CMA - aula 04 Derivadas e equações diferenciais.

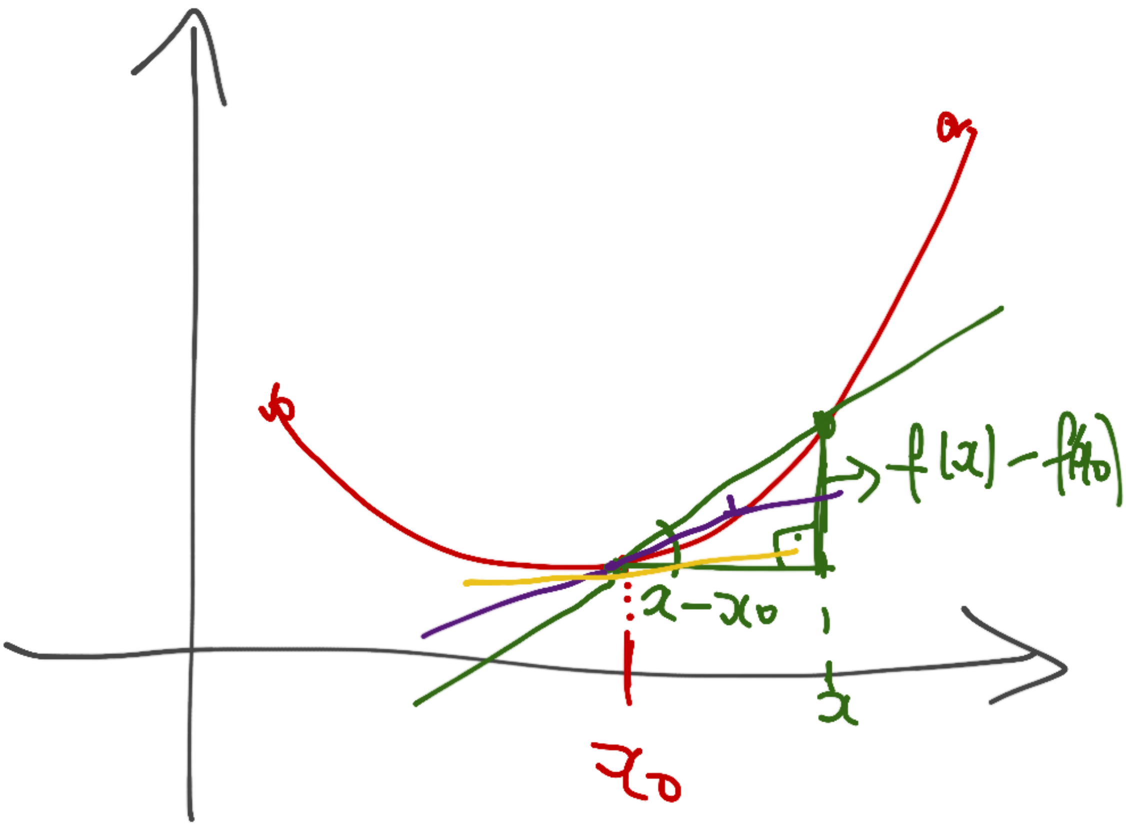
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$$

$x = x_0 + \delta$

$$= \lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

→ taxa de variação de f em $[x, x_0]$ ou $[x_0, x]$



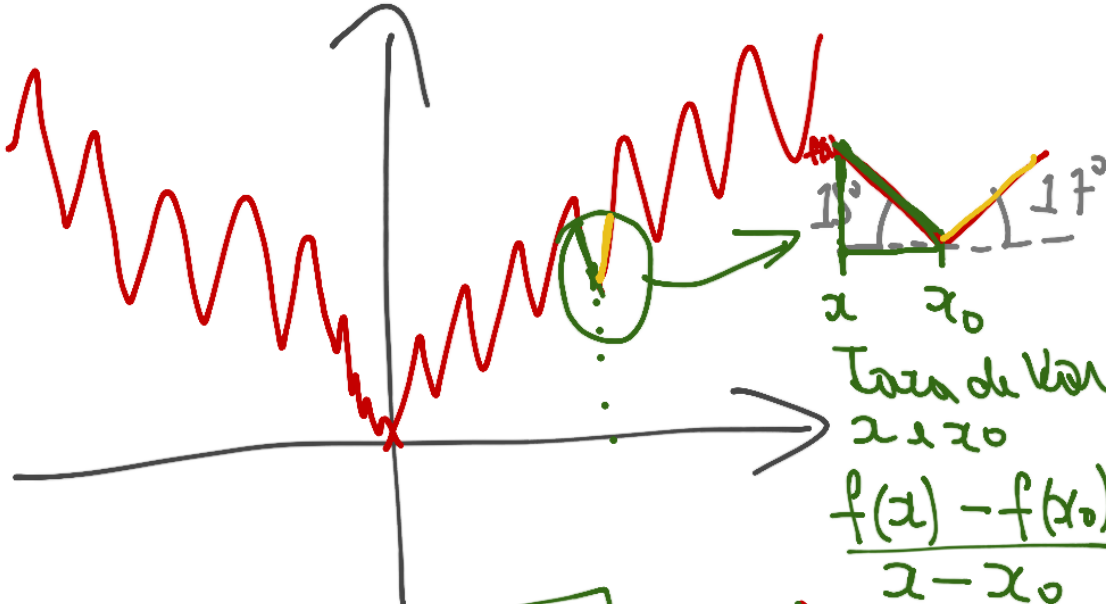
Obs: Nem sempre uma função é diferenciável.

(1)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{x} = -1$$

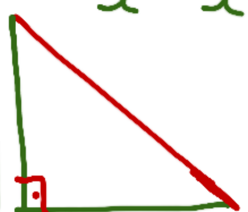
(2)



Taxa de var entre x e x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -Tg\,15^\circ$$

$\boxed{f(x)-f(x_0)>0}$ $[f(x) - f(x_0)]$



↳ comp $= x_0 - x$

obs:

$$Tg\,15^\circ = \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x} \text{, por}$$

$$\text{mo} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -Tg\,15^\circ$$

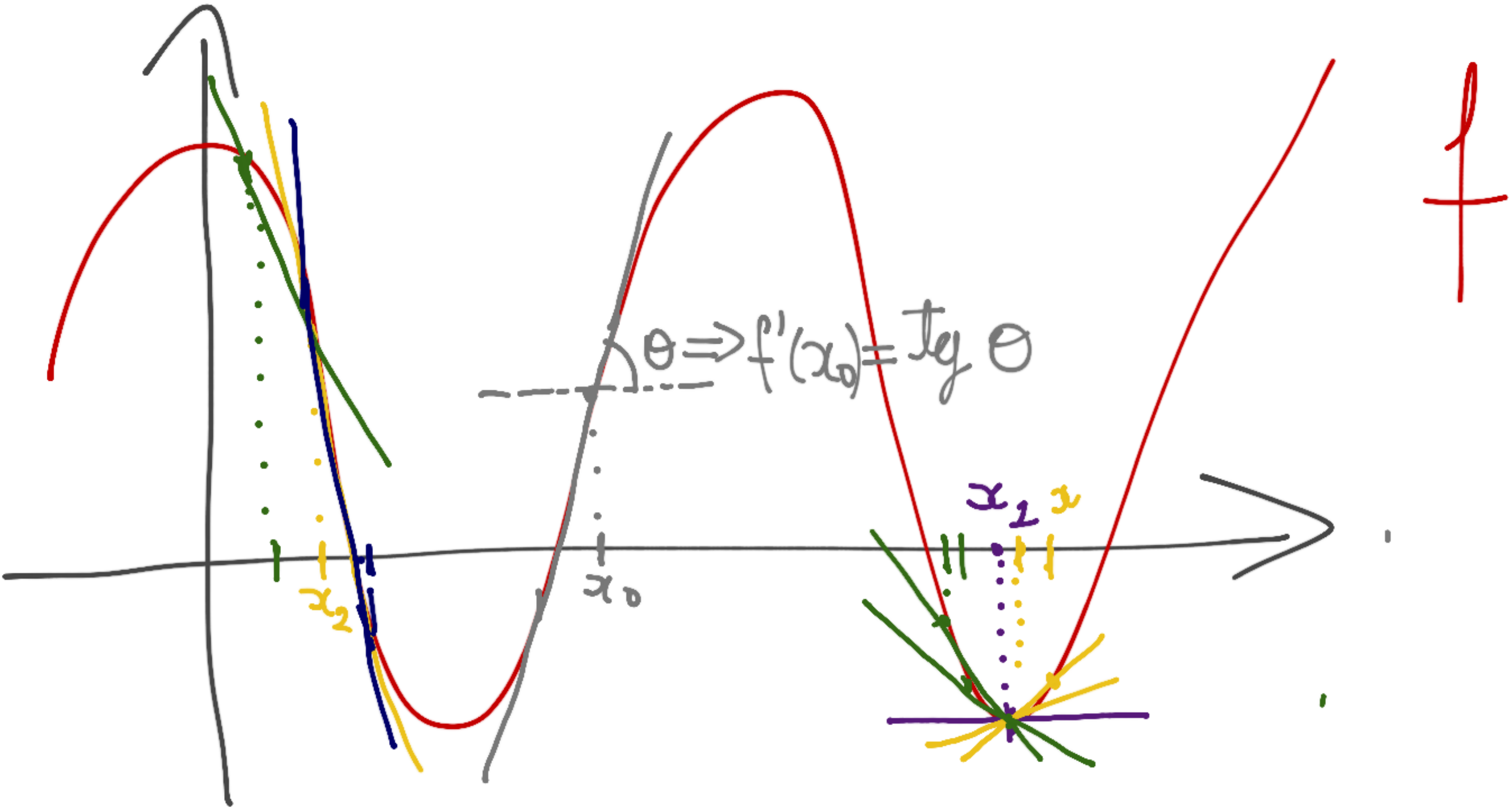
Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em todos os pontos.

$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}$, existe o limite

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x \to x_0}} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}},$$

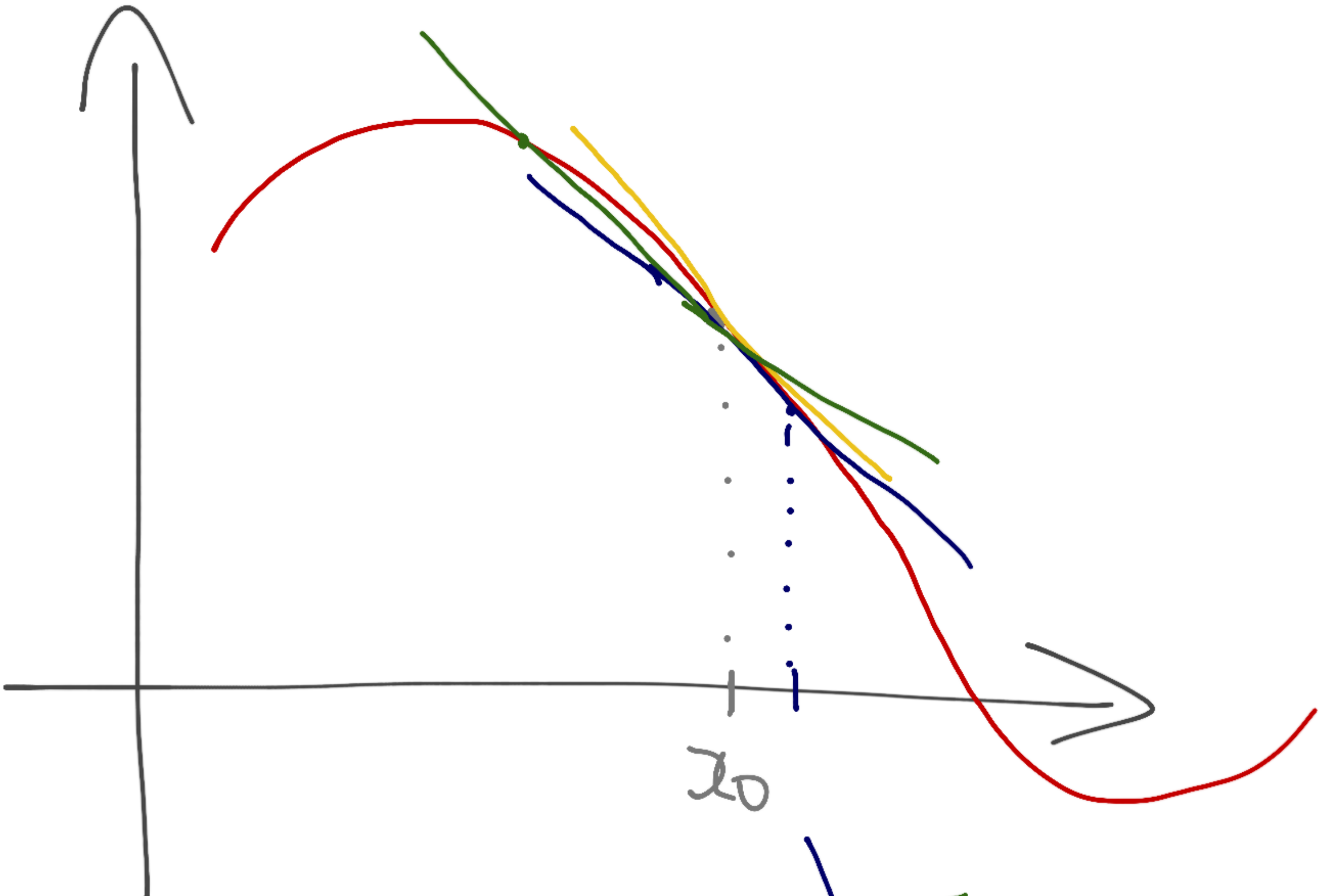
Com isso temos uma nova função:

$$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0)$$

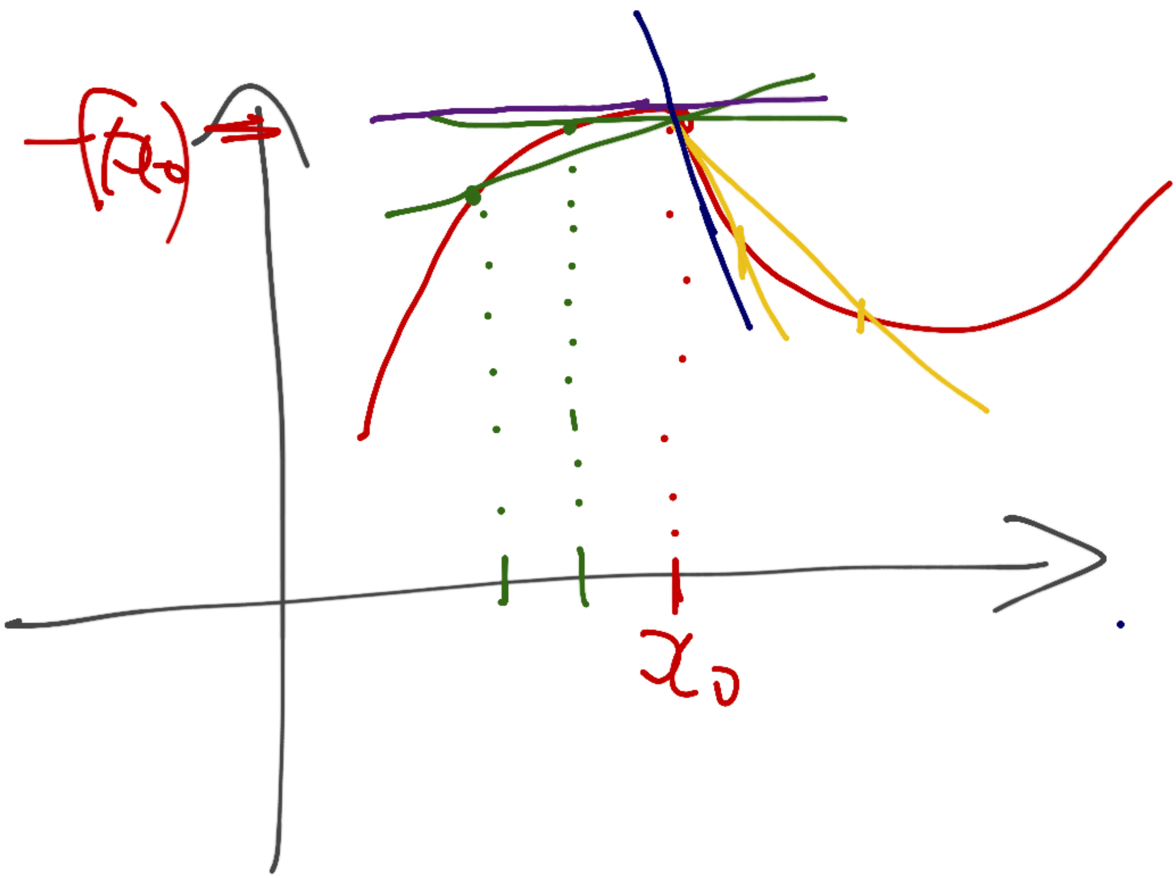


* f' fornece informações qualitativas sobre o gráfico.

Ex: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ é crescente perto de x_0



Ex



inc lilás = 0

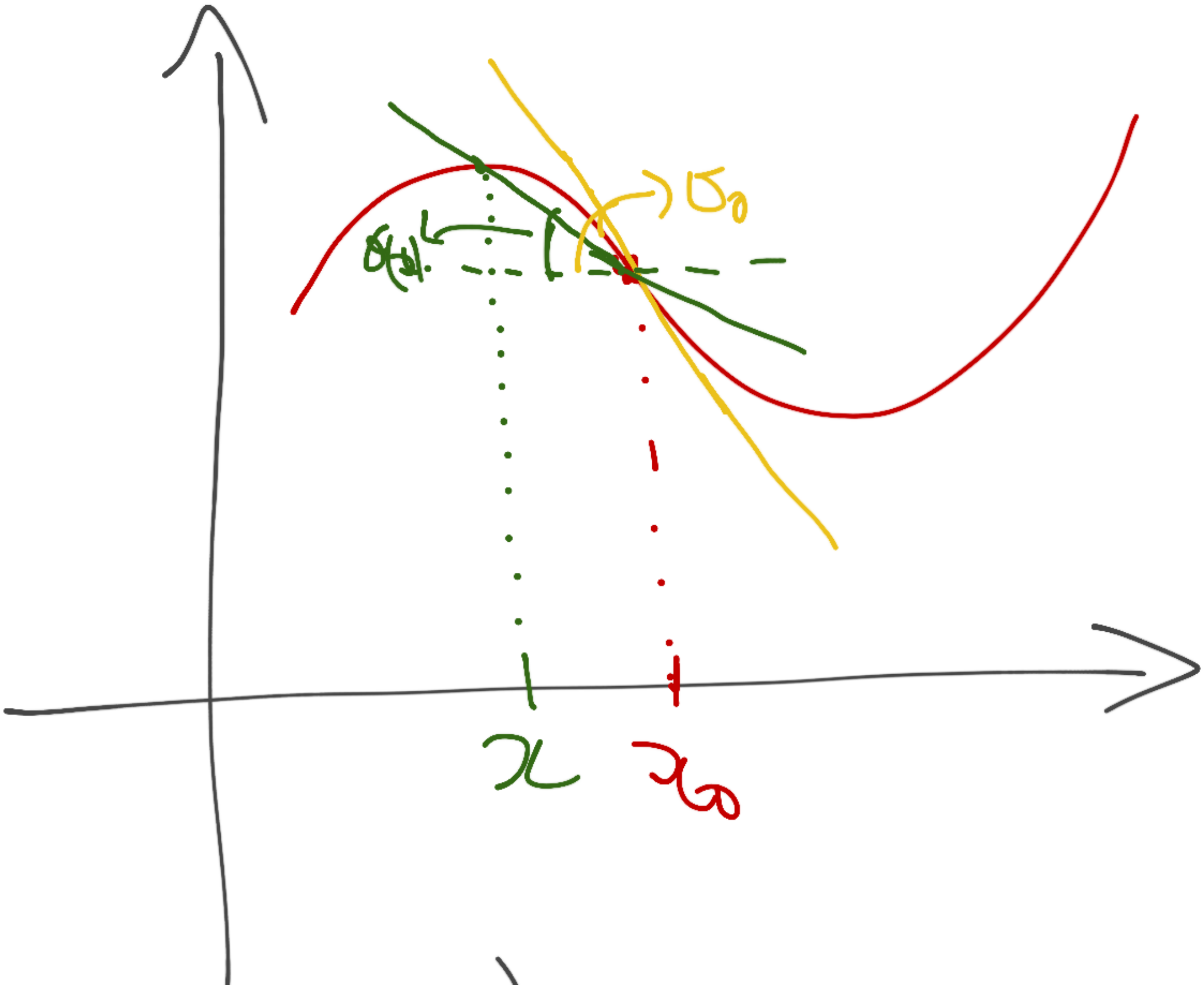
inc azul = 0.8

$x < x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to 0$

$(0.1, 0.0090, 0.00003 \ldots)$

$x > x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to -0.8$

$(-0.68, -0.72, -0.79 \ldots)$



"f é diff'le em $x_0 \Longleftrightarrow$

"quando $x \to x_0$, $\operatorname{tg}\theta(x) \longrightarrow \operatorname{tg}\theta_0 = f'(x_0)$"

• Como calcular derivadas:
(regras de derivação)

1ª Regra: Derivação de polinômios

Proposição: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = cx^n, \; n \in \mathbb{N}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Então f é diferenciável em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x_0) = nc\, x^{n-1}}$$

Exemplo: (1)

$$f(x) = 5 \cdot 7x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 11 \cdot 4x$$

(2) $f(x) = 3x^5$

$$\Rightarrow f'(x) = 15x^4$$

Prop: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis e $c \in \mathbb{R}$ então:

$(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Além disso,

$$(cf)'(x) = c f'(x).$$

Ex: $\varphi(x) = 3x^2 + x^3$

$\boxed{\varphi(x) = f(x) + g(x)}$, onde

$f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x^3$

$\Rightarrow f'(x) = 6x$ e $g'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow (f+g)'(x) = \varphi'(x)$

$= 6x + 3x^2$.

(2) $f(x) = 5x + 4x^2 + 7x^7$

$f'(x) = 5x^0 + 8x + 49x^6$

· Derivação de Polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

$$\Rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

· Antiderivadas de um polinômio:

Problema: Seja $f(x) = 3x + 1$.

Como obter a função g

cujo derivada seja igual a f? Qual a expressão de g satisfazendo:

$$g'(x) = f(x)?$$
$$= 3x+1$$

$$g(x) = 1.5x^2 + x,$$
$$g'(x) = 2 \times (1.5)x + 1$$
$$= 3x+1$$

Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, a antiderivada de f será:

$$g(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = f(x).}$$