Taxa de Variação.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (variável dependente)

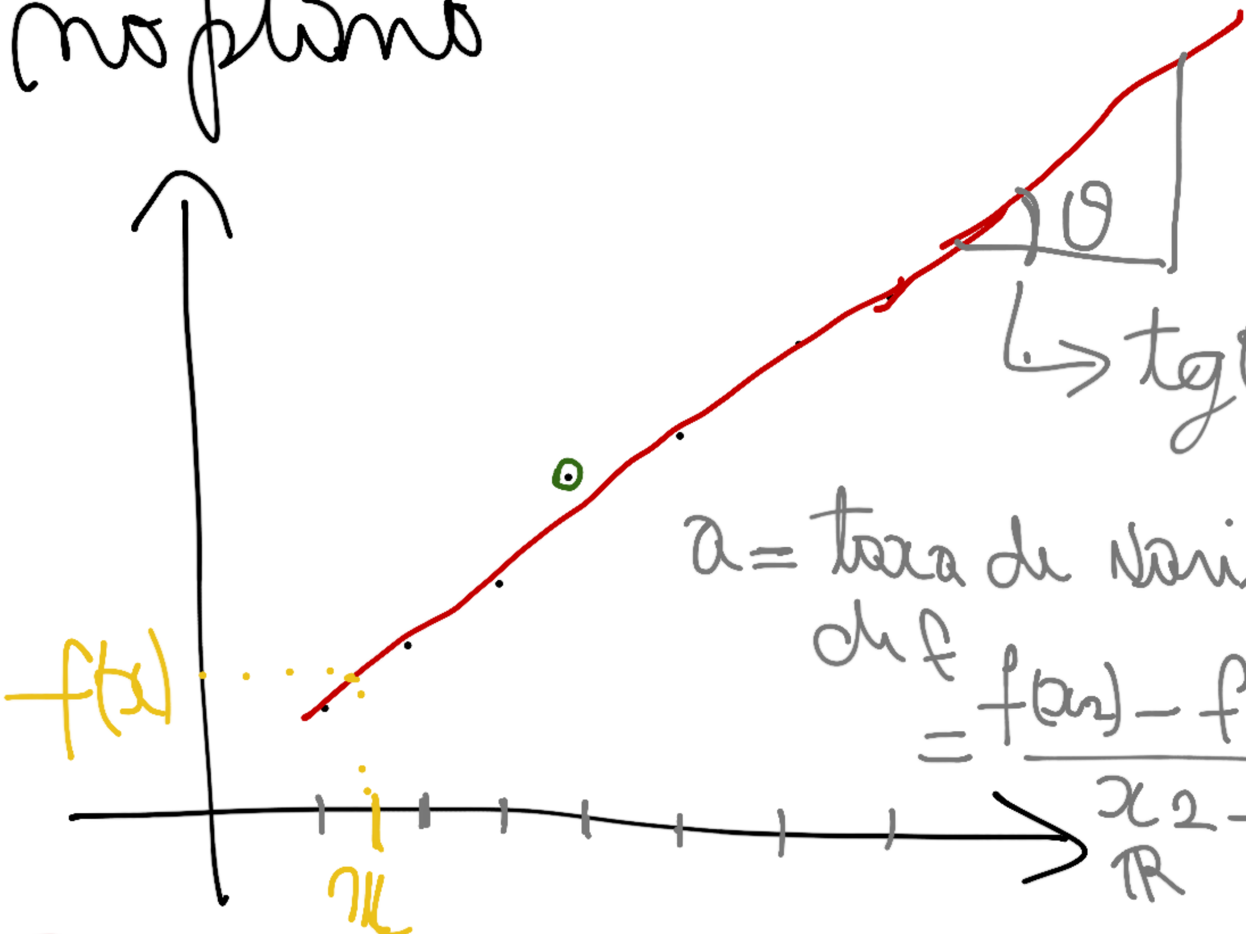
↑ contra-domínio

↑ Domínio (espaço da variável "independente")

Exemplo: Funções afins:

$f(x) = ax + b, \; a, b \in \mathbb{R}$

$(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$ pontos no plano



$\hookrightarrow \operatorname{tg}\theta = a$

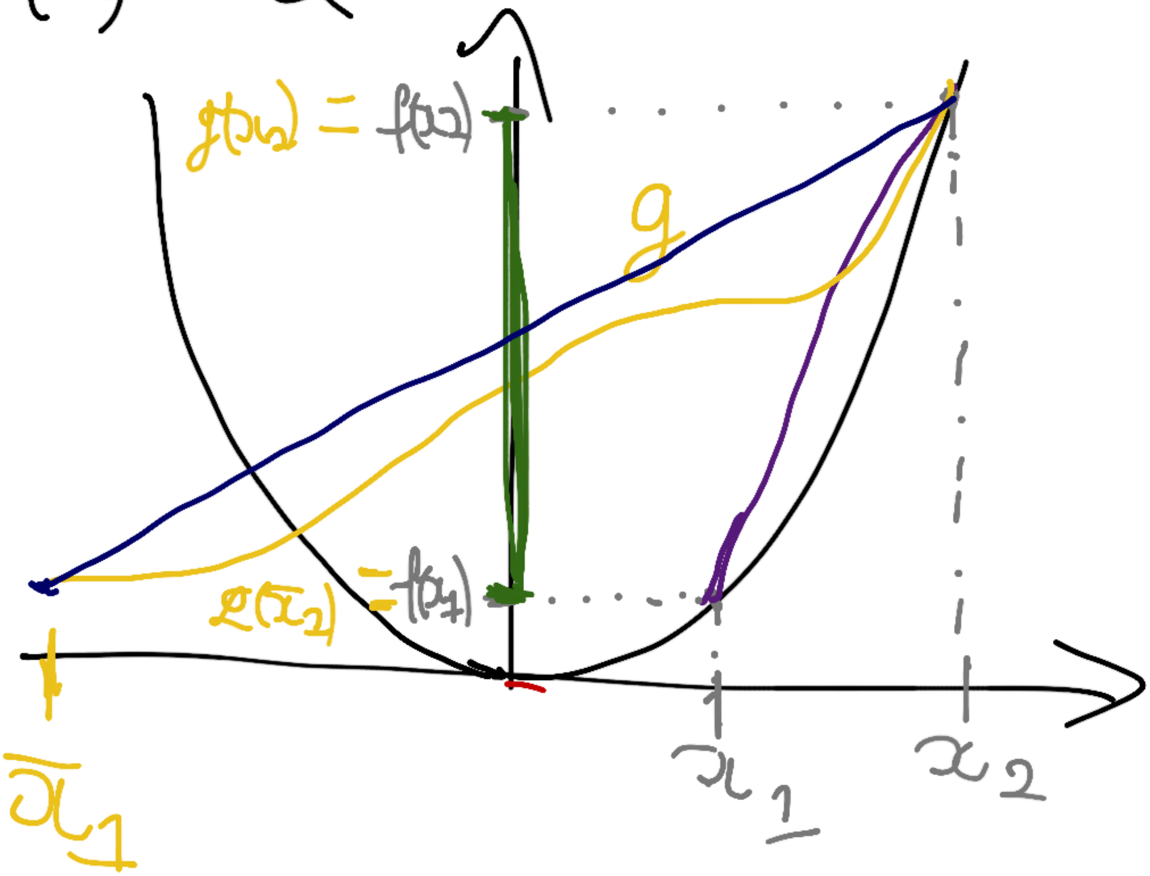
$a =$ taxa de variação de f

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \forall x_1, x_2 \text{ em } \mathbb{R}$$

<u>Problema</u>: propor uma função que se ajuste aos dados.

(2) Funções quadráticas

$f(x) = 2x^2$



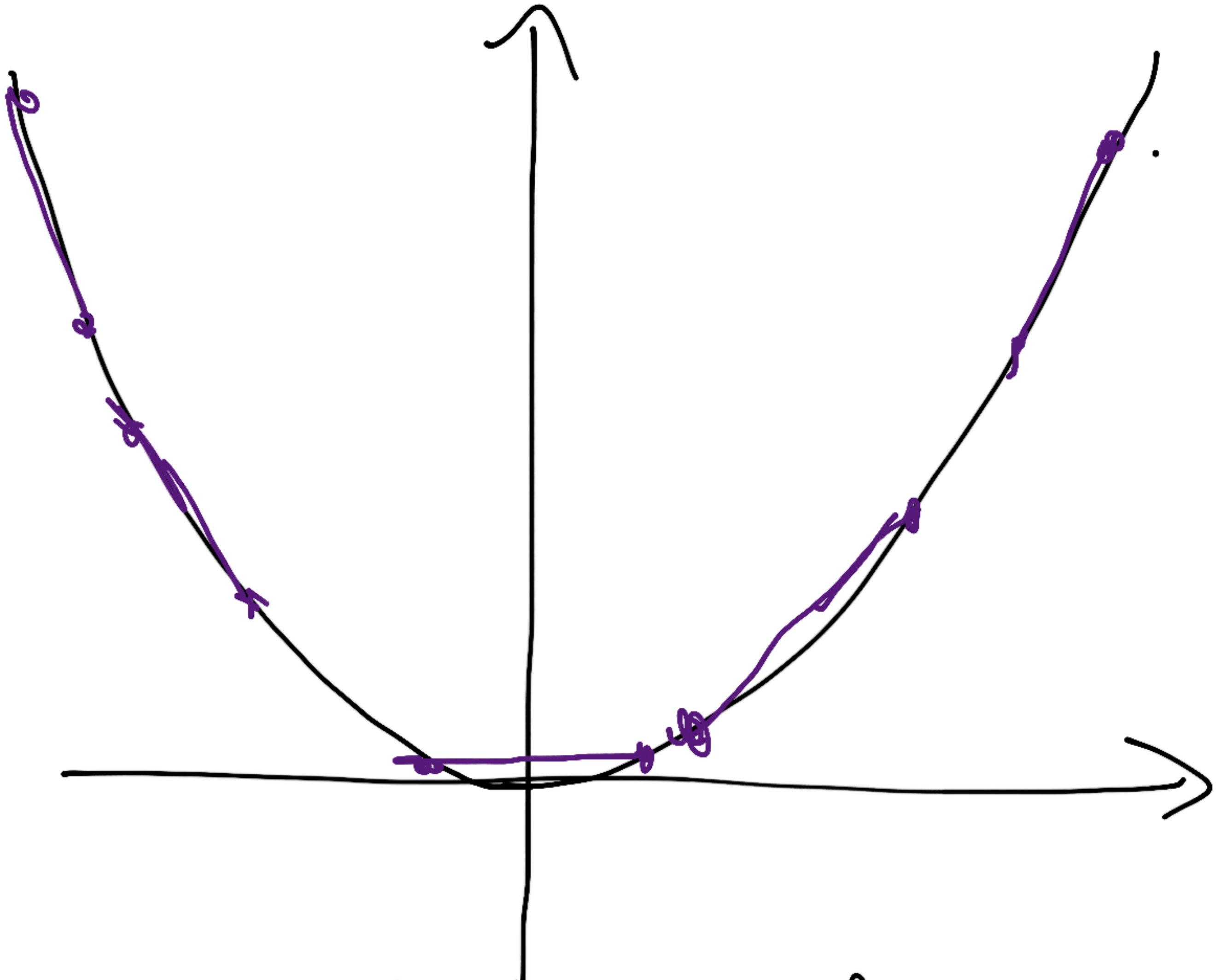
$$f(x_2) - f(x_1) = g(x_2) - g(\bar{x}_1)$$

Porém $\boxed{x_2 - \bar{x}_1 \gg x_2 - x_1}$

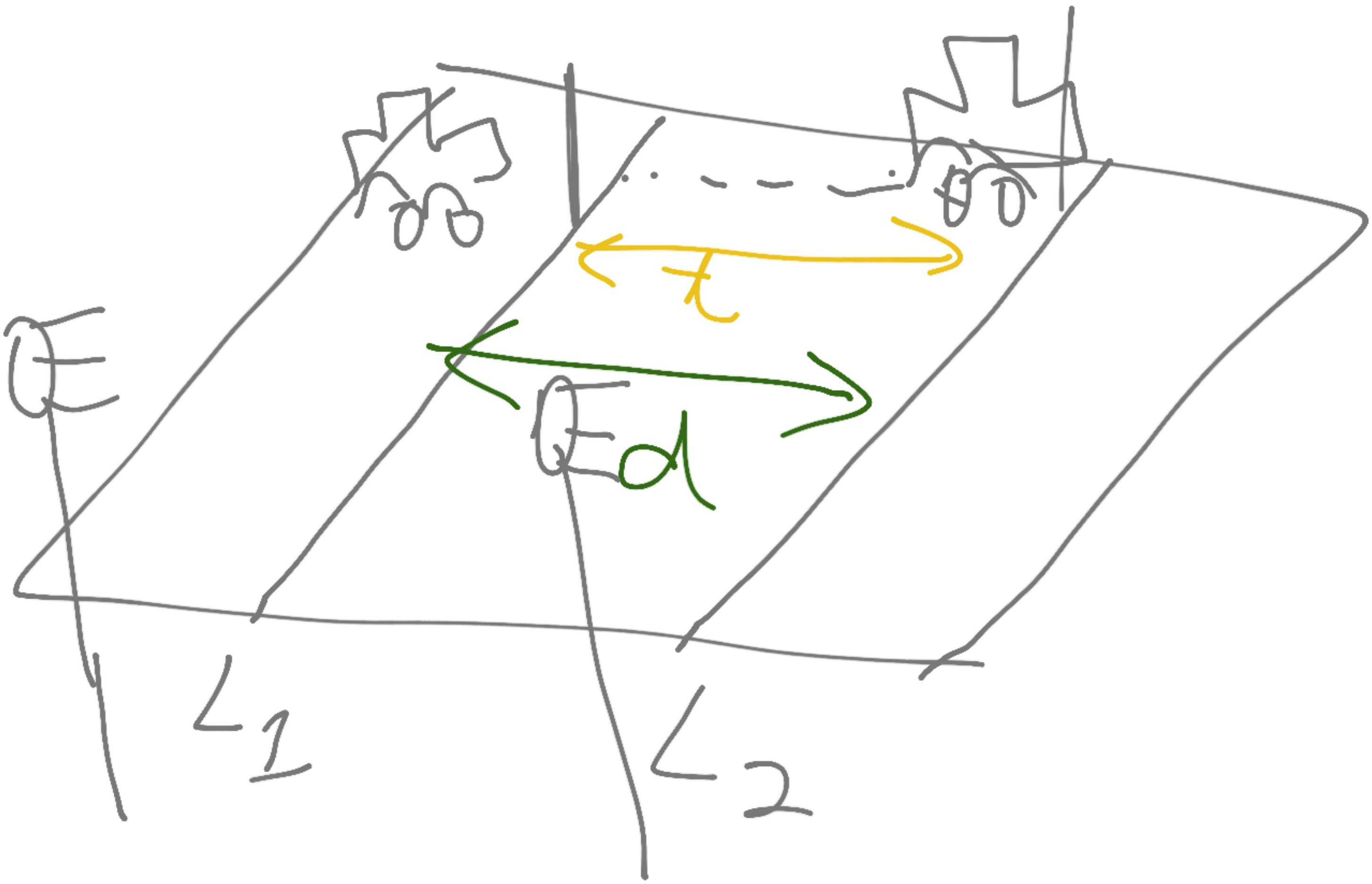
"A reta secante ao gráfico indica a velocidade de aumento/redução da variável dependente"

* O que importa é a inclinação da reta secante. No exemplo anterior:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{g(x_2)-g(\bar{x}_1)}{x_2-\bar{x}_1}$$



(3) Cálculo da velocidade instantânea de um corpo em movimento:



$$\text{Velocidade} = \frac{d}{t} =$$

$$= \frac{\text{Variação da posição}}{\text{Variação do Tempo}}$$

Se a posição fosse modelada por uma função

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

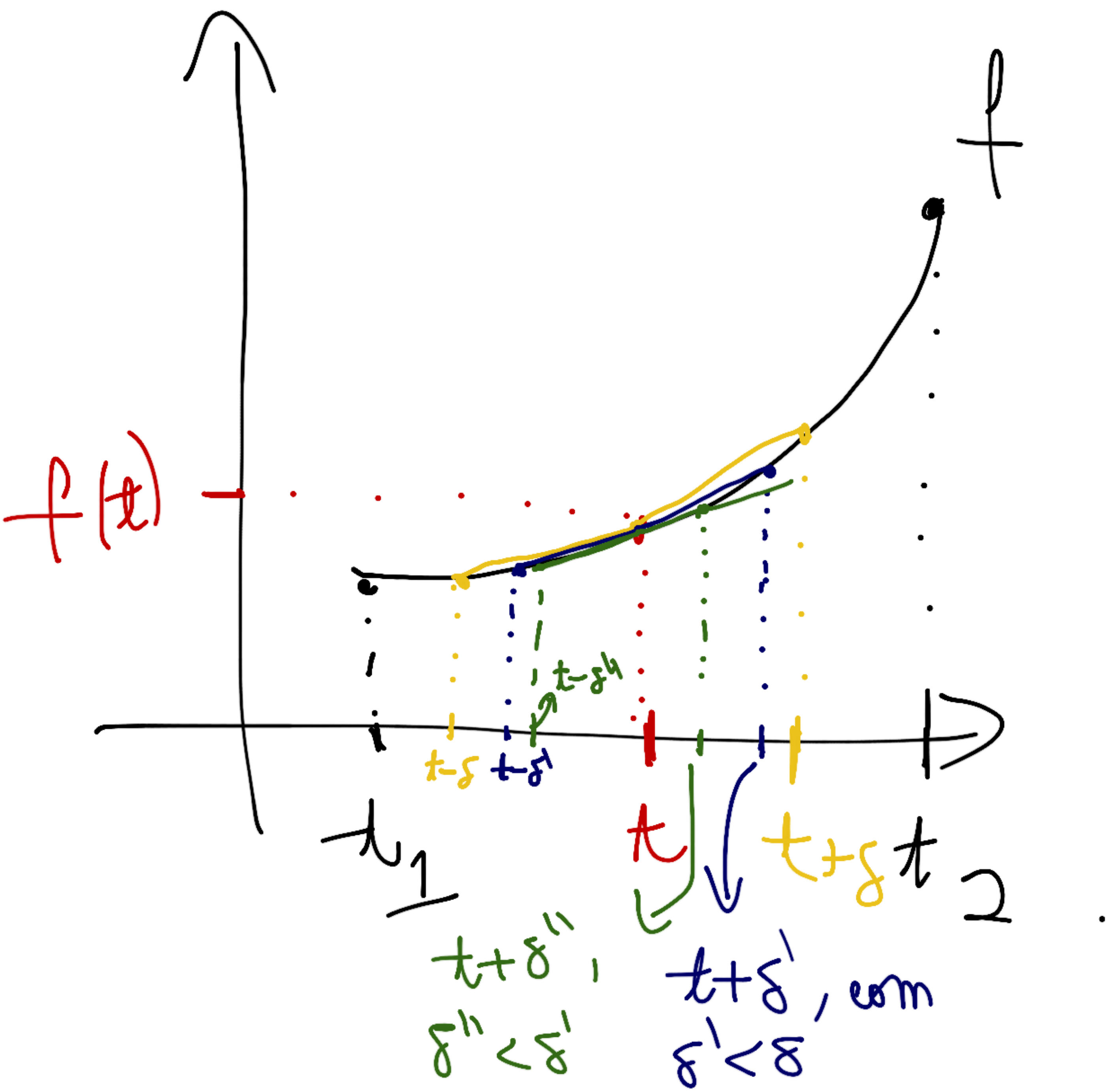
e x_1 = posição de L_1

x_2 = posição de L_2,

então,

$$Vel = \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{d}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{t}}$$

Taxa de variação instantânea



Def: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}$ se existe o limite:

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}}$$

que é chamado de derivada da função f no ponto x_0.

Obs: A derivada da função f fornece o valor exato da inclinação da reta tangente ao gráfico.

Como calcular a derivada?

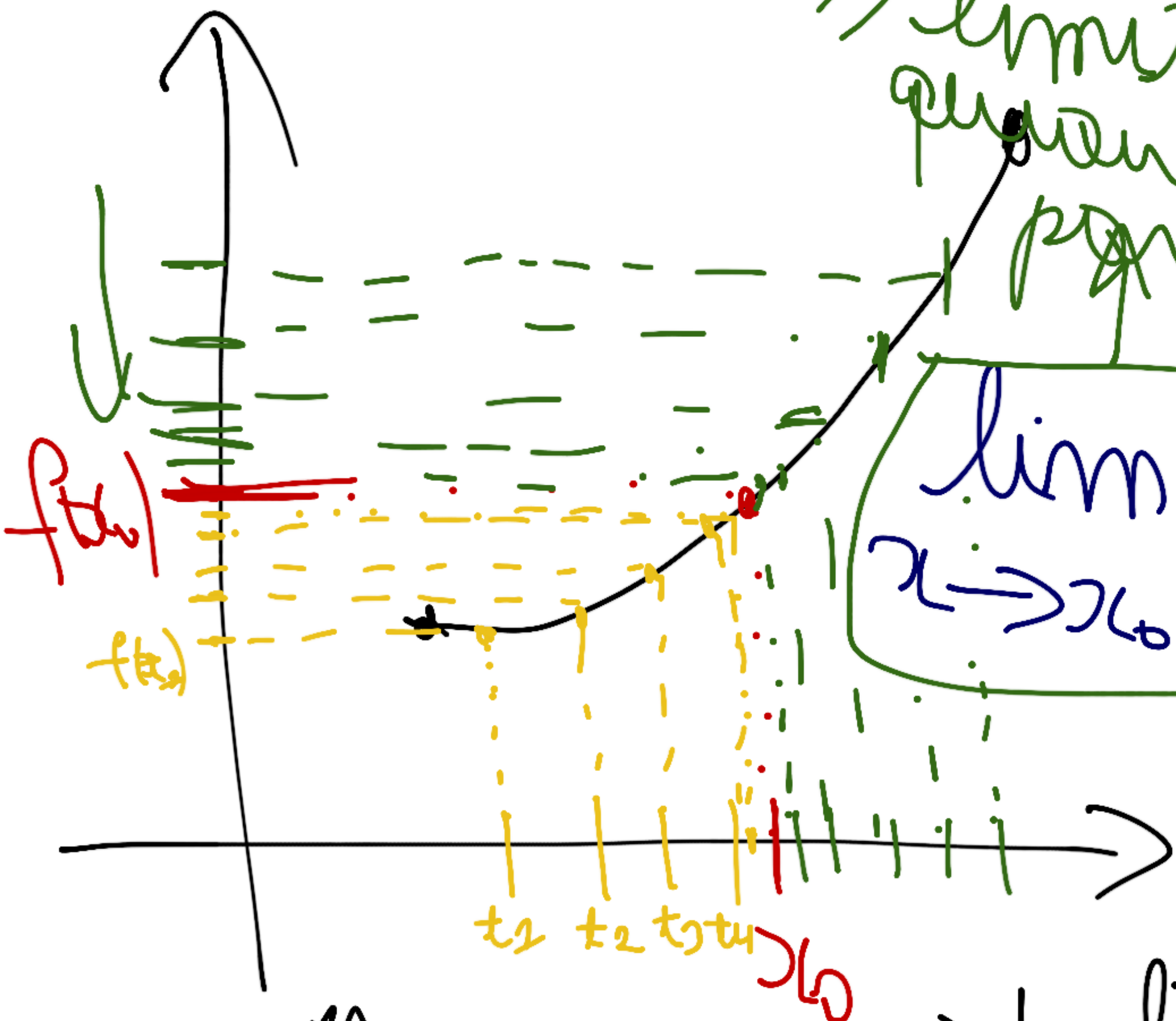
A derivada é um tipo de **limite**.

<u>Definição</u>: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que f possui um limite em x_0 se existe um número L, denotado por

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

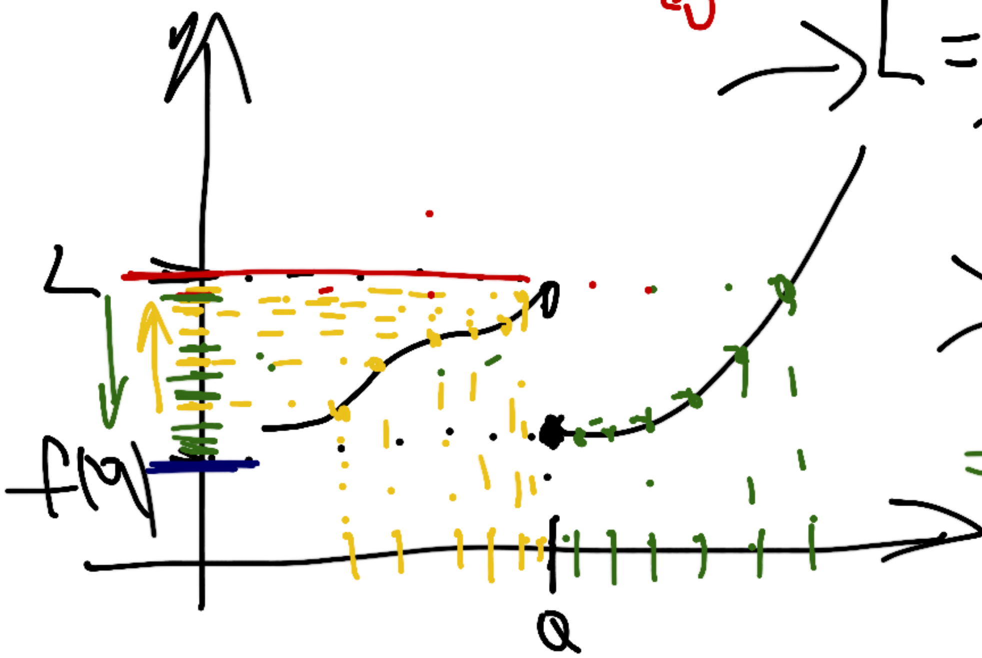
satisfazendo: $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$

// limiti di $f(x)$ quando x tende a x_0 //



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)} = f(x_0)$$

(9)



$$\to L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$> f(a) =$$

$$= \lim_{x \to a^+} f(x)\,!$$

Exemplos de "cálculo" de

(decidir se o limite existe e quanto ele vale caso exista)

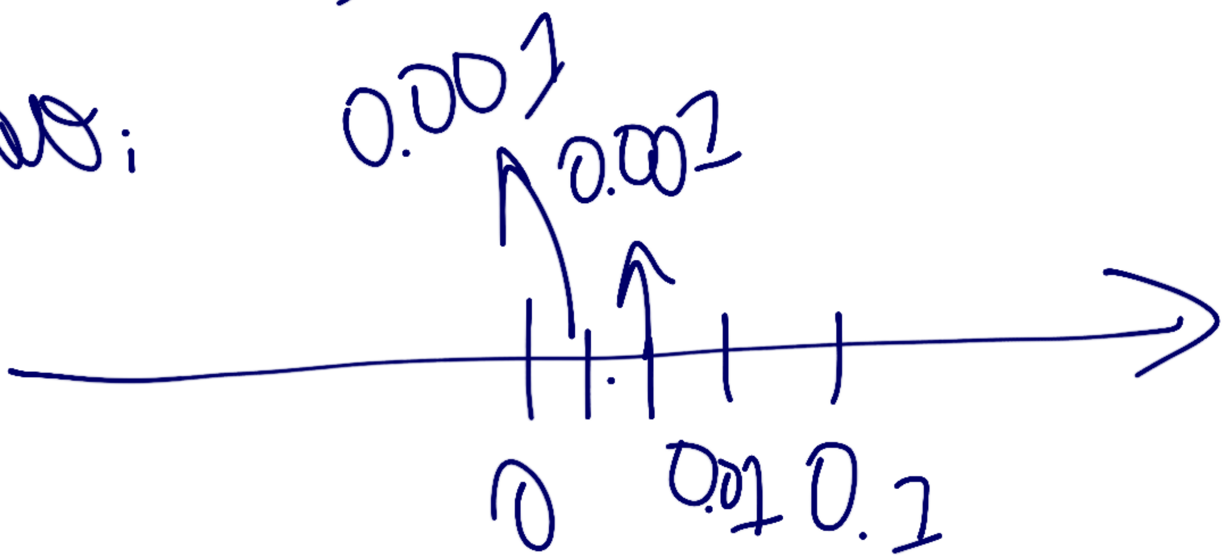
limites:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida

por $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x > 0 \\ -1/x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ existe?}$$

Vamos olhar os limites laterais, se existem ou não:



$$f(0.1) = 10$$

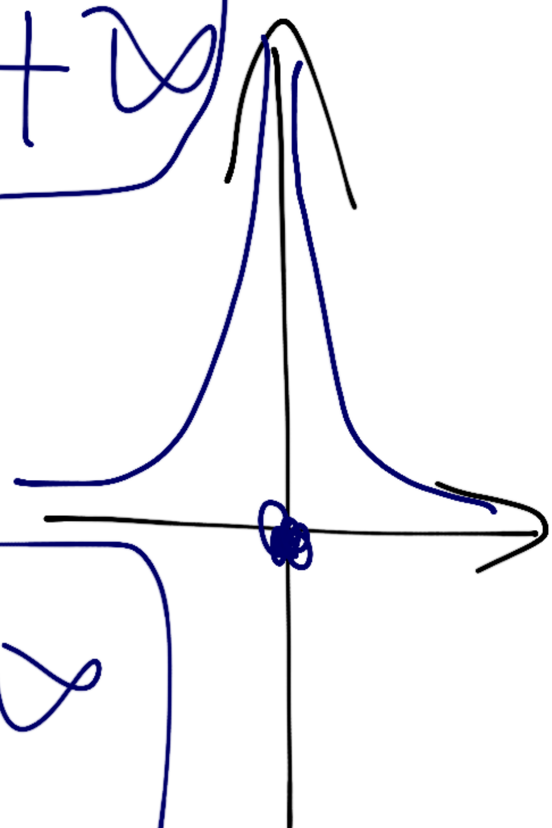
$$f(0.01) = 100$$

$f(0.001) = 1000$

$f(0.0001) = 10000$ $\quad 1/x$

Nesse caso dizemos:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$$



Analogamente:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty}$$

(3) Cálculo da velocidade instantânea de um objeto em queda livre:

$$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$y(t) = h_0 - ct^2$$

* Como calcular a derivada $y'(t)$?

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta}$$

$$y(t+\delta) - y(t) = h_0 - c(t+\delta)^2$$

$$- \left[h_0 - ct^2 \right] =$$

$$h_0 - ct^2 - 2ct\delta - \delta^2 c$$

$$- h_0 + ct^2 = -2ct\delta - \delta^2 c$$

logo

$$\frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} = \frac{-2ct\delta-\delta^2 c}{\delta}$$

$$= -2ct - \delta c$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} =$$

$$\lim_{\delta \to 0} \boxed{-2ct - \delta c} = \underline{\underline{-2ct}}$$