UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais
Lista de exercícios 1
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (Gráfico de funções racionais)**.** *Suponha que um determinado modelo descreva uma variável v através de parâmetros positivos $n, a, b > 0$, com n um número natural, e uma variável x (que assume também somente valores positivos), de maneira que*

$$v(x) = \frac{bx^n}{a + x^n}.$$

(a) *Verifique que existe um valor de saturação S_0 para o valor $v(x)$ de modo que não importa o quão grande se tome x, sempre se terá $v(x) \leq S_0$.*
(b) *Adaptando as ideias que vimos na aula 01, esboce qualitativamente o gráfico de $v(x)$, comentando como se dá o crescimento da função.*

Solução. (a) O objetivo do exercício é treinar a intuição de vocês para análise de comportamentos assintóticos. Aqui, temos uma expressão algébrica formada pelo quociente de dois polinômios que queremos analisar. O primeiro fato a se ter em conta é que, conforme x aumenta, x^n aumenta mais ainda ficando arbitrariamente grande. Como consequência disso, se x for suficientemente grande então x^n será muito maior do que a, de forma na expressão $a + x^n$ o termo dominante será x^n. Em outras palavras, para valores suficientemente grandes de x podemos fazer a aproximação

$$a + x^n \simeq x^n.$$

Logo, para valores suficientemente grandes de x,

$$\frac{bx^n}{a + x^n} \simeq \frac{bx^n}{x^n} = b.$$

Portanto $v(x) \leq b$, para todo x suficientemente grande.

(b) Para esboçar o gráfico, analisamos o comportamento das expressões polinomiais perto de 0 e longe de zero. Primeiro, veja que se x é muito pequeno então a é muito maior do que x^n e portanto (quando x é muito pequeno)

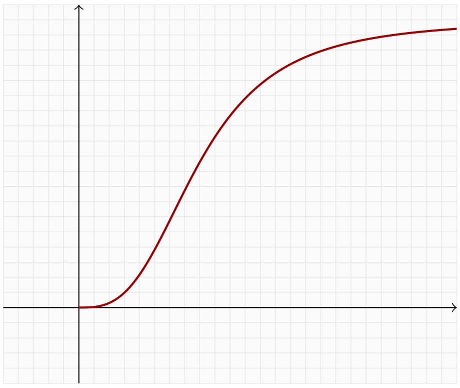
$$\frac{bx^n}{a + x^n} \simeq \frac{bx^n}{a}.$$

Assim, no começo o gráfico se parece com o gráfico de um polinômio x^n. A medida que x aumenta, x^n aumenta mais ainda e como

$$\frac{bx^n}{a + x^n} = \frac{b}{\frac{a}{x^n} + 1},$$

vemos que $\lim_{x\to\infty} v(x) = b$. Assim o gráfico terá o formato esboçado abaixo, no qual foi usado o parâmetro $b = 4$.

□

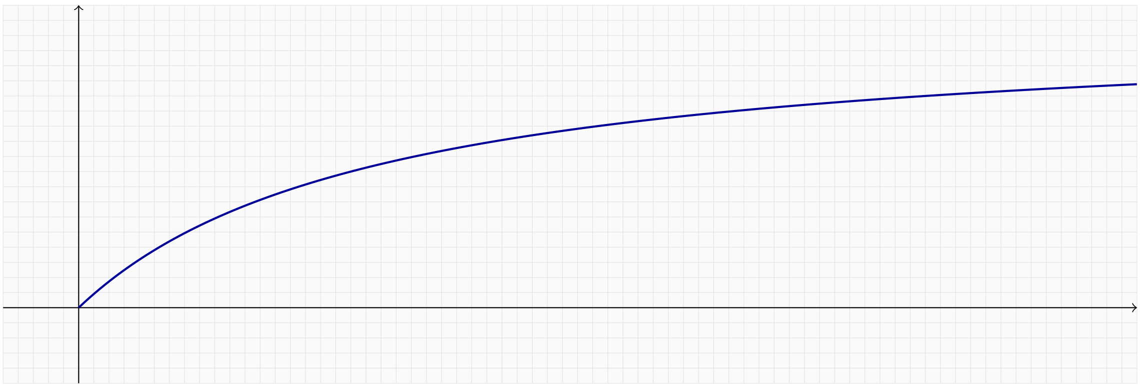


Exercício 2 (Cinética de Michaelis-Menten)**.** *Reações bioquímicas são muitas vezes baseadas na ação de proteínas enzimáticas (ou somente enzimas) que agem como catalizadores da reação (ou seja, fazem a reação "andar mais rápido"). Em geral, temos um substrato que ao se juntar com a enzima forma um complexo, o qual, ao final da reação, se separa em um produto e a enzima original que pode atuar mais uma vez. Nesse caso, a velocidade v da reação pode ser relacionada com a concentração x de substrato por uma equação conhecida com **equação cinética de Michalis-Menten**:*

$$v(x) = \frac{bx}{a+x},$$

onde a e b são constantes positivas específicas a cada enzima a às condições experimentais. Usando o exercício anterior, descreva o comportamento da reação a partir do gráfico da função $v(x)$.

Solução. Pelo exercício anterior, o gráfico terá um formato próximo do gráfico abaixo Vemos



através do gráfico que no início, quando há pouco substrato a ação enzimática é eficaz e consegue aumentar muito rápido a velocidade da reação. A medida que a concentração de substrato vai aumentado a ação enzimática vai entrando num regime de saturação: incrementos grandes de substrato causam pouco aumento na velocidade da reação. □

1. Apêndice: justificativas analíticas

Se você ficou com uma sensação de de que faltou um pouco de explicação nos argumentos heurísticos apresentados nas soluções acima, eu preparei essa seção pensando em você. De fato, é possível ser muito mais formal e rigoroso para deduzir as mesmas conclusões.

Solução formal do Exercício 1 (a). Para evitar confusões causadas por excesso de letras, vamos supor inicialmente que $b = 3.9$ e $a = 4.7$. Veja que os valores são aleatórios mesmo, porque a solução realmente não muda se mudamos os parâmetros a e b.

Primeiro, observe que $4.7 + x^n > x^n$ para todo $x > 0$. Como uma fração diminui se o seu denominador aumenta, concluímos daí que

$$\frac{3.9x^n}{4.7+x^n} < \frac{3.9x^n}{x^n} = 3.9.$$

Logo, de fato $v(x) \leq b$ para todo $x > 0$. Agora que o raciocínio não mudaria nada se trocássemos os valores de 3.9 e 4.7 por outros números. Por isso, podemos expressar a conclusão deixando os parâmetros a e b livres:

$$v(x) \leq b \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

$\square$

Solução formal do Exercício 1(b). Vamos agora demonstrar que

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = b.$$

Para isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ (que funciona como a nossa margem de erro) existe $c > 0$ tal que se $x > c$ então $|v(x) - b| < \varepsilon$. Como x^n fica arbitrariamente grande a medida que x aumenta, podemos escolher $x_0 > 0$ tal que $x_0^n > (b/\varepsilon)a$. Logo, tomando $c = x_0$ vem que

$$x > c \implies x^n > x_0^n > (\frac{b}{\varepsilon})a \implies \frac{a}{x^n} < \frac{\varepsilon}{b}.$$

Logo, se $x > c$ então,

$$v(x) = \frac{bx^n}{a + x^n} = \frac{b}{\frac{a}{x^n} + 1} > \frac{b}{1 + \frac{\varepsilon}{b}},$$

e portanto

$$b - v(x) < b - \frac{b}{1 + \frac{\varepsilon}{b}} = b\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{b}}\right) = b\left(\frac{\frac{\varepsilon}{b}}{1 + \frac{\varepsilon}{b}}\right) < b\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

como queria demonstrar. $\square$