UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 11

Exercício 1. *Calcule os autovalores e os autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha um vetor $v = (x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ *(ou seja, as entradas do vetor são números positivos menores do que 1, como* 0.5634*) aleatoriamente. Aplique a matriz sucessivamente muitas vezes, obtendo os vetores*

$$v, A(v), A^2(v), A^3(v), \ldots, A^\ell(v), \ldots, A^n(v).$$

Você escolhe o valor de n*, pode ser 57 por exemplo. Para cada* $\ell < n$*, olha as coordenadas do vetor* $v^\ell = A^\ell(v)$ *e toma só a parte fracionária desses valores. Ou seja, se* $v^\ell = (x_\ell, y_\ell)$ *você olha o vetor* $u^\ell = (\{x_\ell\}, \{y_\ell\})$*. Por exemplo, se* $x_\ell = 37.8999999$ *então* $\{x_\ell\} = 0.8999999$*. Em particular, as entradas de* u^ℓ *são números entre 0 e 1 também. Tente plotar a lista de vetores* u^ℓ*, com* $\ell = 0, ..., n$*.. Você consegue detectar algum padrão nessa sequência? Faz diferença o ponto inicial* v*?*

Exercício 2. *Calcule os autovalores e os autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha um vetor $v = (x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ *(ou seja, as entradas do vetor são números positivos menores do que 1, como* 0.5634*) aleatoriamente. Aplique a matriz sucessivamente muitas vezes, obtendo os vetores*

$$v, A(v), A^2(v), A^3(v), \ldots, A^\ell(v), \ldots, A^n(v).$$

Você escolhe o valor de n*, pode ser 98 por exemplo. Para cada* $\ell < n$*, olha as coordenadas do vetor* $v^\ell = A^\ell(v)$ *e toma só a parte fracionária desses valores. Ou seja, se* $v^\ell = (x_\ell, y_\ell)$ *você olha o vetor* $u^\ell = (\{x_\ell\}, \{y_\ell\})$*. Por exemplo, se* $x_\ell = 37.8999999$ *então* $\{x_\ell\} = 0.8999999$*. Em particular, as entradas de* u^ℓ *são números entre 0 e 1 também. Tente plotar a lista de vetores* u^ℓ*, com* $\ell = 0, ..., n$*.. Você consegue detectar algum padrão nessa sequência? Você consegue ver alguma diferença com o exercício precedente?*

Exercício 3 (Calculando o PageRank de um Grafo)**.** *O PageRank de um grafo* G *de* n *vértices é um vetor* $v \in \mathbb{R}^n$ *cuja entraja* v_ℓ *reflete a "importância" do vértice* ℓ *dentro da estrutura de links do grafo. A ideia é que um vértice de importância alta é muito citado por outros vértices de importância também altinha, de forma que se a gente colocar alguém para "surfar aleatoriamente" pelas ligações do grafo, como a gente faz navegando pela internet clicando em links que conectam uma página a outra, a chance de cair num vértice é tão alta quanto for a sua importância. O PageRank foi inventado pelos criadores do Google, Lawrence Page e Sergey Brin e está na base do mecanismo de busca. Para calcular o PageRank, a gente deve olhar* *para cada vértice j do grafo o grau de saída dele: ou seja, o número d_j de vértices que são apontados pelo vértice j. Formamos assim uma matriz $B = [\beta_{ij}]_{n\times n}$ tal que $\beta_{ij} = 1/d_j$ se $j \to i$ e $\beta_{ij} = 0$ caso contrário. Considere também a matriz $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ onde $c_{ij} = 1/n$ para todo i, j. O* ***PageRank*** *do grafo G é o único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ cujas entradas somam 1*

$$\sum_{\ell=1}^{n} v_\ell = 1, \tag{1}$$

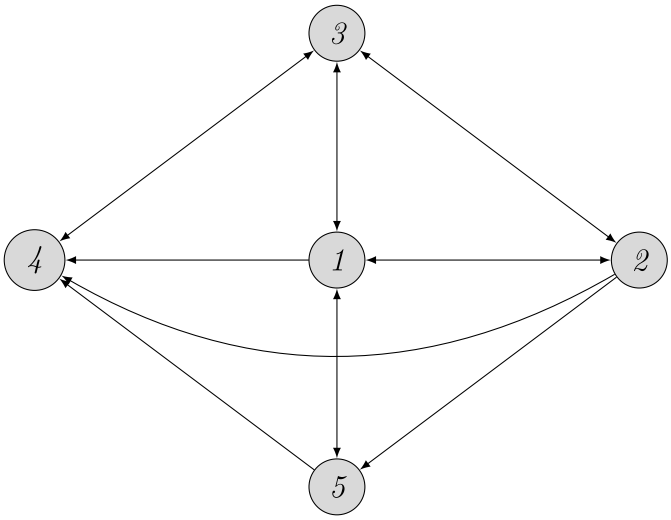
e que satisfaz

$$A(v) = v, \tag{2}$$

onde A é a matriz

$$A = 0.85B + 0.15C.$$

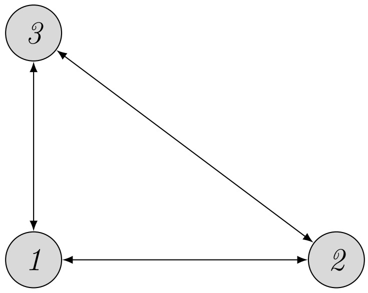
Considere o grafo G a seguir Calcule o PageRank de G por dois métodos diferentes: primeiro



resolva o sistema linear formado pelas equação vetorial (2) e pela equação numérica (1). Depois, utilize o ***método da potência****: aplique aplique A sucessivamente ao vetor $u = (1/5, ..., 1/5) \in \mathbb{R}^5$ e verifique numericamente que*

$$\lim_{n\to\infty} A^n(u) = v.$$

Repita o mesmo exercício para o grafo



Exercício 4. *Calcule o determinante da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$