caso podemos estimar que

$$\sigma(z) \leq \sqrt{\lambda^2\sigma(x)^2 + (1-\lambda)^2\sigma(y)^2}.$$

Um dos investimentos tem o maior risco, portanto podemos supor sem perda de generalidade que $\sigma(y) \leq \sigma(x)$. Então

$$\sqrt{\lambda^2\sigma(x)^2 + (1-\lambda)^2\sigma(y)^2} \leq \sqrt{\lambda^2\sigma(x)^2 + (1-\lambda)^2\sigma(x)^2} = \sqrt{\sigma(x)^2(\lambda^2 + (1-\lambda)^2)}.$$

[1] Veja o Lema 5.4.5 do livro texto do curso.

Concluímos assim que $\sigma(z) \leq \sigma(x)\sqrt{f(\lambda)}$. Como $f(\lambda) < 1$, vemos que $\sqrt{f(\lambda)} < 1$ e portanto $\sigma(z) < \sigma(x)$. Isso mostra que se os investimentos forem nada ou negativamente correlacionados, então o risco de z é menor do que o máximo dos riscos entre x e y. Logo é vantajoso fazer o blending nesse caso. Note que como $\sqrt{f(\lambda)} \geq \sqrt{0.5}$, não dá para fazer o risco ficar arbitrariamente pequeno por exemplo. Portanto, não são todos os valores β que são possíveis de ser obtidos. □

Exercício 2. *Seja $x \in \mathbb{R}^{149}$. Suponha que $\mathrm{rms}(x) = 2$. Use a desigualdade de Chebyshev para explicar porque necessariamente x tem menos do que 6 entradas com valor absoluto maior do que 11.*

Solução. Tome $\varepsilon = 10 = 5\,\mathrm{rms}(x)$. Aplicando a desigualdade de Chebychev vemos que o número máximo n de entradas de x que podem ser maiores ou iguais a 10 satisfaz

$$\frac{n}{149} \leq \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{1}{25} \implies n \leq \frac{149}{25} = 5.96.$$

Logo, certamente x possui menos do que 6 entradas com valor absoluto < 11. □

Exercício 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$ vetores num espaço euclideano. Se a gente pensa neles como pontos nesse espaço, então a reta que liga esses pontos pode ser representada como o sendo o conjunto*

$$r = \{\theta a + (1-\theta)b; \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^d$ um outro vetor qualquer. É intuitivo imaginar que existe um ponto em cima da reta r que está mais próximo de x do que qualquer outro ponto de r. Encontre uma fórmula que expressa esse ponto em função de x, a e b.[2]

Solução. Seja $p(\theta) = \theta a + (1-\theta)b$ um ponto genérico na reta. Observe que

$$p(\theta) = b + \theta(a-b).$$

Estamos procurando o valor de θ de tal modo que $p(\theta)$ esteja o mais próximo possível de x, dentre todas as possibilidades para θ. Pelo teorema de Pitágoras, isso ocorre exatamente quanto $x - p(\theta)$ é ortogonal a $a - b$. Logo, estamos procurando θ tal que

$$\langle x - p(\theta), a-b\rangle = 0.$$

Note que $x - p(\theta) = x - b - t(a-b)$, portanto (usando a linearidade do produto interno)

$$\langle x - p(\theta), a-b\rangle = \langle x-b, a-b\rangle - \theta\langle a-b, a-b\rangle.$$

Concluímos assim que

$$\theta = \frac{\langle x-b, a-b\rangle}{\langle a-b, a-b\rangle}.$$

□

Exercício 4. *É possível encontrar um vetor $x \in \mathbb{R}^d$ para o qual $\mathrm{rms}(x) < \mu(x)$? Se $\mathrm{rms}(x) = \mu(x)$, o que você pode falar sobre x?*

[2] Esse é um exemplo simples de um problema de otimização. Uma área da matemática dedicada a resolver problemas de "máximos e mínimos" como esse, e que tem inúmeras aplicações, da medicina a inteligência artificial. Se você já fez cálculo, esse exercício pode ser resolvido com a técnica do "deriva e iguala a zero", mas tem que colocar a situação aqui em tela adequadamente no *framework* do cálculo.

Solução. Lembre da fórmula linda que vimos no livro-texto do curso (veja a igualdade (5.1)):

$$\operatorname{rms}(x)^2 = \mu(x)^2 + \sigma(x)^2.$$

Deduzimos a partir dela que $\operatorname{rms}(x)^2 \geq \mu(x)^2$, e portanto $\operatorname{rms}(x) \geq \mu(x)$. Logo, não pode existir vetor $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $\operatorname{rms}(x) < \mu(x)$. Por outro lado, se ocorre a igualdade entre $\operatorname{rms}(x)$ e $\mu(x)$ deduzimos da fórmula linda também que $\sigma(x) = 0$. Como $\sigma(x) = \operatorname{rms}(x^c)$, e como $\operatorname{rms} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é uma norma, é uma medida de comprimento, isso nos leva a concluir que $x^c = 0$. Pela definição de x^c, por sua vez, segue que $x_j - \mu(x) = 0$, para todo $j = 1, ..., d$, ou seja $x_j = \mu(x)$.

Concluímos assim que todas as entradas do vetor x são iguais, se ocorrer a igualdade $\operatorname{rms}(x) = \mu(x)$. $\square$