UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 8

Exercício 1. *Encontre um polinômio de grau 3, ou seja uma função* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *do tipo*

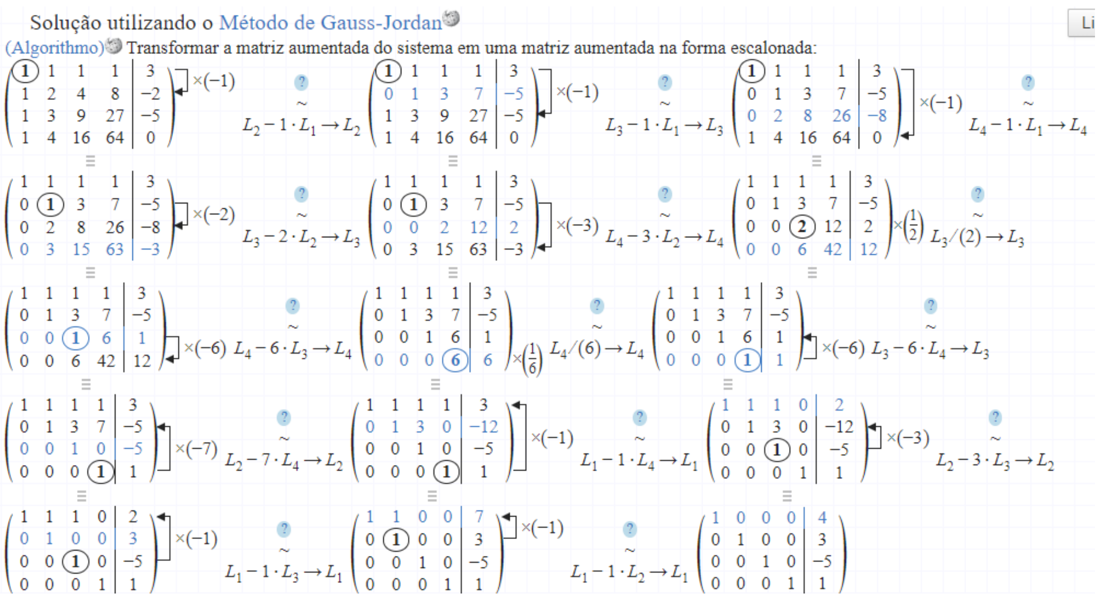
$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

cujo gráfico no plano $\mathbb{R}^2$ *passe pelos pontos (1,3), (2,-2), (3,-5) e (4,0).*

Solução. As incógnitas do problema são os coeficientes c_0, c_1, c_2 e c_3 do polinômio p. Para determiná-los temos como informação 4 valores assumidos pelo polinômio. Esses 4 valores resultam nas 4 equações abaixo:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 3 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= -2 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3 &= -5 \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver, utilizamos os método de eliminação de Gauss-Jordan: Vemos assim que o po-



linômio procurado é $p(t) = 4 + 3t - 5t^2 + t^3$. $\square$

Exercício 2 (Misturando óleo cru)**.** *Um conjunto de* K *diferentes tipos de óleo cru são misturados, em proporções* $\theta_1, ..., \theta_K$*. Obviamente temos que* $\sum_{\ell=1}^{K} \theta_\ell = 1$ *(por que?). A cada tipo* k *de óleo cru um químico associa um vetor* $c_k \in \mathbb{R}^n$*, cujas entradas as respectivas concentrações de* n *diferentes tipos de constituintes (como, por exemplo hidrocarbonetos específicos). O químico deseja que o óleo mistura atinja para cada* $j = 1, ...n$ *a concentração* b_j *do constituinte* j*. Essa informação produz um vetor* $b \in \mathbb{R}^n$*. Encontre uma matriz* A *tal que a equação linear* $A(\theta) = b$

traduza matematicamente o problema de escolher a proporção de cada óleo cru de forma que a mistura tenha as concentrações desejadas.

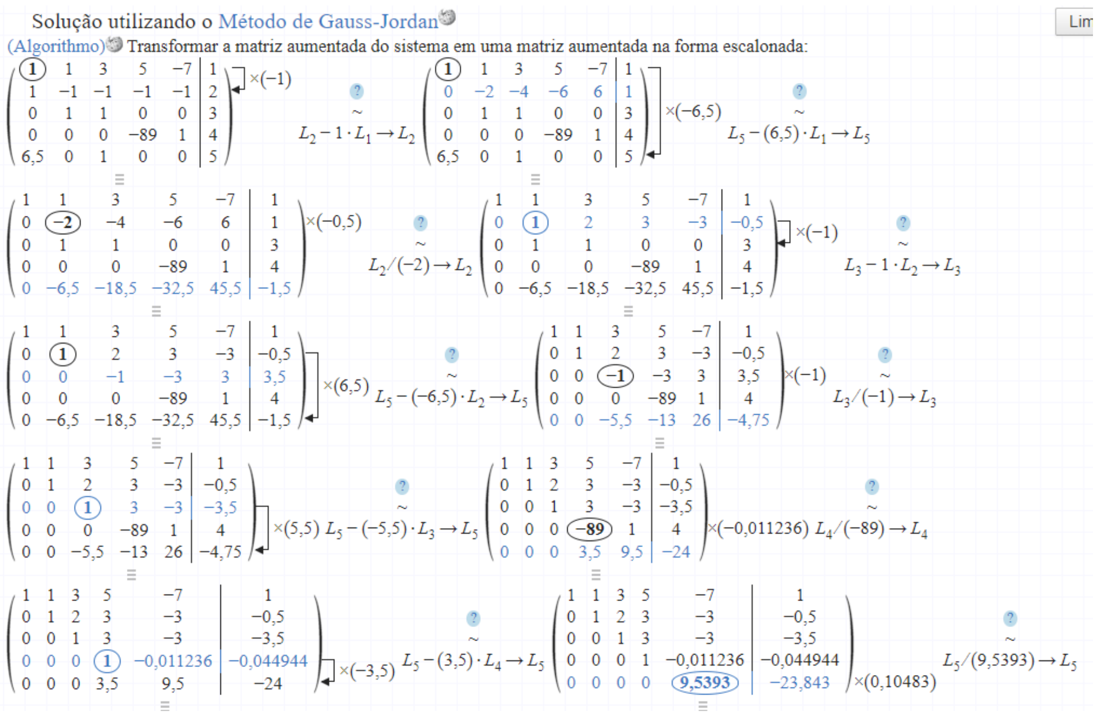
Solução. A matriz A deve ser uma matriz com n linhas e K colunas. Os vetores $c_k \in \mathbb{R}^n$ devem ser as colunas de A. $\square$

Exercício 3. *Considere a função linear $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dada por*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1+x_2+3x_3+5x_4-7x_5, x_1-x_2-x_3-x_4-x_5, x_3+x_2, x_5-89x_4, x_3-6.5x_1).$$

Calcule o posto de f e decida se a equação linear $f(x) = v$, onde $v = (1, 2, 3, 4, 5)$ admite solução.

Solução. Calcular o posto de f e decidir se a equação $f(x) = v$ admite solução pode ser resolvido diretamente pela aplicação do algorítmo de eliminação de Gauss-Jordan.



$\square$

Exercício 4. *Sejam $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ e $v_3 = (7, 7, 7)$. Decida se o vetor $u = (\pi, 8, 1)$ pertence ao subespaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$ ou não. Caso ele pertença, encontre os coeficientes α_1, α_2 e α_3 tais que*

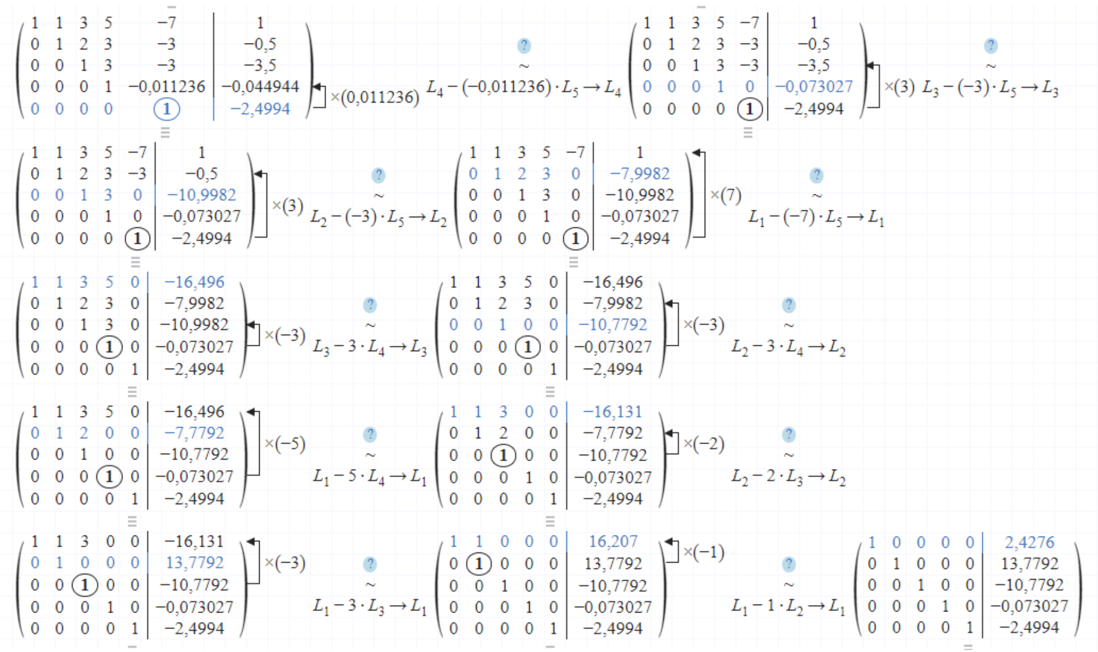
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = u.$$

Solução. O problema proposto equivale a resolver o sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 &= \pi \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 8 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 2 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \to_{\ell_2 \to -2\ell_1+\ell_2; \ell_3 \to -3\ell_1+\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 0 & -4 & -7 & 8-2\pi \\ 0 & -8 & -14 & 1-3\pi \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow_{\ell_3 \rightarrow -2\ell_2+\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & \pi \\ 0 & -4 & -7 & 8-2\pi \\ 0 & 0 & 0 & -7-17\pi \end{bmatrix}$$

Como obtemos uma linha de zeros correspondente a uma entrada diferente de zero na matriz aumentada vemos que o sistema não possui solução. □

Exercício 5. *Três crianças (Guido, Tomás e Sofia) se reencontram estão encantadas com suas novas canetinhas coloridas, cada uma com um tamanho diferente. Juntando três das canetas do Guido, duas do Tomás e uma da sofia e usando uma régua as crianças medem que o comprimento total da 39. Juntando duas das canetinhas do Guido, três do Tomás e uma da Sofia o comprimento dá 34. Juntando uma caneta do Guido, 2 do Tomás e 3 da Sofia o comprimento dá 26. Calcule os comprimentos das canetinhas.*

Solução. Modelando o problema comas variáveis x, y, z descrevendo, respectivamente, os comprimentos das canetas de Guido, Tomás e Sofia, o problema proposto equivale ao sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Resolvendo pelo método de Gauss-Jordan obtemos como solução $(x, y, z) = (9.25, 4.25, 2.75)$. □