

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Bruno Santiago

Lista de exercícios 8

Exercício 1. Encontre um polinômio de grau 3, ou seja uma função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo

$$p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$$

cujos gráfico no plano \mathbb{R}^2 passe pelos pontos $(1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-5)$ e $(4,0)$.

Solução. As incógnitas do problema são os coeficientes c_0, c_1, c_2 e c_3 do polinômio p . Para determiná-los temos como informação 4 valores assumidos pelo polinômio. Esses 4 valores resultam nas 4 equações abaixo:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 3 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= -2 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3 &= -5 \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver, utilizamos o método de eliminação de Gauss-Jordan: Vemos assim que o po-

Solução utilizando o Método de Gauss-Jordan

(Algorithm) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & -8 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & -8 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 25 & -11 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 25 & -11 \\ 0 & 2 & 14 & 62 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 25 & -11 \\ 0 & 2 & 14 & 62 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 1 \cdot L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & -6 \\ 0 & 2 & 14 & 62 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 - 2 \cdot L_2 \rightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 52 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \cdot (1/4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 8 & 52 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 - 8 \cdot L_3 \rightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 26 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \cdot (1/26)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/13 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \cdot (6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \cdot (1/6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 6 \cdot L_4 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 3 \cdot L_4 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 1 \cdot L_4 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 3 \cdot L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2 \cdot L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 1 \cdot L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 1 \cdot L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right)$$

linômio procurado é $p(t) = 4 + 3t - 5t^2 + t^3$. □

Exercício 2 (Misturando óleo cru). Um conjunto de K diferentes tipos de óleo cru são misturados, em proporções $\theta_1, \dots, \theta_K$. Obviamente temos que $\sum_{\ell=1}^K \theta_\ell = 1$ (por que?). A cada tipo k de óleo cru um químico associa um vetor $c_k \in \mathbb{R}^n$, cujas entradas são as respectivas concentrações de n diferentes tipos de constituintes (como, por exemplo hidrocarbonetos específicos). O químico deseja que o óleo mistura atinja para cada $j = 1, \dots, n$ a concentração b_j do constituinte j . Essa informação produz um vetor $b \in \mathbb{R}^n$. Encontre uma matriz A tal que a equação linear $A(\theta) = b$

traduza matematicamente o problema de escolher a proporção de cada óleo cru de forma que a mistura tenha as concentrações desejadas.

Solução. A matriz A deve ser uma matriz com n linhas e K colunas. Os vetores $c_k \in \mathbb{R}^n$ devem ser as colunas de A . \square

Exercício 3. Considere a função linear $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 7x_5, x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5, x_3 + x_2, x_5 - 89x_4, x_3 - 6.5x_1).$$

Calcule o posto de f e decida se a equação linear $f(x) = v$, onde $v = (1, 2, 3, 4, 5)$ admite solução.

Solução. Calcular o posto de f e decidir se a equação $f(x) = v$ admite solução pode ser resolvido diretamente pela aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução utilizando o Método de Gauss-Jordan Lin

(Algoritmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 6,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 6,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 1 \cdot L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 6,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5 - (6,5) \cdot L_1 \rightarrow L_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & -6,5 & -18,5 & -32,5 & 45,5 & -1,5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 / (-2) \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & -6,5 & -18,5 & -32,5 & 45,5 & -1,5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 1 \cdot L_2 \rightarrow L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & -6,5 & -18,5 & -32,5 & 45,5 & -1,5 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(6,5)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5,5 & -13 & 26 & -4,75 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5 - (-6,5) \cdot L_2 \rightarrow L_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5 & 9,5 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5 / (-89) \rightarrow L_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5 & 9,5 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-0,011236)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5 & 9,5 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 / (-89) \rightarrow L_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5 & 9,5 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3,5)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9,5393 & -23,843 & -0,044944 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5 - (3,5) \cdot L_4 \rightarrow L_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9,5393 & -23,843 & -0,044944 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5 / (9,5393) \rightarrow L_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2,3843 & -0,004714 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(0,10483)}$$

\square

Exercício 4. Sejam $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ e $v_3 = (7, 7, 7)$. Decida se o vetor $u = (\pi, 8, 1)$ pertence ao subespaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$ ou não. Caso ele pertença, encontre os coeficientes α_1, α_2 e α_3 tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = u.$$

Solução. O problema proposto equivale a resolver o sistema

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = \pi$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 8$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 = 1$$

Aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 2 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -2\ell_1 + \ell_2; \ell_3 \rightarrow -3\ell_1 + \ell_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 0 & -4 & -7 & 8 - 2\pi \\ 0 & -8 & -14 & 1 - 3\pi \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,011236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(0,011236)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,011236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 - (-0,011236) \cdot L_5 \rightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(3) L_3 - (-3) \cdot L_5 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - (-3) \cdot L_5 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - (-7) \cdot L_5 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 3 \cdot L_4 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 3 \cdot L_4 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 5 \cdot L_4 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2 \cdot L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 3 \cdot L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 1 \cdot L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\rightarrow_{\ell_3 \rightarrow -2\ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 0 & -4 & -7 & 8 - 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & -7 - 17\pi \end{bmatrix}$$

Como obtemos uma linha de zeros correspondente a uma entrada diferente de zero na matriz aumentada vemos que o sistema não possui solução. \square

Exercício 5. Três crianças (Guido, Tomás e Sofia) se reencontram estão encantadas com suas novas canetinhas coloridas, cada uma com um tamanho diferente. Juntando três das canetas do Guido, duas do Tomás e uma da Sofia e usando uma régua as crianças medem que o comprimento total dá 39. Juntando duas das canetinhas do Guido, três do Tomás e uma da Sofia o comprimento dá 34. Juntando uma caneta do Guido, 2 do Tomás e 3 da Sofia o comprimento dá 26. Calcule os comprimentos das canetinhas.

Solução. Modelando o problema com as variáveis x, y, z descrevendo, respectivamente, os comprimentos das canetas de Guido, Tomás e Sofia, o problema proposto equivale ao sistema

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Resolvendo pelo método de Gauss-Jordan obtemos como solução $(x, y, z) = (9.25, 4.25, 2.75)$. \square