

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada

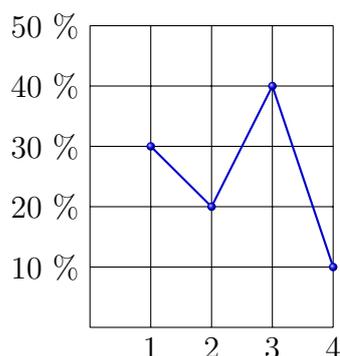
Professor: Bruno Santiago

Lista de exercícios - Terceira Semana

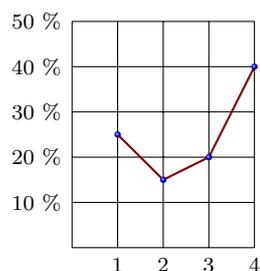
1. ESCRREVENDO O RESULTADO DE MODELOS MATEMÁTICOS

Como discutimos na aula, muitas vezes o resultado de um modelo matemático é uma função. Vamos ver a seguir situações que podem ser modeladas a partir de uma função.

Exercício 1. A família do matemático X organiza os gastos por grupos: Grupo 1=Alimentação, Grupo 2=Contas da casa, Grupo 3=Lazer e Grupo 4=Investimento. Dessa forma a cada mês, as despesas da família podem ser expressas como uma função $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow (0, 1)$ que a cada número de 1 a 4 fornece a porcentagem do orçamento do mês que foi despendida com o grupo correspondente a esse número. Suponha que no mês atual o gasto da família seja esse plotado em forma gráfica abaixo. Suponha que X queira aumentar para 40% do orçamento mensal o nível de investimento da família. Proponha uma nova função para o gasto com cada grupo de modo a atingir esse objetivo.



Solução. Olhando o gráfico vemos que há um alto dispêndio em lazer. Para não reduzir drasticamente o gasto com lazer da família, a proposta é reduzir um pouquinho o consumo em alimentação e nas contas da casa, e o resto reduzir no lazer. Assim o novo gráfico vai ficar como abaixo. □



Exercício 2. *O custo de uma corrida de Uber tem sempre dois componentes: um custo fixo, uma espécie de “bandeira” que serve para a corrida dar um valor mínimo ao motorista e um componente que varia proporcionalmente à distância percorrida. Esse é o custo total, e em geral o dinheiro que vai para o motorista é uma porcentagem do custo total, ficando o restante com a Uber. Em lugares onde há muito trânsito o tempo da viagem também pode entrar na conta. Há também a chamada “tarifa dinâmica”, um fator multiplicador que oscila conforme a oferta e a demanda. O objetivo desse exercício é propor um modelo matemático (uma função) que especifique o lucro obtido pelo motorista com a corrida de acordo com a distância percorrida. Use como dado que a bandeira custa R\$ 7,20, que uma corrida de 8Km custa em média R\$ 20,00, e que a Uber fica sempre com 30% do custo total da viagem. Você pode propor um modelo simplificado que não leva em conta a variação do custo por causa da demora com o trânsito e nem o fator multiplicador da tarifa dinâmica.*

Solução. Vamos propor um modelo no qual a função que descreve a variação do lucro com a distância percorrida numa corrida só dependa da distância percorrida. Assim, temos um valor inicial fixo de 7.2 e uma parcela que varia proporcionalmente à distância. Matematicamente, a função $\ell(d)$ será escrita então como

$$\ell(d) = 0.7(7.2 + \beta d) = 5.04 + 0.7\beta d.$$

Nesse modelo, β é o fator multiplicador que fornece o ganho a cada quilômetro rodado a mais. O custo de uma corrida nesse modelo é $7.2 + \beta d$, e o lucro é 70% disso. Devemos usar os dados para estimar o parâmetro β . Como o custo de uma corrida de 8 Km é 20 reais, somos levados a equação

$$7.2 + 8\beta = 20 \implies \beta = 1.6.$$

Portanto, de acordo com o nosso modelo, o lucro obtido pelo motorista em função da distância percorrida na corrida é dado pela expressão

$$\ell(d) = 5.04 + 1.12d.$$

□

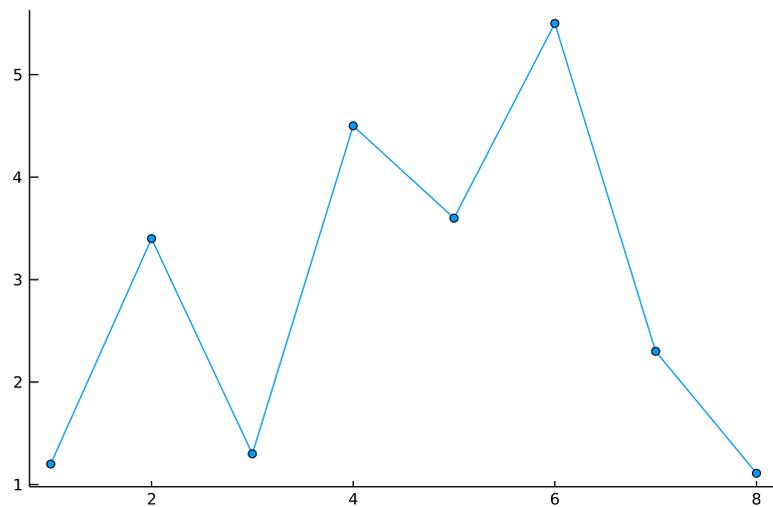
Exercício 3. *A função esboçada graficamente abaixo é uma concatenação de funções afins, seu gráfico é portanto uma concatenação de retas. Analisando o gráfico, determine em qual intervalo do seu domínio a função teve um crescimento mais violento.*

Solução. Observe olhando o gráfico que de 3 para 4 o gráfico sobe de ~ 1.2 para ~ 4.7 , e que essa é a maior variação que se nota no gráfico. □

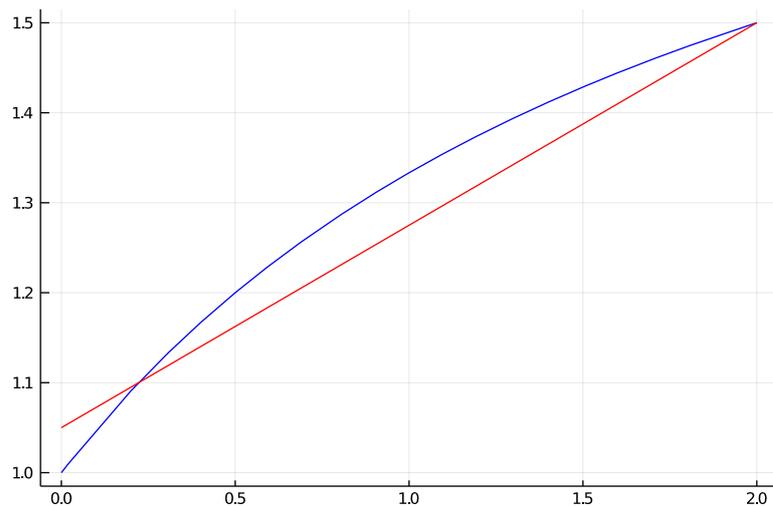
Exercício 4. *Um cientista de dados está analisando a variação na receita de várias empresas em função do investimento em publicidade. A coleta de dados gerou o gráfico abaixo. No eixo horizontal, os valores estão em milhões de reais e no eixo vertical os valores representam o fator multiplicador na receita da empresa para cada valor em milhões investido. Assim, por exemplo, lendo o gráfico vê-se que investindo 2 milhões em publicidade multiplica-se a receita por 1.5, e investindo zero multiplica-se por 1. Qual o aumento percentual na receita investindo-se 500 mil reais em publicidade segundo esse gráfico?*

Solução. Note que $f(0.5) = 1.2$, logo temos um aumento de 20% nesse caso. □

Exercício 5. *Esse exercício é uma continuação do exercício anterior. Para poder fazer previsões, estimativas, com o gráfico gerado o analista de dados precisa de uma função explícita que gere uma aproximação do gráfico. Proponha uma aproximação do gráfico por*



uma reta (i.e. por uma função afim) e use a sua aproximação para estimar o aumento percentual na receita investindo-se 1.1 milhão de reais. Dê uma estimativa para o erro cometido com a aproximação que você está propondo.



Solução. Devemos obter uma função do tipo $f(x) = ax + b$ cujo gráfico esteja “uniformemente” próximo do gráfico dado. Como o gráfico de f é uma reta, basta escolher dois pontos no plano para estimar os parâmetros a e b . Escolhemos a reta que passa pelos pontos $(0, 1.05)$ e $(2, 1.5)$. Assim, como $f(0) = 1.05$ temos que $b = 1.05$ e como $f(2) = 1.5$ temos que

$$2a + 1.05 = 1.5 \implies a = 0.225.$$

Logo, a expressão da reta que “interpola” o gráfico dado é

$$f(x) = 0.225x + 1.05.$$

Vemos que $f(1.1) = 0.225 \times 1.1 + 1.05 = 1,2975$. O gráfico de f é a reta vermelha na figura acima. Veja que podemos estimar grosseiramente que o maior erro cometido ao estimar os dados com a função f ocorre quando $x = 1$ e que temos uma variação de cerca de 0.4. \square