

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Bruno Santiago

Lista de exercícios 8

Exercício 1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. A matriz de Gram associada a A é a matriz $G = A^T A$, onde A^T é a transposta de A . Determine a matriz de Gram G nesse caso e calcule o seu posto.

Exercício 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB \neq BA$.

Exercício 3 (Produto de Rotações). Sejam

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Calcule as matrizes A^{-1} e B^{-1} e calcule os produtos AB , AB^{-1} . Verifique que $AB = BA$. Porque as matrizes desse exercício comutam e as do exercício anterior não comutam?

Exercício 4. Seja G um grafo e B sua matriz de incidência (Veja a seção 11.2 do livro do curso para a definição). A matriz Laplaciana do grafo é a matriz $L = AA^T$, que é a matriz de Gram da transposta da matriz de incidência. O grau de um vértice do grafo é o número de vértices conectados com ele (em qualquer direção) e o número de distinção de um grafo é a quantidade total de arestas que conectam vértices distintos. Descreva as entradas da matriz Laplaciana em função dessas duas quantidades.

Exercício 5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^5 .