Álgebra Linear

Aula Teórica das Semanas 08 e 09

Bruno Santiago

11 de novembro de 2020

Equações lineares

Sejam $v_1 = (a_{11}, ..., a_{d1}), ..., v_k = (a_{1k}, ..., a_{dk})$ vetores em $\mathbb{R}^d$, e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v^1 & \dots & v^k \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ a função linear cuja matriz na base canônica é A. Então, dado $x \in \mathbb{R}^k$, a igualdade vetorial $f(x) = b$ admite solução, se e somente se $\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell v^\ell = b$, ou seja, se b se escreve como combinação linear de $\{v_1, ..., v_k\}$ com coeficientes dados pelas coordenadas de x.

Equações lineares - reformulando

A equação

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1m}x_m = b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nm}x_m = b_n. \end{array}$$

admite solução se, e somente se

$$b \in \operatorname{Im}(f),$$

onde $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é a função linear cuja matriz na base canônica é a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ dos coeficientes da equação linear. Em particular, se $\dim \operatorname{Im}(f) = n$ a equação sempre admite solução.

Equações lineares - existência de soluções

Seja $x \in \mathbb{R}^m$ uma solução da equação linear. Se $v \in N(f)$ é um elemento do núcleo de f então $x + v$ também é solução da equação. Em particular, **somente três possibilidades existem: ou a equação não tem solução, ou tem uma única solução, ou possui infinitas soluções.**

A matriz transposta

Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ uma função linear, representada na base canônica pela matriz $k \times d$

$$F = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kd} \end{bmatrix}.$$

A *transposta* de f é a função linear $f^T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ representada na base canônica pela matriz $F^T = [a_{ji}]_{d \times k}$. Ou seja, as linhas de F^T são as colunas de F.

Propriedade fundamental da matriz transposta

Theorem

Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e para todo $y \in \mathbb{R}^k$, vale que

$$\langle x, f^T(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

Posto linha × posto coluna

Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ linear. O posto de f (chamado em muitos livros de **posto coluna**) é a dimensão do subespaço gerado por suas colunas. O posto da transposta (**posto linha**) de f é a dimensão do subespaço gerado pelas linhas de f.

Teorema

posto linha=posto coluna

O método de eliminação de Gauss

Aplicação I - Solução de equações lineares

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\
4x_1 + 5x_3 + 6x_4 &= 11 \\
7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss

Aplicação I - Solução de equações lineares

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10\\
4x_1 + 5x_3 + 6x_4 &= 11\\
7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\\ 11\\ 12 \end{bmatrix}.$$ Escalonamento da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10\\ 4 & 5 & 6 & 11\\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 3 & 6 & 29\\ 0 & 6 & 12 & 58 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 3 & 6 & 29\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos assim, que a equação procurada é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 3x_2 + 6x_3 &= 29 \end{aligned} \tag{1}$$

Vemos que qualquer vetor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas cumprem as relações

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{29}{6} - \frac{x_2}{2} \\ x_1 &= \frac{-9}{2} + \frac{x_2}{2} \end{aligned}$$

é solução do sistema.

O método de eliminação de Gauss

Aplicação II - Dimensão do subespaço gerado

Considera agora o seguinte problema: os vetores $x = (1, 2, 3)$, $y = (4, 5, 6)$ e $z = (7, 8, 9)$ do $\mathbb{R}^3$ são LI ou LD? E qual a dimensão do subespaço gerado por $\{x, y, z\}$?

O método de eliminação de Gauss

Aplicação II - Dimensão do subespaço gerado

Considera agora o seguinte problema: os vetores $x = (1, 2, 3)$, $y = (4, 5, 6)$ e $z = (7, 8, 9)$ do $\mathbb{R}^3$ são LI ou LD? E qual a dimensão do subespaço gerado por $\{x, y, z\}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

cujas linhas são $\ell_1 = x$, $\ell_2 = y$ e $\ell_3 = z$. A segunda matriz em (1),

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

foi obtida a partir de A colocando na segunda e na terceira linhas, respectivamente, os vetores

$$4\ell_1 - \ell_2 = 4x - y \text{ e } 7\ell_1 - \ell_2 = 7x - z.$$

Dessa forma, vemos que

Em cada etapa do método de eliminação da Gauss, as linhas da próxima matriz vão ser combinações lineares das linhas da matriz atual.
Além disso, as combinações lineares são escolhidas de forma a tornar a matriz triangular superior.

E qual a dimensão do subespaço gerado?

Dessa forma, vemos que

Em cada etapa do método de eliminação da Gauss, as linhas da próxima matriz vão ser combinações lineares das linhas da matriz atual.
Além disso, as combinações lineares são escolhidas de forma a tornar a matriz triangular superior.

E qual a dimensão do subespaço gerado?Ora, observe que

$$4x - y = (0, 3, 6) \in S(\{x, y, z\})$$

e que os vetores $x = (1, 2, 3)$ e $(0, 3, 6)$ são LI, pois não são colineares. Assim exibimos dois vetores no subespaço gerado $S(\{x, y, z\})$ que são L, x e $4x - y$. Logo a dimensão do subespaço gerado é 2.

Definition

Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita e seja $f : X \to Y$ uma função linear. A *nulidade* de f é a dimensão de seu núcleo. O *posto* de f é a dimensão da sua imagem.

Com essa definição o teorema do Núcleo e da Imagem diz que

$$\textbf{posto} + \textbf{nulidade} = \dim X$$

Definition

Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita e seja $f : X \to Y$ uma função linear. A *nulidade* de f é a dimensão de seu núcleo. O *posto* de f é a dimensão da sua imagem.

Com essa definição o teorema do Núcleo e da Imagem diz que

$$\textbf{posto} + \textbf{nulidade} = \dim X$$

Teorema

A imagem de f é o subespaço gerado velos vetores coluna de sua matriz, ou seja

$$Im(f) = \mathcal{S}(\{f(b^1), ..., f(b^k)\}),$$

onde $\mathcal{B} = \{b^1, \ldots, b^k\}$ é uma base do espaço X.

Legal professor, muito bonito, mas e quando cair na prova, o que eu faço???

Legal professor, muito bonito, mas e quando cair na prova, o que eu faço???

Exemplo

Qual o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$?

Legal professor, muito bonito, mas e quando cair na prova, o que eu faço???

Exemplo

Qual o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$?Devemos calcular a dimensão do subespaço gerado pelos vetores $A(e_1) = (1, 2, 3)$, $A(e_2) = (4, 5, 6)$ e $A(e_3) = (7, 8, 9)$.

Legal professor, muito bonito, mas e quando cair na prova, o que eu faço???

Exemplo

Qual o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$?Devemos calcular a dimensão do subespaço gerado pelos vetores $A(e_1) = (1, 2, 3)$, $A(e_2) = (4, 5, 6)$ e $A(e_3) = (7, 8, 9)$.Isso implica aplicar o método de eliminação à matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

que é a transposta de A. Já vimos acima que a dimensão do subespaço gerado pelas linhas dessa matriz é 2,

Legal professor, muito bonito, mas e quando cair na prova, o que eu faço???

Exemplo

Qual o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$?Devemos calcular a dimensão do subespaço gerado pelos vetores $A(e_1) = (1, 2, 3)$, $A(e_2) = (4, 5, 6)$ e $A(e_3) = (7, 8, 9)$.Isso implica aplicar o método de eliminação à matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

que é a transposta de A. Já vimos acima que a dimensão do subespaço gerado pelas linhas dessa matriz é 2,**aplicando a igualde posto-linha=posto-coluna** o posto de A é dois.

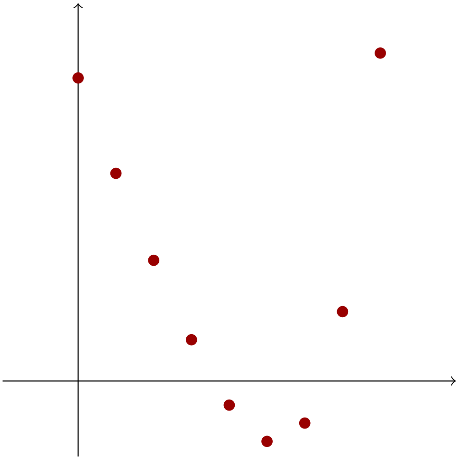
Aplicação em "criptografia"

O problema dos herdeiros do barão do café

O barão do café, João Arabica, tem 5 herdeiros que nunca se entenderam ao longo da vida do Seu João. Homem sábio que era, quando fez seu testamento Seu João já deixou bem discriminada a parte de cada um na herança. No entanto, havia um item que o velho, quase de pirraça, quis que os irmãos se entendessem entre si para a divisão: o cofre contendo os diamantes e o diário da finada Dona Maria. Nenhum dos cinco herdeiros conhecia a senha do cofre. Seu João, que gostava muito de matemática e já havia usado sua fortuna para bancar estudos de inúmeros jovens de talento promissor para a rainha das ciências, deixou no testamento apenas a seguinte informação a respeito da senha: a cada irmão, seguindo a ordem alfabética, deixou um número real, que lhe foi transmitido pelo advogado da família, de modo que cada irmão só tomou conhecimento do seu número. Assim sendo, somente os 5 irmãos juntos podem recuperar a senha do cofre (que contém 6 dígitos), de modo ninguém pode passar a perna em ninguém. Como e porque é possível fazer isso?

Interlúdio: interpolação polinomial

Considere uma lista de $d+1$ pontos $(t_0, y_0),\ldots,(t_d, y_d)$ no plano $\mathbb{R}^2$. Como encontrar (se é que existe) um polinômio $p(t) = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell t^\ell$ de grau d cujo gráfico passe exatamente pelos pontos dados? Ou seja, de modo que $p(t_i) = y_i$, para todo $i = 0, \ldots, d$.



Procuramos um polinômio de grau d

$$p(t) = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell t^\ell$$

que satisfaça $p(t_i) = y_i$ para $i = 0, ...d$.

Procuramos um polinômio de grau d

$$p(t) = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell t^\ell$$

que satisfaça $p(t_i) = y_i$ para $i = 0, ...d$.Essas $d + 1$ igualdades podem ser reescritas usando a *Matriz de Vandermonde:*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^{d-1} & t_0^d \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^{d-1} & t_1^d \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_d & \dots & t_d^{d-1} & t_d^d \end{bmatrix}.$$

Procuramos um polinômio de grau d

$$p(t) = \sum_{\ell=0}^{d} c_\ell t^\ell$$

que satisfaça $p(t_i) = y_i$ para $i = 0, ...d$.Essas $d + 1$ igualdades podem ser reescritas usando a *Matriz de Vandermonde:*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^{d-1} & t_0^d \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^{d-1} & t_1^d \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_d & \dots & t_d^{d-1} & t_d^d \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes $c_0, ..., c_d$ de um candidato a polinômio interpolador satisfazem as equações de interpolação se, e somente se:

$$V(c) = y,$$

onde $c = (c_0, ..., c_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $y = (y_0, ..., y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Onde a mágica acontece

Proposição

Seja V a matriz de Vandermonde. Então, $\dim N(V) = 0$. Além disso, retirando-se qualquer quantidade de linhas a dimensão do núcleo fica positiva.

Onde a mágica acontece

Proposição

Seja V a matriz de Vandermonde. Então, $\dim N(V) = 0$. Além disso, retirando-se qualquer quantidade de linhas a dimensão do núcleo fica positiva.Em particular, $\dim Im(V) = d + 1$ e portanto a equação $V(c) = y$ admite uma única solução qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^{d+1}$

Onde a mágica acontece

Proposição

Seja V a matriz de Vandermonde. Então, $\dim N(V) = 0$. Além disso, retirando-se qualquer quantidade de linhas a dimensão do núcleo fica positiva.Em particular, $\dim Im(V) = d + 1$ e portanto a equação $V(c) = y$ admite uma única solução qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^{d+1}$

$\implies$ podemos encontrar o polinômio interpolador resolvendo a equação $V(c) = y$ usando o método de eliminação de Gauss!!!

Solução do problema dos herdeiros do Barão do Café

O malandro do Seu João primeiro bolou um polinômio de grau 4:

$$p(t) = 4.6789999 + 35.76t + \sqrt{\pi}t^2 + t^3 - 7t^4,$$

de modo que a senha do cofre é 467899. A cada irmão foi dada uma informação $p(n)$, para cada n de 1 até 5. Assim, somente os cinco irmãos juntos podem recuperar a senha, pois somente com as cinco linhas completas a matriz de Vandermonde possui núcleo trivial.

Solução do problema dos herdeiros do Barão do Café

O malandro do Seu João primeiro bolou um polinômio de grau 4:

$$p(t) = 4.6789999 + 35.76t + \sqrt{\pi}t^2 + t^3 - 7t^4,$$

de modo que a senha do cofre é 467899. A cada irmão foi dada uma informação $p(n)$, para cada n de 1 até 5. Assim, somente os cinco irmãos juntos podem recuperar a senha, pois somente com as cinco linhas completas a matriz de Vandermonde possui núcleo trivial.

A senha do cofre são os 4 primeiros dígitos de um número real $c_0 \in \mathbb{R}$, que é o coeficiente livre de um polinômio $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$. Ao herdeiro j foi passada a informação $y_j = p(j)$, para cada $j = 1, ..., 5$.