Complementos de Matemática Aplicada 2020.2 - Biomedicina e Ciências Ambientais

Aula 01

Bruno Santiago

1 de Fevereiro de 2021

O que é matemática?

- É uma parte da cultura humana; é **ciência**

O que é matemática?

- É uma parte da cultura humana; é **ciência**
- Consiste em extrair uma parte da realidade (**abstrair**) e estudar ela isoladamente

O que é matemática?

- É uma parte da cultura humana; é **ciência**
- Consiste em extrair uma parte da realidade (**abstrair**) e estudar ela isoladamente
- Objetos matemáticos: entidades abstratas que vivem apenas nas nossas cabeças, como números e figuras geométricas:

O que é matemática?

- É uma parte da cultura humana; é **ciência**
- Consiste em extrair uma parte da realidade (**abstrair**) e estudar ela isoladamente
- Objetos matemáticos: entidades abstratas que vivem apenas nas nossas cabeças, como números e figuras geométricas:

$$1, 2, 3/4, \pi$$

Mas isso não responde à pergunta...

- A matemática está em permanente evolução;

Mas isso não responde à pergunta...

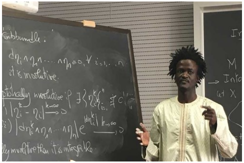
- A matemática está em permanente evolução;
- Por isso não cabe uma definição estática;

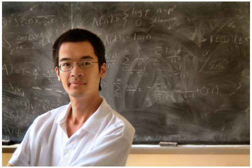
Mas isso não responde à pergunta...

- A matemática está em permanente evolução;
- Por isso não cabe uma definição estática;
- Existem matemáticos (como eu) que fazem pesquisa em matemática!!

Mas isso não responde à pergunta...

- A matemática está em permanente evolução;
- Por isso não cabe uma definição estática;
- Existem matemáticos (como eu) que fazem pesquisa em matemática!!



E para quê isso serve?

- O entendimento da **realidade abstrata** pode trazer luz à coisas antes não entendidas: assim nasce a “matemática aplicada”;

E para quê isso serve?

- O entendimento da **realidade abstrata** pode trazer luz à coisas antes não entendidas: assim nasce a “matemática aplicada”;
- No entanto, a divisão "aplicada$\times$pura é fictícia: toda matemática é **aplicável**

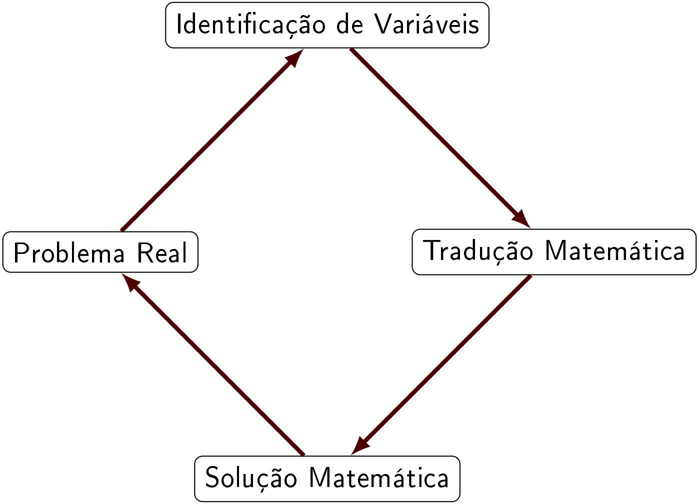
Enfrentando problemas reais com matemática

- E como se usa matemática na vida real?

Enfrentando problemas reais com matemática

- E como se usa matemática na vida real?
- Fazendo **modelagem matemática**

Modelagem matemática



Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!
- São 38 jogos; Derrota=0pt, Vitória=3pt, Empate=1pt;

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!
- São 38 jogos; Derrota=0pt, Vitória=3pt, Empate=1pt;
- A campanha com mais derrotas que faz 48pts é aquela em que os 48 pontos são obtidos só com vitórias;

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!
- São 38 jogos; Derrota=0pt, Vitória=3pt, Empate=1pt;
- A campanha com mais derrotas que faz 48pts é aquela em que os 48 pontos são obtidos só com vitórias;
- Como 3 x 16=48, essa campanha deve ter 16 vitórias e 38-16=22 derrotas.

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!
- São 38 jogos; Derrota=0pt, Vitória=3pt, Empate=1pt;
- A campanha com mais derrotas que faz 48pts é aquela em que os 48 pontos são obtidos só com vitórias;
- Como 3 x 16=48, essa campanha deve ter 16 vitórias e 38-16=22 derrotas.
- Logo, se um time perder mais de 22 partidas, ele será rebaixado (com **quase** toda certeza...)

Um exemplo simples de modelagem: o destino do Vasco

Qual o número máximo de derrotas que Vasco pode ter para que o seu torcedor continue com esperanças de que ele não será rebaixado no campeonato brasileiro?

- Estatisticamente, 48pts=Livre do rebaixamento!
- São 38 jogos; Derrota=0pt, Vitória=3pt, Empate=1pt;
- A campanha com mais derrotas que faz 48pts é aquela em que os 48 pontos são obtidos só com vitórias;
- Como 3 x 16=48, essa campanha deve ter 16 vitórias e 38-16=22 derrotas.
- Logo, se um time perder mais de 22 partidas, ele será rebaixado (com **quase** toda certeza...)

Para modelar situações mais complexas precisamos de ferramentas mais sofisticadas!

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6$\times$ 7=42

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m + k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m + k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

$$\begin{aligned} 65 \times 82 &= (60 + 5) \times 82 = 60 \times 82 + 5 \times 82 \\ &= 60 \times (80 + 2) + 5 \times (80 + 2) \\ &= 4800 + 120 + 400 + 10 \\ &= 5330. \end{aligned}$$

Os números naturais

- Os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Aplicações: contagem, indexação, passagem do tempo (em passos discretos);
- Operações: soma e multiplicação
  - Ex.: 2+3=6,6× 7=42
  - Distributividade: $n(m + k) = nm + nk$. Ex.:

$$8 \times 97 = 8 \times (90 + 7) = 720 + 56 = 776.$$

$$\begin{aligned} 65 \times 82 &= (60 + 5) \times 82 = 60 \times 82 + 5 \times 82 \\ &= 60 \times (80 + 2) + 5 \times (80 + 2) \\ &= 4800 + 120 + 400 + 10 \\ &= 5330. \end{aligned}$$

- Relação de ordem: 3>2>1; 3<4<5<6<7...

Um problema que $\mathbb{N}$ não resolve

- Qual o saldo da minha conta se eu comprar um iPhone 11 no débito?

Um problema que $\mathbb{N}$ não resolve

- Qual o saldo da minha conta se eu comprar um iPhone 11 no débito?

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;

Os números inteiros

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
- Operação nova: subtração. Ex: 4-5=-1, 3-1=2;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo=$2p$;
- Lucro total=100 $\implies$ $p + 2p = 100$

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;
- Lucro total$=100 \implies p + 2p = 100$
- $3p = 100$.

Um problema que $\mathbb{Z}$ não resolve

Problema

Paula e Gustavo, estão pensando em abrir um restaurante. Paula vai trabalhar exclusivamente com a cozinha e a criação dos pratos, enquanto Gustavo cuida da administração. O rendimento de Gustavo será o dobro do rendimento da Paula. Dessa forma, a cada 100 reais lucrados quanto caberá a Paula e quanto caberá a Gustavo?

Solução

- Modelagem matemática do problema:
- Vamos dar um nome ao número que corresponde ao lucro da Paula, ele é um número p;
- $\implies$ lucro do Gustavo$=2p$;
- Lucro total$=100 \implies p + 2p = 100$
- $3p = 100$.Mas $3x33 = 99$ e $3 \times 34 = 102$.

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;
- Soma de frações: $x = p/q$ e $y = p'/q'$ são dois números racionais então a sua soma é o número racional

$$x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'},$$

Os números racionais

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$;
- Nova operação: divisão;
- Soma de frações: $x = p/q$ e $y = p'/q'$ são dois números racionais então a sua soma é o número racional

$$x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'},$$

- Nova aplicação: frações servem para representar a proporção de uma quantidade ocupada por uma parte dela

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

Solução 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

O exemplo da pizza

Exemplo

Suponha que você compra uma pizza tamanho família, que vem cortada em 8 fatias e vai dividi-la com dois amigos. Você quer comer metade da pizza e eles dividem a outra metade igualmente. Que fração da pizza você e um dos dois amigos comeram?

Solução 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

Solução 2:

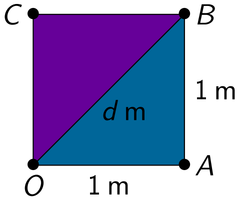
4 fatias mais 2 fatias, de um total de 8 fatias:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

Um problema que $\mathbb{Q}$ não resolve

Problema

Você decide pintar a face lateral de um criado mudo, que tem a forma de um quadrado com 1m de lado, com duas cores, dividindo ela ao meio em dois triângulos iguais.

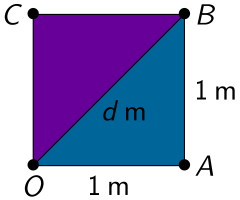


Qual o comprimento do segmento OB?

Um problema que $\mathbb{Q}$ não resolve

Problema

Você decide pintar a face lateral de um criado mudo, que tem a forma de um quadrado com 1m de lado, com duas cores, dividindo ela ao meio em dois triângulos iguais.



Qual o comprimento do segmento OB?

Solução

Teorema de Pitágoras $\implies$ $d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$

$d = \sqrt{2}$, que não é um número racional!

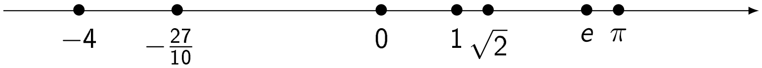
Os números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. É como se $\mathbb{R}$ "fechasse" os buracos deixados por $\mathbb{Q}$. Representamos $\mathbb{R}$ como uma reta, infinita, orientada da esquerda para direita. O "centro" dessa reta é o número 0, e todo ponto a direita de zero representa um número positivo, enquanto aqueles à esquerda representam números negativos. Quanto mais a direita um número estiver, maior ele será.

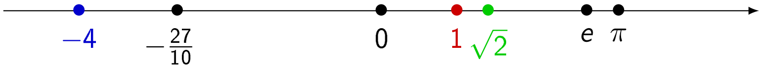
Os números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. É como se $\mathbb{R}$ "fechasse" os buracos deixados por $\mathbb{Q}$. Representamos $\mathbb{R}$ como uma reta, infinita, orientada da esquerda para direita. O "centro" dessa reta é o número 0, e todo ponto a direita de zero representa um número positivo, enquanto aqueles à esquerda representam números negativos. Quanto mais a direita um número estiver, maior ele será.

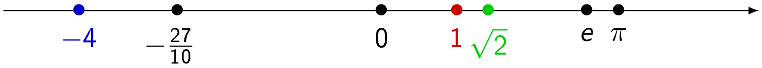
Representação gráfica de $\mathbb{R}$

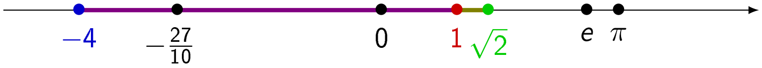


Distância entre números reais



Distância entre números reais

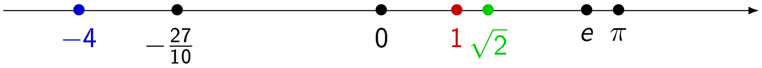


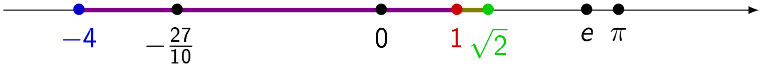


$$d(-4,1) = 1-(-4) = 1+4 = 5$$

$$d(1,\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 \simeq 0.414$$

Distância entre números reais





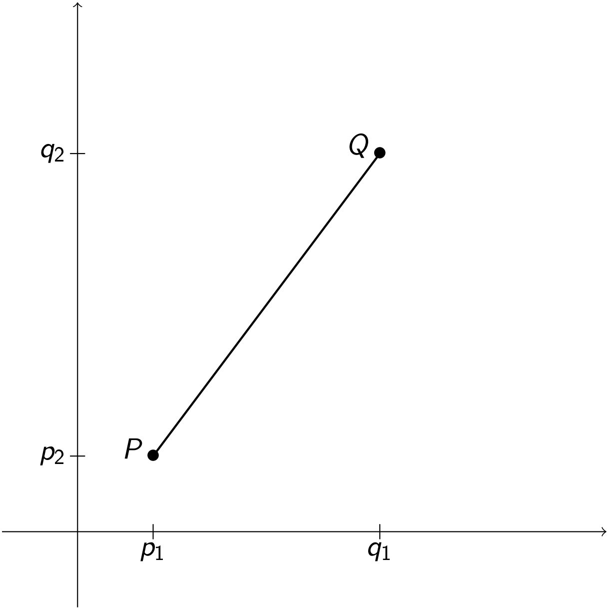
$d(-4,1) = 1-(-4) = 1+4 = 5$

$d(1,\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 \simeq 0.414$

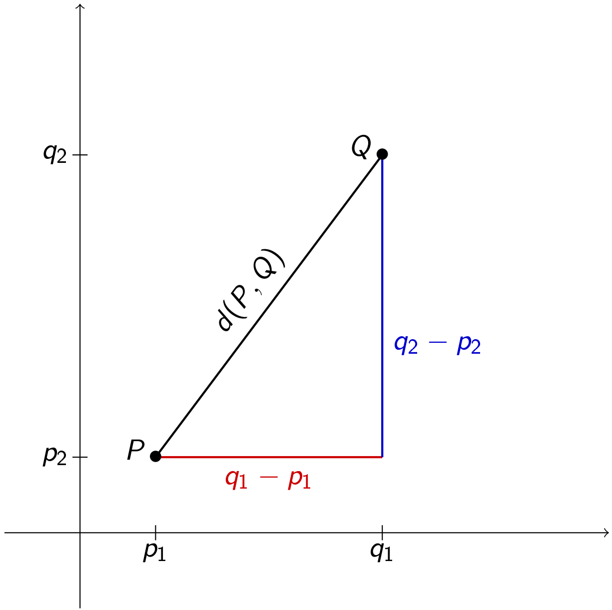
Em geral

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ distintos a distância entre a e b é $d(a,b) = |a-b|$, onde $|a-b|$ significa $a-b$ se $a > b$ ou $b-a$ se $b < a$.

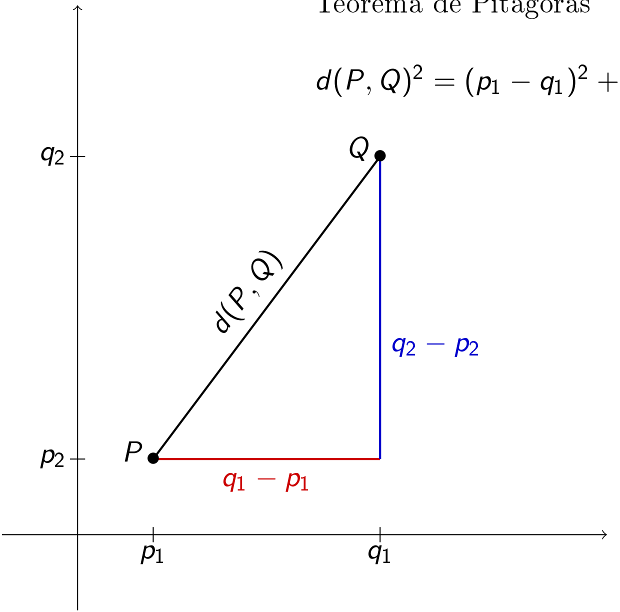
Aplicação: coordenadas no plano



Aplicação: coordenadas no plano



Aplicação: coordenadas no plano



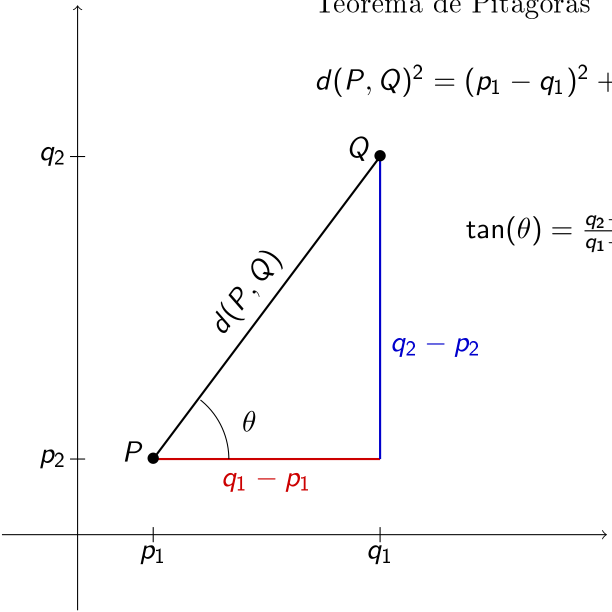
Teorema de Pitágoras

$$d(P,Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

Aplicação: coordenadas no plano

Teorema de Pitágoras

$$d(P,Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$



$$\tan(\theta) = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$

Funções

- Números expressam grandezas, quantidades;
- Funções são objetos matemáticos que buscam descrevem como grandezas se relacionam umas com as outras;
- Em cálculo 1, vamos estudar funções do tipo $f : J \to \mathbb{R}$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (que pode ser tudo!)

Um caso de estudo: funções lineares, quadráticas e além...

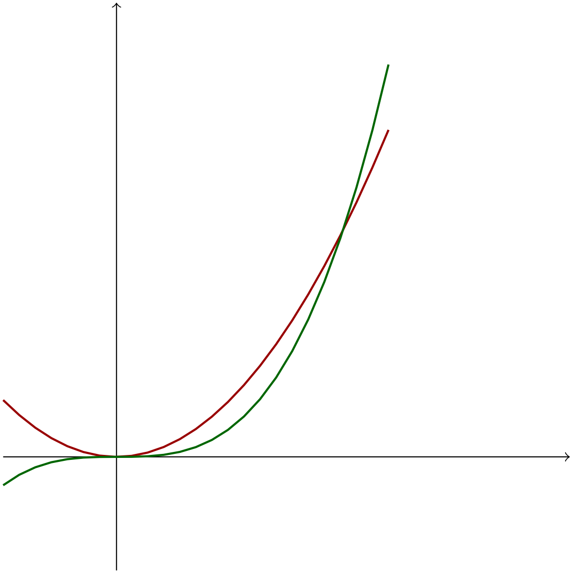
- Função linear: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$;
- Função quadrática: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}$;
- Função cúbica: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3$, com $a \in \mathbb{R}$;
- Em geral, um função do tipo $f(x) = ax^n$ é chamada função monomial

0.0010000000000000002 0.008000000000000002 0.027 0.06400000000000002 0.125 0.216 0.34299999999999999 0.5120000000000001 0.7290000000000001 1.0 1.3310000000000004 1.728

Quadrática vs cúbica

x	x^2	x^3
0.1	**0.01**	0.001
0.2	**0.04**	0.008
0.3	**0.09**	0.027
0.4	**0.16**	0.064
0.5	**0.25**	0.125
0.6	**0.36**	0.216
0.7	**0.48999**	0.324
0.8	**0.64**	0.512
0.9	**0.81**	0.729
1.0	1.0	1.0
1.1	1.21	**1.331**
1.2	1.44	**1.728**

Quadrática vs cúbica: gráfico



Aplicação em biologia

Modelo para absorção de nutrientes por uma célula

- Quais imposições físicas e biológicas determinam o tamanho de uma célula?
- Porque devem existir limitações de tamanho para uma célula?
- Porque os animais são constituídos de milhões de células minúsculas ao invés de algumas poucas células grandes?

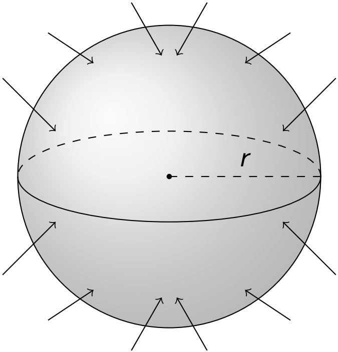
Construção do modelo matemático

Hipóteses simplificadoras e descritivas

1. A célula é aproximadamente uma esfera;
2. A célula absorve oxigênio e nutrientes pela sua superfície. Quanto maior a superfície da célula, mais rápida é a absorção de nutrientes; vamos assumir que a *taxa de absorção* é proporcional a área A da superfície da célula.
3. A taxa de consumo de nutrientes é proporcional ao volume V da célula: quanto maior a célula, mais rápido ela consome os nutrientes que absorve.

Construção do modelo matemático

Hipóteses simplificadoras e descritivas



Definição das variáveis e parâmetros do modelo

$$A = \text{Taxa de absorção de nutrientes por unidade de tempo}$$

$$C = \text{Taxa de consumo de nutrientes por unidade de tempo}$$

$$V = \text{Volume da célula}$$

$$S = \text{Área de superfície da célula}$$

$$r = \text{Raio da cálula}$$

Relação entre as variáveis

$$A = k_1 S$$

$$C = k_2 V$$

$$S = 4\pi r^2 \implies A = 4k_1\pi r^2$$

$$V = (\frac{4}{3})\pi r^3 \implies C = (\frac{4k_2}{3})\pi r^3$$

Relação entre as variáveis

$$A = k_1 S$$

$$C = k_2 V$$

$$S = 4\pi r^2 \implies A = 4k_1\pi r^2$$

$$V = (\frac{4}{3})\pi r^3 \implies C = (\frac{4k_2}{3})\pi r^3$$

- Como A é uma função quadrática de r, e C é uma função cúbica para valores pequenos de r a absorção é maior do que o consumo;
- Para valores grandes de r, o consumo é maior do que a absorção e a célula morre;
- Existe um único valor de equilíbrio para a variável r, com o qual o consumo a absorção se igualam